Časopis pro pěstování matematiky

Ilja Černý

Index bodu vzhledem k polyedrální ploše a jejímu průniku s rovinou

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 88 (1963), No. 1, 59--68

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108347`

INDEX BODU VZHLEDEM K POLYEDRÁLNÍ PLOŠE A JEJÍMU PRŮNIKU S ROVINOU

ILJA ČERNÝ, Praha

(Došlo dne 23. srpna 1961)

Studuje se souvislost indexu bodu vzhledem k polyedrální ploše a indexu bodu vzhledem k systému křivek, které tvoří průnik polyedrální plochy s rovinou.

1. Užíváme pojmů a označení z [1]: Jsou-li i, j, k celá čísla, nechť

$$(1) \quad \mathbf{A}(i, j, k) = \\ = E[x = (x_1, x_2, x_3) \in E_3;\ i - 1 \leqq x_1 \leqq i,\ j - 1 \leqq x_2 \leqq j,\ k - 1 \leqq x_3 \leqq k] .$$

Buď $\mathfrak{A}$ zatím libovolný neprázdný konečný systém krychlí $\mathbf{A}(i, j, k)$; označíme krátce

$$(2) \quad \mathfrak{A} = \{\mathbf{A}_i\}_{i=1}^{k} .$$

Buď

$$(3) \quad \mathfrak{B} = \{\mathbf{B}_j\}_{j=1}^{l}$$

systém všech stěn krychlí $\mathbf{A}_i \in \mathfrak{A}$, které jsou stěnou jen jedné krychle z $\mathfrak{A}$.

Položíme-li

$$(4) \quad \mathbf{A} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathbf{A}_i , \quad \mathbf{B} = \bigcup_{j=1}^{l} \mathbf{B}_j ,$$

je $\mathbf{B}$ hranicí $\mathbf{A}$.

Dvě stěny $\mathbf{B}_j, \mathbf{B}_k \in \mathfrak{B}$ nazveme *sousední*, je-li jejich průnik úsečka (společná strana čtverců $\mathbf{B}_j, \mathbf{B}_k$). *V dalším budeme stále předpokládat, že systém* $\mathbf{A}$ *má tuto vlastnost*:

(5) každá strana každé stěny z $\mathfrak{B}$ leží právě ve dvou různých stěnách z $\mathfrak{B}$.

2. Buď $\tau = \{a, b, c\}$ uspořádaná trojice bodů z E_3; budeme ztotožňovat trojice $\{a, b, c\}$, $\{b, c, a\}$ a $\{c, a, b\}$. Každou takovou trojici τ nazveme *orientovaným trojúhelníkem o vrcholech* a, b, c. Každému orientovanému trojúhelníku $\tau = \{a, b, c\}$ přiřadíme tři uspořádané dvojice (*orientované úsečky*) $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{c, a\}$, které nazveme *orientovanými stranami* τ.

Konvexní obal $T(\tau) = T(a, b, c)$ množiny, jejímiž prvky jsou body a, b, c, nazveme *trojúhelníkem o vrcholech* a, b, c. Konvexní obaly množin, obsahujících po řadě body: a, b; b, c; a, c nazveme *stranami* $T(\tau)$ a označíme $S(a, b)$, $S(b, c)$, $S(a, c)$.

Uvedených názvů užíváme i tehdy, nejsou-li všechny prvky trojice $\tau = \{a, b, c\}$ navzájem různé; říkáme v tom případě, že trojúhelník τ (a $T(\tau)$) je *degenerovaný*.

Je-li F lineární zobrazení $T(\tau)$ do E_3, označíme $F(\tau) = \{F(a), F(b), F(c)\}$; je ovšem $F(T(\tau)) = T(F(\tau))$.

3. *Orientovaným trojúhelníkem na* $\mathfrak{B}$ nazveme každou uspořádanou trojici $\tau = \{a, b, c\}$, mající tyto dvě vlastnosti:

1. všechny tři body a, b, c leží na téže stěně $\boldsymbol{B}_j \in \mathfrak{B}$;

2. označíme-li γ_j vektor, jehož počátečním bodem je střed krychle $\boldsymbol{A}_i \in \mathfrak{A}$, jejíž stěnou je $\boldsymbol{B}_j$, a jehož koncovým bodem je střed stěny $\boldsymbol{B}_j$, je vnější součin

$$[b - a, c - a, \gamma_j] > 0 . \tag{6}$$

Triangulací množiny $\mathfrak{B}$ nazveme každý systém

$$\mathfrak{V} = \{\tau_n\}_{n=1}^{p} \tag{7}$$

orientovaných trojúhelníků

$$\tau_n = \{a_n, b_n, c_n\} \tag{8}$$

na $\mathfrak{B}$, který má tyto vlastnosti:

α) označíme-li

$$T_n = T(\tau_n) = T(a_n, b_n, c_n) , \tag{9}$$

je

$$\boldsymbol{B} = \bigcup_{n=1}^{p} T_n ; \tag{10}$$

β) je-li $1 \leqq m < n \leqq p$, je průnik $T_m \cap T_n$ buď $\emptyset$ nebo společný vrchol nebo společná strana obou trojúhelníků.

Body a_n, b_n, c_n $(n = 1, \ldots, p)$ nazveme *vrcholy triangulace* $\mathfrak{V}$; množinu všech vrcholů triangulace $\mathfrak{V}$ označíme $V(\mathfrak{V})$.

Je-li $T_m \cap T_n$ společná strana obou trojúhelníků, řekneme, že τ_m a τ_n jsou *sousední*.

Abychom nemuseli v dalším opakovat stále totéž, umluvíme se, že v celé práci zachováme veškerá dosud zavedená označení. Budeme předpokládat, že je dána triangulace (7) množiny (3), složená z trojúhelníků (8); v platnosti zůstane také označení (9). Kromě toho bude v dalším pevně dáno zobrazení F množiny $\boldsymbol{B}$ do E_3, které je lineární na každém z trojúhelníků (9); toto zobrazení nazveme *polyedrální plochou*, kompaktní množinu $F(\boldsymbol{B})$ jejím *grafem*, body množiny $F(V(\mathfrak{V}))$ *vrcholy plochy*. Pro krátkost označení položíme konečně

$$A_n = F(a_n) , \quad B_n = F(b_n) , \quad C_n = F(c_n) . \tag{11}$$

4. Buď R libovolná rovina v E_3; zvolme v E_3 kladně orientovanou ortonormální basi $\{X_1, X_2, Y\}$ tak, aby $\{X_1, X_2\}$ byla base v R. Zvolme $w \in R$ libovolně. Otevřený poloprostor určený v E_3 rovinou R, v němž leží bod $w + Y$ resp. $w - Y$, označme E_3^+ resp. E_3^-.

Buď $\sigma = \{A, B, C\}$ orientovaný trojúhelník v E_3, přičemž $R \cap T(\sigma) \neq \emptyset$, ale žádný vrchol σ neleží v R. V jednom z poloprostorů E_3^+, E_3^- leží tedy jediný vrchol σ, ve druhém poloprostoru leží dva vrcholy. Předpokládejme — jak se ihned ukáže, bez újmy obecnosti — že vrchol, který leží v příslušném poloprostoru sám, je A. Rovina R protíná tedy strany $S(A, B)$ a $S(A, C)$; průsečíky R s těmito stranami označme D, E, přičemž

$$(12)_1 \qquad \text{je-li } A \in E_3^+, \text{ nechť } D \in S(A, B) \ (\text{takže } E \in S(A, C)),$$

$$(12)_2 \qquad \text{je-li } A \in E_3^-, \text{ nechť } D \in S(A, C) \ (\text{takže } E \in S(A, B)).$$

Trojúhelníku σ přiřadíme orientovanou úsečku $\{D, E\}$; jest ovšem $S(D, E) = R \cap T(\sigma)$.

Označíme konečně φ zobrazení $\langle 0, 1 \rangle$ do E_3, pro něž platí:

$$(13) \qquad \varphi \text{ je lineární na } \langle 0, 1 \rangle,$$

$$(14) \qquad \varphi(0) = D, \quad \varphi(1) = E.$$

Poznámka 1. Je patrné, že výsledek konstrukce, totiž úsečka $\{D, E\}$ a zobrazení φ, nezávisí skutečně na tom, že jsme vrchol σ, který leží v příslušném poloprostoru sám, označili A.

Pro jednoduchost nevyznačujeme závislost $\{D, E\}$ a φ na R, na orientaci base $\{X_1, X_2\}$ a na trojúhelníku σ.

Poznámka 2. Konstrukci $\{D, E\}$ a φ provádíme i pro degenerované trojúhelníky $\{A, B, C\}$. Pro takové trojúhelníky je ovšem $D = E$ a φ je konstantní.

5. Jsou-li V a W dva vektory v R, označme

$$(15) \qquad [V, W]_R = \begin{vmatrix} V_1, & V_2 \\ W_1, & W_2 \end{vmatrix},$$

kde V_1, V_2, W_1, W_2 jsou složky V, W při basi $\{X_1, X_2\}$ (kterou pokládáme za pevně danou).

Poznámka. Je-li base $\{X_1, X_2, Z\}$ v E_3 kladně orientovaná, je

$$(16) \qquad \operatorname{sgn}[V, W]_R = \operatorname{sgn}[V, W, Z],$$

neboť užíváme-li pro rozklad vektorů v E_3 ve složky base $\{X_1, X_2, Y\}$, je

$$(17) \qquad [V, W, Z] = \begin{vmatrix} V_1, & V_2, & 0 \\ W_1, & W_2, & 0 \\ Z_1, & Z_2, & Z_3 \end{vmatrix} = Z_3 \,.\, [V, W]_R,$$

a $Z_3 > 0$ je ekvivalentní s podmínkou, že base $\{X_1, X_2, Z\}$ je kladně orientovaná.

Věta. *Za situace popsané v odst. 4 je*

$$\operatorname{sgn}[\varrho, B - A, C - A] = \operatorname{sgn}[\varrho, E - D]_R \tag{18}$$

pro každý vektor ϱ roviny R.

Důkaz. Jsou možné dva případy: 1) $A \in E_3^+$, 2) $A \in E_3^-$.

Ad 1): Base $\{X_1, X_2, A - D\}$ je kladně orientovaná a existují $\lambda, \mu \in (0, 1)$ tak, že

$$D = A + \lambda(B - A), \quad E = A + \mu(C - A).$$

Podle předcházející poznámky je tedy

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}[\varrho, E - D]_R &= \operatorname{sgn}[\varrho, E - D, A - D] = \\ &= \operatorname{sgn}[\varrho, \mu(C - A) - \lambda(B - A), - \lambda(B - A)] = \\ &= \operatorname{sgn}(- \lambda\mu[\varrho, C - A, B - A]) = \operatorname{sgn}[\varrho, B - A, C - A]. \end{aligned}$$

Ad 2): Důkaz je analogický; platnost (18) je patrná také z toho, že případ 2) se od případu 1) liší tím, že nyní je kladně orientována base $\{X_1, X_2, D - A\}$ a polohy bodů D, E na stranách $S(A, B)$, $S(A, C)$ jsou vyměněny — výsledek tedy bude týž jako v případě 1).

6. V dalším znamená (jak jsme se již umluvili) F danou polyedrální plochu. Buď R rovina, která neobsahuje žádný vrchol plochy:

$$R \cap F(V(\mathfrak{B})) = \emptyset\,; \tag{19}$$

pro každé $n = 1, \ldots, p$ je tedy průnik $F(T_n) \cap R$ buď prázdný nebo nastane situace, za níž jsme pracovali v odst. 4 (R protíná $F(T_n)$, ale neobsahuje žádný vrchol $F(T_n)$).

Buď

$$P = E[n; F(T_n) \cap R \neq \emptyset]\,; \tag{20}$$

pro každé $n \in P$ můžeme podle odst. 4 sestrojit orientovanou úsečku $\{D_n, E_n\}$ a příslušnou lineární funkci φ_n.

Než vyslovíme hlavní tvrzení práce, uveďme terminologickou poznámku: *Křivkou* nazýváme každé spojité zobrazení ω kompaktního intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle \subset E_1$ do E_3. Body $\omega(\alpha)$, $\omega(\beta)$ nazýváme *počátečním* resp. *koncovým bodem křivky* ω; říkáme, že křivka ω je *uzavřená*, je-li $\omega(\alpha) = \omega(\beta)$.

Jsou-li ω_j $(j = 1, 2)$ křivky definované v $\langle\alpha_j, \beta_j\rangle$, pro něž je $\omega_1(\beta_1) = \omega_2(\alpha_2)$, definujeme $\omega_1 \dotplus \omega_2$ jako ono zobrazení ω, pro něž je

$$\omega(t) = \begin{cases} \omega_1(t) & \text{pro} \quad t \in \langle\alpha_1, \beta_1\rangle\,, \\ \omega_2(t + \alpha_2 - \beta_1) & \text{pro} \quad t \in \langle\beta_1, \beta_1 + \beta_2 - \alpha_2\rangle\,. \end{cases}$$

Podobně definujme $\omega_1 \dotplus \omega_2 \dotplus \ldots \dotplus \omega_r$ pro $r > 2$.

Grafem ω nazveme množinu

$$|\omega| = \omega(\langle\alpha, \beta\rangle)\,.$$

Index bodu vzhledem k ploše a index bodu z R vzhledem ke křivce probíhající v R jsou zavedeny v [1].

Za této situace platí toto tvrzení:

Věta. *Existuje rozklad množiny* P *na disjunktní neprázdné množiny* $P_1, \ldots, P_r$ $(r \geqq 0)$ *s touto vlastností: Každé* P_m *lze cyklicky uspořádat tak, že jsou-li*

$$n(1) \prec n(2) \prec \ldots \prec n(k) \prec n(1) \prec \ldots \tag{21}$$

všechny prvky z P_m, *je*

$$\varphi_{n(1)} \dotplus \varphi_{n(2)} \dotplus \cdots \dotplus \varphi_{n(k)} = \psi_m \tag{22}$$

uzavřená křivka; pro každý bod $w \in R - F(B) = R - \bigcup_{m=1}^{r} |\psi_m|$ *přitom platí*

$$\operatorname{ind}_F w = \sum_{m=1}^{r} \operatorname{ind}_{\psi_m} w\,. \tag{23}$$

Důkaz. Je-li $P = \emptyset$, je tvrzení správné: bude $r = 0$, součet vpravo ve (23) bude nulový a $\operatorname{ind}_F w = 0$, neboť $R \cap F(B) = \emptyset$, takže w leží v neomezené komponentě množiny $E_3 - F(B)$.

Buď tedy $P \neq \emptyset$; před konstrukcí rozkladu P zaveďme pro stručnost vyjádření tento pojem:

Buď $m \in P$; řekneme, že τ_n *je E-sousední k* τ_m, jsou-li τ_m, τ_n sousední a $E_m \in F(T_m \cap T_n)$.

Je vidět, že *ke každému* $m \in P$ *existuje právě jedno* n *tak, že* τ_n *je E-sousední k* τ_m; *je pak ovšem také* $n \in P$.

Lemma. *Jestliže* τ_n *je E-sousední k* τ_m, *je* $D_n = E_m$.

Důkaz. Protože na označení vrcholů zřejmě nezáleží, předpokládejme, že vrcholy $F(\tau_m)$, $F(\tau_n)$, které leží v příslušném poloprostoru E_3^+, E_3^- samotné, jsou A_m, A_n; pak máme situaci analogickou té, za níž jsme pracovali v odst. 4.

Rozeznávejme dva případy podle toho, zda A_m leží v E_3^+ nebo v E_3^-.

1. Buď nejdříve $A_m \in E_3^+$; pak $E_m \in S(A_m, C_m)$. Protože $\{C_m, A_m\}$ je stranou $F(\tau_m)$ a protože τ_m, τ_n jsou sousední a $E_m \in F(T_m \cap T_n)$, je $\{A_m, C_m\}$ stranou $F(\tau_n)$. Je-li $A_n \in E_3^+$, je $A_n = A_m$, takže nutně $C_m = B_n$, přičemž na straně $S(A_n, B_n) = F(T_m \cap T_n)$ leží D_n; tedy $D_n = E_m$. Je-li $A_n \in E_3^-$, je $A_n = C_m$, takže $A_m = C_n$; na straně $S(A_n, C_n) = F(T_m \cap T_n)$ leží v tomto případě opět D_n, takže i nyní $D_n = E_m$.

2. Případ $A_m \in E_3^-$ se vyšetří analogicky.

Tím je lemma dokázáno; pokračujme v důkazu věty. Zvolme $n(1) \in P$ libovolně; předpokládejme, že jsou již sestrojena čísla

$$n(1), \ldots, n(j) \quad (j \geqq 1) \tag{24}$$

z P tvořící prostou posloupnost tak, že $\tau_{n(i+1)}$ je E-sousední k $\tau_{n(i)}$ pro $i = 1, \ldots, j-1$. Jsou dvě možnosti: 1) $\tau_{n(1)}$ je E-sousední k $\tau_{n(j)}$; 2) neplatí 1.

V prvním případě pokládáme konstrukci množiny P_1 za skončenou: P_1 se skládá z čísel $n(1), \ldots, n(j)$, uspořádaných v napsaném pořadí, přičemž za $n(j)$ následuje opět $n(1)$. Ve druhém případě existuje právě jedno n – označme je $n(j+1)$ – tak, že $\tau_{n(j+1)}$ je různé od $\tau_{n(1)}$ a E-sousední k $\tau_{n(j)}$.

Dokažme, že posloupnost

$$n(1), \ldots, n(j), n(j+1) \tag{25}$$

je (ve druhém případě) opět prostá. Předpokládejme, že tomu tak není; existuje tedy index i mezi 1 a j tak, že $\tau_{n(i)} = \tau_{n(j+1)}$. Je ovšem $i \neq 1$ a také $i \neq j$, neboť sousední trojúhelníky $\tau_{n(j)}, \tau_{n(j+1)}$ nemohou být identické.

Předpokládejme, že $i = j - 1$; protože $\tau_{n(j)}$ je E-sousední k $\tau_{n(j-1)} = \tau_{n(i)}$ a $\tau_{n(j+1)} = \tau_{n(i)}$ je E-sousední k $\tau_{n(j)}$, měly by sousední trojúhelníky $\tau_{n(j)}, \tau_{n(j+1)}$ společné dvě různé strany (ony strany $\tau_{n(j)}$, které mají tu vlastnost, že na příslušných stranách trojúhelníka $F(T_{n(j)})$ leží body $D_{n(j)}, E_{n(j)}$), což je nemožné.

Je tedy $1 < i < j - 1$ a $\tau_{n(i-1)}, \tau_{n(i+1)}, \tau_{n(j)}$ jsou tři různé trojúhelníky (neboť posloupnost (24) je prostá) sousední k $\tau_{n(i)} = \tau_{n(j+1)}$. Rovina R protíná společnou stranu $F(T_{n(i)})$ a $F(T_{n(i-1)})$, společnou stranu $F(T_{n(i)})$ a $F(T_{n(i+1)})$ a společnou stranu $F(T_{n(i)})$ a $F(T_{n(j)})$, tedy všechny tři strany $F(T_{n(i)})$, což je spor (neboť pak by R obsahovala i vrcholy $F(T_{n(i)})$. Tím je dokázáno, že posloupnost (25) je prostá.

Protože P je konečná množina a v konstrukci prosté posloupnosti $n(1), n(2), \ldots$ lze pokračovat tak dlouho, dokud $\tau_{n(1)}$ není E-sousední k trojúhelníku τ, jehož indexem je poslední člen posloupnosti, existuje k tak, že konstrukce skončí u $n(k)$ – přičemž tedy nutně $\tau_{n(1)}$ je E-sousední k $\tau_{n(k)}$.

Tím je sestrojena množina P_1 zároveň s cyklickým uspořádáním svých prvků (tak, jak je to uvedeno v (21)). Je patrné, že množina P_1 i její cyklické uspořádání jsou plně určeny kterýmkoli prvkem P_1.

Je-li $P \neq P_1$, zvolíme libovolně index v $P - P_1$ a analogickým způsobem sestrojíme P_2; tak pokračujeme dále až do vyčerpání všech prvků množiny P. Z konstrukce je patrné, že množiny $P_1, \ldots, P_r$, které tak dostaneme, jsou disjunktní a neprázdné.

Možnost konstruovat křivky φ_k plyne z toho, že jsou-li m, n dva indexy patřící do téhož P_k, přičemž n je ve smyslu cyklického uspořádání v P_k prvek bezprostředně následující za m, je τ_n E-sousední k τ_m, takže podle lemmatu koncový bod E_m křivky φ_m je počátečním bodem D_n křivky φ_n. Z této vlastnosti plyne také uzavřenost křivky ψ_k.

Dokažme (23): Buď $w \in R - F(\mathbf{B})$ a zvolme jednotkový vektor ϱ v R. Označme

$$P(w, \varrho) = E[x; x = w + t\varrho, t \geqq 0]\,. \tag{26}$$

Předpokládejme, že $P(w, \varrho)$ neprochází žádným bodem E_n ($n \in P$); tuto podmínku lze jistě splnit. Polopřímka $P(w, \varrho)$ neprochází pak žádnou stranou žádného trojúhelníka $F(T_n)$, takže podle definice indexu bodu vzhledem k ploše (viz [1], vztah (77) v odst. 13, definici v odst. 10 a vztah (10) v odst. 5) je

$$\operatorname{ind}_F w = \sum \operatorname{sgn} [\varrho, B_n - A_n, C_n - A_n] , \tag{27}$$

kde vpravo se sčítá přes ta n, pro něž $P(w, \varrho) \cap F(T_n) \neq \emptyset$.

Podle analogické věty pro dimensi 2 je

$$\operatorname{ind}_{\psi_m} w = \sum \operatorname{sgn} [\varrho, E_n - D_n]_R , \tag{28}$$

kde vpravo se sčítá přes ta $n \in P_m$, pro něž $P(w, \varrho) \cap S(D_n, E_n) \neq \emptyset$. Sečteme-li vztahy (28) pro $m = 1, \ldots, r$, dostaneme

$$\sum_{m=1}^{r} \operatorname{ind}_{\psi_m} w = \sum \operatorname{sgn} [\varrho, E_n - D_n]_R , \tag{29}$$

kde vpravo se nyní sčítá přes všechna $n \in P$, pro něž $P(w, \varrho) \cap S(D_n, E_n) \neq \emptyset$. Množina těchto indexů n je ovšem identická s množinou indexů, podle nichž se sčítá vpravo v (27).

K dokončení důkazu věty stačí vzít v úvahu ještě větu z odst. 5.

7. Pro zkrácení zápisu můžeme ještě písmenem χ označit systém všech křivek ψ_m ($m = 1, \ldots, r$) a položit

$$\operatorname{ind}_\chi w = \sum_{m=1}^{r} \operatorname{ind}_{\psi_m} w \tag{30}$$

pro všechna w, pro něž má součet vpravo smysl, tj. pro všechna

$$w \in R - \bigcup_{m=1}^{r} |\psi_m| = R - F(\mathbf{B}) .$$

Označíme-li ještě

$$|\chi| = \bigcup_{m=1}^{r} |\psi_m| = \bigcup_{n \in P} |\varphi_n| , \tag{31}$$

lze místo (23) psát:

$$\operatorname{ind}_F w = \operatorname{ind}_\chi w \tag{32}$$

pro všechna $w \in R - |\chi| = R - F(\mathbf{B})$.

Literatura

[1] *I. Černý*: Elementární zavedení indexu bodu vzhledem k ploše. Časopis pro pěst. mat. *86* (1961), 7–31.

Резюме

ИНДЕКС ТОЧКИ ОТНОСИТЕЛЬНО МНОГОГРАННОЙ ПОВЕРХНОСТИ И ЕЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ С ПЛОСКОСТЬЮ

ИЛЬЯ ЧЕРНЫЙ (Ilja Černý), Прага

Пусть $\mathfrak{A} = \{\boldsymbol{A}_i\}_{i=1}^{k}$ – (непустая) конечная система кубов (в E_3) единичного обьема, причем координаты их вершин – целые числа. Пусть $\mathfrak{B} = \{\boldsymbol{B}_j\}_{j=1}^{l}$ – – система всех граней кубов $\boldsymbol{A}_i$, которые являются гранями одного и только одного куба из $\mathfrak{A}$ (т. е. которые лежат на границе множества $\boldsymbol{A} = \bigcup_{i=1}^{k} \boldsymbol{A}_i$); допустим, что система $\mathfrak{A}$ выбрана так, что каждая сторона каждой грани из $\mathfrak{B}$ является стороной в точности двух различных граней из $\mathfrak{B}$. Положим $\boldsymbol{B} = \bigcup_{j=1}^{l} \boldsymbol{B}_j$.

Ориентированным треугольником мы называем каждую упорядоченную тройку $\tau = \{a, b, c\}$ точек из E_3; притом мы отождествляем тройки $\{a, b, c\}$, $\{b, c, a\}$, $\{c, a, b\}$. Пусть $T(\tau)$ – выпуклая оболочка множества, содержащего точки a, b, c; пусть $S(a, b)$ – выпуклая оболочка множества, содержащего точки a, b. *Ориентинооанным треугольникоw на* $\mathfrak{B}$ мы называем каждую упорядоченную тройку $\tau = \{a, b, c\}$ точек, лежащих на одной грани $\boldsymbol{B}_j \in \mathfrak{B}$, для которой справедливо утверждение: Если γ_j – вектор, начальной точкой которого является центр куба $\boldsymbol{A}_i$ (грань которого – $\boldsymbol{B}_j$), а концевой точкой – центр грани $\boldsymbol{B}_j$, то внешнее произведение $[b - a, c - a, \gamma_j] > 0$.

Триангуляцией множества $\mathfrak{B}$ мы называем каждую систему $\mathfrak{V} = \{\tau_n\}_{n=1}^{p}$ ориентированных трегольников $\tau_n = \{a_n, b_n, c_n\}$ на $\mathfrak{B}$, обладающую тем свойством, что $\boldsymbol{B} = \bigcup_{n=1}^{p} T(\tau_n)$ и что для $1 \leqq m < n \leqq p$ пересечение треугольников $T(\tau_m)$, $T(\tau_n)$ является или пустым множеством или общей вершиной или общей стороной этих треугольников. Отображение F множества $\boldsymbol{B}$ в пространство E_3, которое линейно на каждом треугольнике $T_n = T(\tau_n)$, мы называем *многогранной поверхностью,* точки a_n, b_n, c_n – *вершинами триангуляции* $\mathfrak{V}$, их образы $A_n = F(a_n)$, $B_n = F(b_n)$, $C_n = F(c_n)$ – *вершинами поверхности.*

Главным результатом статьи является следующее утверждение: Пусть R – плоскость, в которой дан базис $\{X_1, X_2\}$; пусть R не содержит ни одной вершины поверхности F. Обозначим $P = E[n;\ F(T_n) \cap R \neq \emptyset]$, $Y = X_1 \times X_2$ (векторное произведение). Пусть E_3^+ (соотв. E_3^-) – открытое полупространство, определяемое в E_3 плоскостью R, в котором лежит точка $w + Y$ (соотв. $w - Y$), если $w \in R$.

Каждый из отрезков $F(T_n) \cap R$ $(n \in P)$ мы ориентируем так: В одном из полупрострнаств E_3^+, E_3^- лежит одна из вершин $F(T_n)$, в другом – два. Без ограничения общности можно предположить, что вершиной $F(T_n)$, которая лежит

в соответствующем полупространстве одна, является точка A_n. Если $A_n \in E_3^+$ (соотв. $\in E_3^-$), то пусть начальной точкой D_n отрезка $F(T_n) \cap R$ является точка пересечения R со стороной $S(A_n, B_n)$ (соотв. $S(A_n, C_n)$); концевую точку отрезка $F(T_n) \cap R$ обозначим через E_n; пусть φ_n – линейное на $\langle 0, 1 \rangle$ отображение, для которого имеет место $\varphi_n(0) = D_n$, $\varphi_n(1) = E_n$.

Тогда P можно разложить на конечное число непересекающихся непустых множеств $P_m(m = 1, \ldots, r, r \geqq 0)$ так, что:

Каждое множество P_m можно циклически упорядочить (в статье показано, каким образом это упорядочение можно эффективно осуществить) *так, что если*

$$n(1) \prec n(2) \prec \ldots \prec n(k) \prec n(1) \prec \ldots$$

— все элементы P_m, то

$$\psi_m = \varphi_{n(1)} \dotplus \varphi_{n(2)} \dotplus \ldots \dotplus \varphi_{n(k)}$$

будет замкнутой кривой. Если обозначить через χ систему всех кривых ψ_m и положить

$$\operatorname{ind}_\chi w = \sum_{m=1}^{r} \operatorname{ind}_{\psi_m} w$$

для всех $w \in R - F(\mathbf{B})$, то для этих w справедливо равенство

$$\operatorname{ind}_\chi w = \operatorname{ind}_F w\,.$$

(Индекс точки $w \in R$ относительно кривой в R, а также индекс точки относительно поверхности, был введен в [1].)

Summary

THE INDEX OF A POINT WITH RESPECT TO A POLYHEDRAL SURFACE AND TO ITS PLANE SECTION

ILJA ČERNÝ, Praha

Let $\mathfrak{A} = \{A_i\}_{i=1}^k$ be a (nonempty) finite system of cubes (in E_3) with unit volumes and integer coordinates of vertices. Let $\mathfrak{B} = \{\mathbf{B}_j\}_{j=1}^l$ be the system of all the faces of cubes $\mathbf{A}_i$ which lie on the boundary of $\mathbf{A} = \bigcup_{i=1}^k \mathbf{A}_i$; let $\mathbf{B}$ be their union: $\mathbf{B} = \bigcup_{j=1}^l \mathbf{B}_j$. Let us suppose that the system $\mathfrak{A}$ has the following property: each side of each face from $\mathfrak{B}$ lies in exactly two different faces from $\mathfrak{B}$.

Each ordered triplet $\tau = \{a, b, c\}$ of points from E_3 is called an "*oriented trianqle*"; we say that the triplets $\{a, b, c\}$, $\{b, c, a\}$, and $\{c, a, b\}$ are identical. Let $T(\tau)$ be the convex envelope of the set containing the points a, b, c, let $S(a, b)$ be the convex envelope of the set containing the points a, b. An "*oriented triangle on* $\mathfrak{B}$" is an

arbitrary triplet $\tau = \{a, b, c\}$, the points of which lie on one face $\mathbf{B}_j \in \mathfrak{B}$, and which has the following property: If $\mathbf{B}_j \in \mathfrak{B}$ is the face of the cube $\mathbf{A}_i \in \mathfrak{A}$ and if γ_j is the vector with origin in the center of the cube $\mathbf{A}_i$ and terminal vertex in the center of $\mathbf{B}_j$, then the outer product $[b - a, c - a, \gamma_j]$ is positive.

Each system $\mathfrak{P} = \{\tau_n\}_{n=1}^{p}$ of oriented triangles $\tau_n = \{a_n, b_n, c_n\}$ on $\mathfrak{B}$ having the property that $\mathbf{B} = \bigcup_{n=1}^{p} T(\tau_n)$ and that for $1 \leqq m < n \leqq p$ the intersection of $T(\tau_m)$, $T(\tau_n)$ is either the empty set or the common vertex or the common side of the both triangles, is called "*a trianqulation of the set* $\mathfrak{B}$". A mapping F of the set $\mathbf{B}$ into E_3, linear on each triangle $T_n = T(\tau_n)$, is called "*a polyhedral surface*"; the points a_n, b_n, c_n are the "*vertices of the triangulation* $\mathfrak{P}$", their images $A_n = F(a_n)$, $B_n = F(b_n)$, $C_n = F(c_n)$ are the "*vertices of the surface*".

The main result of the present article is the following theorem: Let R be a plane in which the base $\{X_1, X_2\}$ is given; let us suppose that R does not contain any vertex of the surface F. Let $P = E[n; F(T_n) \cap R \neq \emptyset]$, $Y = X_1 \times X_2$ (vector product). Let E_3^+ (resp. E_3^-) be the open half-space in E_3 whose boundary is R and which contains the point $w + Y$ (resp. $w - Y$), if $w \in R$.

Orient each of the segments $F(T_n) \cap R$ (where $n \in P$) in the following way: One of the half-spaces E_3^+, E_3^- contains only one vertex of $F(T_n)$, the other half-space contans two vertices. Let us suppose (we can do so without restricting generality) that A_n is the vertex of $F(T_n)$ which lies alone in the corresponding half-space.

If $A_n \in E_3^+$ (resp. $A_n \in E_3^-$), let the origin D_n of the segment $F(T_n) \cap R$ be the point of intersection of R with the side $S(A_n, B_n)$ (resp. $S(A_n, C_n)$); let E_n be the terminal point of the segment $F(T_n) \cap R$. Let φ_n be the linear mapping of the interval $\langle 0, 1 \rangle$, for which $\varphi_n(0) = D_n$, $\varphi_n(1) = E_n$.

Then we can decompose the set P into a finite number of disjoint nonempty sets P_m ($m = 1, \ldots, r$; $r \geqq 0$) so that the following holds:

Each set P_m can be ordered cyclically (in the article there is shown how this can be performed effectively) in such a manner that if

$$n(1) \prec n(2) \prec \ldots \prec n(k) \prec n(1) \prec \ldots$$

are all the elements of P_m, then

$$\psi_m = \varphi_{n(1)} \dotplus \cdots \dotplus \varphi_{n(k)}$$

is a closed curve. If we denote the system of all the curves ψ_m by the symbol χ and if we put

$$\operatorname{ind}_\chi w = \sum_{m=1}^{r} \operatorname{ind}_{\psi_m} w \textit{ for all points } w \in R - F(\mathbf{B}),$$

then the following relation holds:

$$\operatorname{ind}_\chi w = \operatorname{ind}_F w \textit{ for all } w \in R - F(B).$$

(The index of a point $w \in R$ with respect to a curve in R and the index of a point with respect to a surface are defined in [1].)