Časopis pro pěstování matematiky

Anna Jůzová

Eukleidovské invarianty monosystémů

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 88 (1963), No. 1, 1--13

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108344`

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY
Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha
SVAZEK 88 * PRAHA 20. II. 1963 * ČÍSLO 1

EUKLEIDOVSKÉ INVARIANTY MONOSYSTÉMŮ

ANNA JŮZOVÁ, Praha

(Došlo dne 25. července 1961)

Tato práce navazuje na článek [4]. V této práci je zkoumáno zobecnění výsledků článku [4] pro libovolný eukleidovský prostor liché dimense, pak geometrický význam invariantů monosystému dimense 3 a je sestaven systém invariantů v některých vyloučených případech.

Úplný systém invariantů monosystému dimense $n + 1$ tvořeného jednoparametrickým systémem n-rozměrných prostorů v eukleidovském prostoru E_{2n+1}. V E_{2n+1} mějme jednoparametrický systém n-rozměrných prostorů. Tyto prostory jsou dány pro každé t takto:

$$\boldsymbol{B}_n(t) = [A(t), \boldsymbol{u}_1(t), \ldots, \boldsymbol{u}_n(t)] .$$

Systém těchto prostorů tvoří varietu; nazveme ji monosystém dimense $n + 1$. Nechť platí

$$\boldsymbol{u}_i(t) \,.\, \boldsymbol{u}_j(t) = \delta_{ij} , \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ pro } i \neq j , \\ 1 \text{ pro } i = j . \end{cases}$$

Budiž tento monosystém nerozvinutelný, to znamená, že $\det [A', \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{u}'_1, \ldots, \boldsymbol{u}'_n] \neq 0$. Čárkou značíme derivaci podle t. Prostor $[A(t), \boldsymbol{u}_1(t), \ldots, \boldsymbol{u}'_n(t)]$ je nezávislý na volbě base $\boldsymbol{B}_n(t)$.

Prostor $[A(t), \boldsymbol{u}_1(t), \ldots, \boldsymbol{u}'_n(t)]$ označíme $A_{2n}(t)$. Prostor totálně kolmý k $\boldsymbol{B}_n(t)$ v prostoru $A_{2n}(t)$ označíme $\boldsymbol{C}_n(t)$. Derivaci $\boldsymbol{u}_j$ v bodě t můžeme napsat ve tvaru

$$\boldsymbol{u}'_j(t) = \sum_{i=1}^{n} {}^i a_j \, \boldsymbol{u}_i(t) + {}'\boldsymbol{u}'_j(t) , \quad \text{kde} \quad {}'\boldsymbol{u}'_j(t) \in \boldsymbol{C}_n(t) .$$

Tím jsou všechny vektory ${}'\boldsymbol{u}'_j(t)$ jednoznačně dány. Jsou nezávislé, což plyne z předpokladu nerozvinutelnosti.

Zvolme nyní vektor $\boldsymbol{v}(t)$ z prostoru $\boldsymbol{B}_n(t)$:

$$\boldsymbol{v}(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t) \, \boldsymbol{u}_i(t) .$$

Pro jeho derivaci platí

$$\mathbf{v}'(t) = \sum_{i=1}^{n} (.)\, \mathbf{u}_i(t) + \alpha_i(t)\, \mathbf{u}_i'(t)\,,$$

kde $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \mathbf{u}_i'(t) = {}'\mathbf{v}'(t)$, $'\mathbf{v}'(t) \in \mathbf{C}_n(t)$. Tedy $'\mathbf{v}'(t)$ je kolmý průmět vektoru $\mathbf{v}'(t)$ do prostoru $\mathbf{C}_n(t)$. Pro jeho velikost platí

$$|{}'\mathbf{v}'(t)| = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i(t)\, \alpha_j(t)\, {}'\mathbf{u}_i'(t)\, {}'\mathbf{u}_j'(t)\,.$$

To je kvadratická forma s koeficienty $'\mathbf{u}_i'(t)\,.\,{}'\mathbf{u}_j'(t)$ a se souřadnicemi $\alpha_i(t)$, $\alpha_j(t)$, což jsou souřadnice vektoru $\mathbf{v}(t)$ v basi $\{\mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}_2(t)\}$ a současně vektoru $'\mathbf{v}'(t)$ v basi $\{{}'\mathbf{u}_1'(t), {}'\mathbf{u}_2'(t)\}$.

Matici koeficientů této kvadratické formy označíme $\mathbf{E}(t)$, její prvky $e_{ij}(t)$.

Věta 1. *Nechť všechny kořeny charakteristické rovnice matice $\mathbf{E}(t)$ jsou jednonásobné. Existuje vždy ortogonální reálná transformace $\mathbf{C}(t)$, která převádí reálnou kvadratickou formu do diagonálního tvaru. Nechť při této transformaci odpovídá basi $\{\mathbf{u}_1(t), \ldots, \mathbf{u}_n(t)\}$ base $\{\mathbf{v}_1(t), \ldots, \mathbf{v}_n(t)\}$, souřadnicím $\alpha_i(t)$ souřadnice $\beta_i(t)$; pak původní formě odpovídá kvadratická forma tvaru*

$$f_2(\mathbf{v}(t)) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(t)\, f_2(\mathbf{v}_i(t)) \tag{1}$$

a lze vždy transformaci volit tak, že $\varrho_i(t) < \varrho_j(t) \Leftrightarrow i < j$, kde $\varrho_k = f_2(\mathbf{v}_k)$. Takto volenými transformacemi dostáváme různé obrazy vektorů base, lišící se pouze násobkem (-1).

Z věty 1 plyne, že pro libovolné i, j $(i \neq j)$ platí

$$\mathbf{v}_i \mathbf{v}_j = 0 \quad \text{a} \quad {}'\mathbf{v}_i'\,.\,{}'\mathbf{v}_j' = f(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = 0\,.$$

Monosystém je definován v jistém intervalu hodnot t. V celém tom intervalu předpokládejme jednonásobné kořeny charakteristické rovnice matice $\mathbf{E}$. Pak pro každou hodnotu t definujeme basi prostoru $\mathbf{E}_{2n+1}$ takto: $\{A(t), \mathbf{u}_1(t), \ldots, \mathbf{u}_{2n+1}(t)\}$, kde A je strikční křivka monosystému. *Strikční křivku monosystému* definujeme na základě přirozené base, tj. ortonormální base, pro niž platí $\mathbf{z}_i'\mathbf{z}_j = 0$, $i, j = 1, \ldots, n$. Strikční křivka je množina bodů $A(t)$, pro něž platí $A'(t)\,.\,\mathbf{z}_i'(t) = 0$ pro $i = 1, \ldots, n$. Je možné si ověřit, že bod $A(t)$ je právě ten, na kterém mají nekonečně blízké tvořící prostory — z nerozvinutelnosti plyne, že jsou mimoběžné — nejmenší vzdálenost (viz [3], věta 5). Dále nechť $\mathbf{u}_1(t), \ldots, \mathbf{u}_n(t)$ jsou jednotkové vektory směrů $\mathbf{v}_1(t), \ldots, \mathbf{v}_n(t)$, dále buďtež $\mathbf{u}_{n+1}(t), \ldots, \mathbf{u}_{2n}(t)$ jednotkové vektory směrů $'\mathbf{v}_1(t), \ldots, {}'\mathbf{v}_n'(t)$ a $\mathbf{u}_{2n+1}(t)$ budiž jednotkový vektor kolmý ke všem $\mathbf{u}_1(t), \ldots, \mathbf{u}_{2n}(t)$, tj. k prostoru $A_{2n}(t)$. Parametr t volíme tak, aby $|\mathrm{d}A/\mathrm{d}t| = 1$. Protože base je ortonormální, je

$$\mathbf{u}_i\mathbf{u}_j = 0, \text{ pro } i \neq j\,, \quad \mathbf{u}_i^2 = 1\,,$$
$$\mathbf{u}_i'\mathbf{u}_j + \mathbf{u}_i\mathbf{u}_j' = 0\,, \qquad 2\mathbf{u}_i\mathbf{u}_i' = 0\,.$$

Z ortonormality a z toho, jak jsme basi volili, plyne, že můžeme psát

(2)

$$
\begin{aligned}
A' &= p_1\mathbf{u}_1 + \ldots + p_n\mathbf{u}_n && + \varepsilon\sqrt{\left(1 - \sum_{i=1}^{n} p_i^2\right)}\,\mathbf{u}_{2n+1}\,,\\
\mathbf{u}'_1 &= \sum_{i=2}^{n} {}^1q_i\mathbf{u}_i \quad + c_1\mathbf{u}_{n+1}\,,\\
\mathbf{u}'_2 &= -\,{}^1q_2\mathbf{u}_1 + \sum_{i=3}^{n} {}^2q_i\mathbf{u}_i \quad + c_2\mathbf{u}_{n+2}\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mathbf{u}'_m &= -\sum_{i=1}^{m-1} {}^iq_m\mathbf{u}_i + \sum_{i=m+1}^{n} {}^mq_i\mathbf{u}_i + \quad c_n\mathbf{u}_{n+m}\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mathbf{u}'_n &= -\sum_{i=1}^{n-1} {}^iq_n\mathbf{u}_i \quad + \quad c_n\mathbf{u}_{2n}\,,\\
\mathbf{u}'_{n+1} &= -\,c_1\mathbf{u}_1 \quad + \sum_{i=2}^{n} {}^1r_i\mathbf{u}_{n+i} \quad + s_1\mathbf{u}_{2n+1}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mathbf{u}'_{n+m} &= -\,c_m\mathbf{u}_m \quad - \sum_{i=1}^{m-1} {}^ir_m\mathbf{u}_{n+1} + \sum_{i=m+1}^{n} {}^mr_i\mathbf{u}_{n+i} \quad + s_m\mathbf{u}_{2n+1}\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mathbf{u}'_{2n} &= \quad -\,c_n\mathbf{u}_n - \sum_{i=1}^{n-1} {}^ir_n\mathbf{u}_{n+i} \quad + s_n\mathbf{u}_{2n+1}\,,\\
\mathbf{u}'_{2n+1} &= \quad -\sum_{i=1} s_i\mathbf{u}_{n+i}\,.
\end{aligned}
$$

Omezíme se na případy, kde $p_i \neq 0$. Orientaci $u_1, \ldots, u_{2n}, u_{2n+1}$ volíme tak, aby

(3) $$p_i > 0\,, \quad c_i > 0\,, \quad \varepsilon = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

Věta 2. *Funkce*

(4) $$p_i\,, \quad {}^iq_j\,, \quad {}^ir_j\,, \quad s_i\,, \quad c_i \quad (i, j = 1, \ldots, n)$$

v soustavě (2) *při omezení* (3) *jsou určeny jednoznačně, tedy jsou invarianty uvažovaného monosystému. Platí pro ně ještě tyto vztahy*

(5) $$\sum_{i=1}^{m} p_i^2 < 1\,; \quad c_i < c_j \Leftrightarrow i < j\,.$$

Obráceně, máme-li invarianty (4) *splňující* (3) *a* (5), *je jimi určen jediný monosystém až na eukleidovské transformace.*

Úplný systém invariantů monosystému dimense 3 v E_5. Nyní přejdeme do prostoru dimense 5; to znamená, že $n = 2$ a jedná se o jednoparametrický systém rovin v E_5. Pro $n = 2$ systém diferenciálních rovnic (2) nabývá tvaru

$$
\begin{aligned}
A' &= p_1\boldsymbol{u}_1 + p_2\boldsymbol{u}_2 + (1 - p_1^2 - p_2^2)^{\frac{1}{2}}\,\boldsymbol{u}_5\,,\\
\boldsymbol{u}_1' &= q\boldsymbol{u}_2 + c_1\boldsymbol{u}_3\,,\\
\boldsymbol{u}_2' &= -\,q\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_4\,,\\
\boldsymbol{u}_3' &= -\,c_1\boldsymbol{u}_1 + s_1\boldsymbol{u}_5\,,\\
\boldsymbol{u}_4' &= -\,c_2\boldsymbol{u}_2 + s_2\boldsymbol{u}_5\,,\\
\boldsymbol{u}_5' &= -\,s_1\boldsymbol{u}_3 + s_2\boldsymbol{u}_4\,.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Invariantní funkce jsou

$$p_1\,,\quad p_2\,,\quad q\,,\quad c_1\,,\quad c_2\,,\quad r\,,\quad s_1\,,\quad s_2 \tag{7}$$

a platí mezi nimi vztahy

$$p_1 > 0\,,\quad p_2 > 0\,,\quad p_1^2 + p_2^2 < 1\,,\quad 0 < c_1 < c_2\,. \tag{8}$$

Vybereme-li libovolný vektor $u(t)$ roviny $\boldsymbol{B}_2(t)$, vyjádříme ho na základě base $\{\boldsymbol{u}_1(t), \boldsymbol{u}_2(t)\}$. Kolmý průmět $\boldsymbol{u}_1'(t)$ do $C_2(t)$ označíme $'\boldsymbol{u}_1'(t)$. Velikost $'\boldsymbol{u}_1'(t)$ je kvadratická forma ve tvaru diagonálním. Z teorie kvadratických forem plyne, že $\boldsymbol{u}_1(t)$ resp. $\boldsymbol{u}_2(t)$ jsou právě ty směry, pro které má kvadratická forma (1) hodnotu minimální resp. maximální pro každé t.

Definice. Basi těchto vlastností $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ prostoru $\boldsymbol{B}_2$ nazveme *extremální.*

Nyní zjistíme, co znamená, že některý kořen charakteristické rovnice kvadratické formy $|'\boldsymbol{u}'(t)|$ je vícenásobný.

Věta 3. *Nechť $\boldsymbol{u}(t)$ je libovolný vektor roviny $\boldsymbol{B}_2(t)$; $'\boldsymbol{u}'(t)$ nechť je průmět derivace $\boldsymbol{u}(t)$ do roviny $C_2(t)$; e_{ij} nechť jsou koeficienty kvadratické formy $|'\boldsymbol{u}'(t)|$ v libovolné pevně zvolené basi $\{\boldsymbol{u}_1(t), \boldsymbol{u}_2(t)\}$; pak rovnice*

$$\begin{vmatrix} e_{11}(t) - \varrho(t), & e_{12}(t) \\ e_{21}(t), & e_{22}(t) - \varrho(t) \end{vmatrix} = 0$$

má jeden dvojnásobný kořen právě tehdy, když

$$('\boldsymbol{u}_1'(t))^2 = ('\boldsymbol{u}_2'(t))^2 \quad \text{a} \quad '\boldsymbol{u}_1'(t)\,.\,'\boldsymbol{u}_2'(t) = 0\,. \tag{9}$$

Platí-li tyto vztahy při volbě jedné base, pak platí pro všechny ortonormální base prostoru $\boldsymbol{B}_2(t)$.

Důkaz. Zde v důkazu jsou míněny hodnoty všech funkcí v bodě t. Pro dvojnásobný kořen je diskriminant $D = (e_{11} - e_{22})^2 - 4e_{12}^2 = 0$; pak ale $e_{11} = e_{22}$; $e_{12} = 0$, takže matice $\boldsymbol{E}$ kvadratické formy se rovná $e_{11}\boldsymbol{I}$ ($\boldsymbol{I}$ je matice jednotková). To znamená, že platí vztahy (9). K libovolné jiné basi přejdeme ortogonální transformací s maticí $\boldsymbol{C}$. Matice $\boldsymbol{E}$ se transformuje takto: $\bar{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{E}\boldsymbol{C} = e_{11}\bar{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{I}\boldsymbol{C} = e_{11}\boldsymbol{I} = \boldsymbol{E}$, kde $\bar{\boldsymbol{C}}$ je transponovaná k matici $\boldsymbol{C}$. Z toho je zřejmé, že jsou splněny oba vztahy i v nové basi.

Uveďme některé geometrické invarianty, vyjádřené funkcemi $p_1, p_2, r, q, c_1, c_2, s_1, s_2$.

Věta 4. *Úhly, které svírá strikční křivka $A(t)$ se směry vektorů $\boldsymbol{u}_1(t)$ a $\boldsymbol{u}_2(t)$ extremální base, nazveme $\alpha_1(t)$ a $\alpha_2(t)$; platí:* $\cos \alpha_1 = p_1$, $\cos \alpha_2 = p_2$.

Důkaz. $A'(t)$, $\boldsymbol{u}_i(t)$ jsou jednotkové a $p_i(t)$ je skalární součin $A'(t) \,.\, \boldsymbol{u}_i(t)$, což je $\cos \sphericalangle A'(t)\, \boldsymbol{u}_i(t)$ $(i = 1, 2)$.

Věta 5. *Nechť h je oblouk strikční křivky, měřený od bodu t_0, orientovaný jako parametr. Nechť $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ mají spojité derivace druhého řádu. Nechť je $\boldsymbol{u}_1(t_0) = \boldsymbol{z}_1(t_0)$; $\boldsymbol{u}_2(t_0) = \boldsymbol{z}_2(t_0)$; $\{\boldsymbol{u}_1(t), \boldsymbol{u}_2(t)\}$ extremální base, $\{\boldsymbol{z}_1(t), \boldsymbol{z}_2(t)\}$ přirozená base, tj. taková ortonormální base, pro kterou platí $\boldsymbol{z}_1'(t)\, \boldsymbol{z}_2(t) = 0$ a $\boldsymbol{z}_1(t)\, \boldsymbol{z}_2'(t) = 0$. Úhel $\sphericalangle \boldsymbol{z}_1(t)\, \boldsymbol{u}_1(t)$ v okolí bodu t_0 měřme orientovaně. Kladným úhlem $\sphericalangle \boldsymbol{z}_1(t)\, \boldsymbol{u}_1(t)$ nazveme takový úhel, že*

$$\operatorname{sign}\,[\boldsymbol{z}_1(t)\, \boldsymbol{z}_2(t)] = \operatorname{sign}\,[\boldsymbol{z}_1(t)\, \boldsymbol{u}_1(t)]\,.$$

(Lomenou závorkou je označen vnější součin v rovině $\boldsymbol{B}_2(t)$.)

Pak limita podílu úhlu $\sphericalangle \boldsymbol{z}_1(t_0 + h)\, \boldsymbol{u}_1(t_0 + h)$ a čísla h je právě hodnota funkce q v bodě t_0, tj. $q(t_0) = \lim\limits_{h \to 0} \alpha(t_0 + h)/h$. Je-li extremální base přirozená, je $q(t) \equiv 0$.

Důkaz. Předpokládáme $\boldsymbol{z}_1(t_0) = \boldsymbol{u}_1(t_0)$, $\boldsymbol{z}_2(t_0) = \boldsymbol{u}_2(t_0)$. V bodě t_0 platí $\boldsymbol{u}_1' = q\boldsymbol{u}_2 + c_1\boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{u}_2' = - q\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_4$, $\boldsymbol{z}_1' = \alpha_1\boldsymbol{u}_3 + \alpha_2\boldsymbol{u}_4$, $\boldsymbol{z}_2' = \alpha_3\boldsymbol{u}_3 + \alpha_4\boldsymbol{u}_4$. Koeficienty $\alpha_i(t_0)$ není nutno počítat $(i = 1, \ldots, 4)$; víme o nich, že jsou v absolutní hodnotě menší než $c_2(t_0)$. Je to proto, že velikost kolmého průmětu $\boldsymbol{v}'(t)$ do $c_2(t)$, kde $\boldsymbol{v}(t)$ je libovolný vektor roviny $\boldsymbol{B}_2(t)$, může nabývat maximálně hodnoty $c_2(t)$; tedy

$$|'\boldsymbol{z}_1'(t)| = (\alpha_1^2(t) + \alpha_2^2(t))^{\frac{1}{2}} \leqq c_2(t)\,,$$
$$|'\boldsymbol{z}_2'(t)| = (\alpha_3^2(t) + \alpha_4^2(t))^{\frac{1}{2}} \leqq c_2(t)\,;$$

z toho plyne omezení pro $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. Taylorovým rozvojem vyjádříme $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ v bodě $(t_0 + h)$. Dostaneme

$$\boldsymbol{u}_1(t_0 + h) = \boldsymbol{u}_1(t_0) + h\, \boldsymbol{u}_1'(t_0) + o(h)$$

a podobné vztahy pro zbývající funkce. Pak můžeme psát:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1(t_0 + h) &= \boldsymbol{u}_1(t_0) + h\ \ q(t_0)\, \boldsymbol{u}_2(t_0) + h\, c_1(t_0)\, \boldsymbol{u}_3(t_0) + o(h)\,,\\
\boldsymbol{u}_2(t_0 + h) &= \boldsymbol{u}_2(t_0) - h\ \ q(t_0)\, \boldsymbol{u}_1(t_0) + h\, c_2(t_0)\, \boldsymbol{u}_4(t_0) + o(h)\,,\\
\boldsymbol{z}_1(t_0 + h) &= \boldsymbol{u}_1(t_0) + h\, \alpha_1(t_0)\, \boldsymbol{u}_3(t_0) + h\, \alpha_2(t_0)\, \boldsymbol{u}_4(t_0) + o(h)\,,\\
\boldsymbol{z}_2(t_0 + h) &= \boldsymbol{u}_2(t_0) + h\, \alpha_3(t_0)\, \boldsymbol{u}_3(t_0) + h\, \alpha_4(t_0)\, \boldsymbol{u}_4(t_0) + o(h)\,.
\end{aligned}$$

Z toho plyne $\cos \sphericalangle \boldsymbol{z}_1(t_0 + h)\, \boldsymbol{u}_2(t_0 + h) = - h\, q(t_0) + o(h)$. Platí, že $\operatorname{sign}\,[\boldsymbol{u}_1(t) \,.\, \boldsymbol{u}_2(t)] = \operatorname{sign}\,[\boldsymbol{z}_1(t)\, \boldsymbol{z}_2(t)]$; to znamená, že $\sphericalangle \boldsymbol{u}_1(t)\, \boldsymbol{u}_2(t) > 0$; $\sphericalangle \boldsymbol{u}_1(t)\, \boldsymbol{u}_2(t) = \frac{1}{2}\pi$, a tedy $\sphericalangle \boldsymbol{z}_1(t)\, \boldsymbol{u}_2(t) = \sphericalangle \boldsymbol{z}_1(t)\, \boldsymbol{u}_1(t) + \sphericalangle \boldsymbol{u}_1(t)\, \boldsymbol{u}_2(t)$. Z toho dále plyne, že

$$\cos \sphericalangle \boldsymbol{z}_1(t)\, \boldsymbol{u}_2(t) = \cos\,(\sphericalangle \boldsymbol{z}_1(t)\, \boldsymbol{u}_1(t) + \pi/2) = -\sin \sphericalangle \boldsymbol{z}_1(t)\, \boldsymbol{u}_1(t)\,.$$

Označíme-li $\sphericalangle\, \boldsymbol{u}_1(t_0 + h)\, \boldsymbol{z}_1(t_0 + h) = \alpha(t_0 + h)$, dostaneme z předcházejícího:

$$\lim_{h\to 0} \alpha(t_0 + h)/h = \lim_{h\to 0} (\alpha(t_0 + h)/\sin \alpha(t_0 + h)) \,.\, \lim_{h\to 0} \sin\, \alpha(t_0 + h)/h =$$
$$= - \lim_{h\to 0} \cos\,(\alpha(t_0 + h) + \tfrac{1}{2}\pi)/h = \lim_{h\to 0} (h\, q(t_0) - o(h))/h = q(t_0)\,.$$

Tím je věta dokázána.

U přímkových ploch je definován distribuční parametr. Je to $\lim_{\Delta l\to 0} (\Delta l/\Delta\varphi)$, kde $\Delta\varphi$ je úhel směrů dvou tvořících přímek, Δl je jejich vzdálenost. Něco podobného zavedeme u monosystému v E_5.

Definice. *Funkci* $\lim_{\Delta t\to 0} (\Delta t/\Delta\varphi)$, *kde* Δt *je oblouk strikční křivky monosystému,* $\Delta\varphi$ *je úhel otočení vektoru extremální base při změně parametru o* Δt, *nazveme relativní distribuční parametr. Monosystém v* $\boldsymbol{E}_5$ *má dva relativní distribuční parametry; označíme je* ${}^1p_0$, ${}^2p_0$.

Poznámka. Δt i $\Delta\varphi$ měříme neorientovaně, takže $\Delta t > 0$, $\Delta\varphi > 0$.

Věta 6. *Nechť* $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ *mají spojité parciální derivace třetího řádu. Relativní distribuční parametry monosystému jsou*

$${}^1p_0 = (q^2 + c_1^2)^{-\frac{1}{2}}\,, \quad {}^2p_0 = (q^2 + c_2^2)^{-\frac{1}{2}}\,.$$

Důkaz. Vyjádříme $\lim_{\Delta t\to 0} (\Delta t/\Delta\varphi)$ v bodě t_0. K tomu zaveďeme Δt a $\Delta\varphi$:

$$t = t_0 + h\,, \quad \Delta t = |h|\,, \quad \Delta\varphi = \sphericalangle\, \boldsymbol{u}_1(t_0 + h)\, \boldsymbol{u}_1(t_0)\,; \quad \Delta\varphi > 0\,.$$

Pomocí Taylorova rozvoje je

$$\boldsymbol{u}_1(t_0 + h) = \boldsymbol{u}_1(t_0) + h\, \boldsymbol{u}_1'(t_0) + \tfrac{1}{2}h^2\, \boldsymbol{u}_1''(t_0) + o(h^2)\,,$$
$$\cos \Delta\varphi = \boldsymbol{u}_1(t_0) \,.\, \boldsymbol{u}_1(t_0 + h) = 1 + \tfrac{1}{2}h^2\, \boldsymbol{u}_1(t_0)\, \boldsymbol{u}_1''(t_0) + o(h^2)\,.$$

Protože platí

$$\boldsymbol{u}_1''(t_0) = q(t_0)\, \boldsymbol{u}_2'(t_0) + c_1(t_0)\, \boldsymbol{u}_3'(t_0) + q'(t_0) + \boldsymbol{u}_2(t_0) + c_1'(t_0)\, \boldsymbol{u}_3(t_0) =$$
$$= - q^2(t_0)\, \boldsymbol{u}_1(t_0) - c_1^2(t_0)\, \boldsymbol{u}_1(t_0) + (.)\,,$$

kde $(.)$ je jistá kombinace vektorů base, je

$$\boldsymbol{u}_1''(t_0)\, \boldsymbol{u}_1(t_0) = - q^2(t_0) - c_1^2(t_0)\,,$$
$$\sin \Delta\varphi = (1 - \cos^2 \Delta\varphi)^{\frac{1}{2}} = (1 - [1 + \tfrac{1}{2}h^2\, \boldsymbol{u}_1(t_0)\, \boldsymbol{u}_1''(t_0) + o(h^2)]^2)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= [1 - 1 - h^2\, \boldsymbol{u}_1'(t_0)\, \boldsymbol{u}_1''(t_0) + o(h^2)]^{\frac{1}{2}} = (h^2[q^2(t_0) + c_1^2(t_0) + o(h^2)])^{\frac{1}{2}} =$$
$$= |h| \,.\, (q^2(t_0) + c_1^2(t_0) + o(1))^{\frac{1}{2}}\,;$$

potom je

$$\lim_{\Delta t\to 0} \Delta\varphi/\Delta t = \lim_{\Delta t\to 0} (\Delta\varphi/\sin \Delta\varphi) \,.\, \lim_{\Delta t\to 0} (\sin \Delta\varphi/\Delta t) =$$
$$= \lim_{\Delta t\to 0} (\sin \Delta\varphi)/\Delta t = \lim_{\Delta t\to 0} (\sin\,(\Delta\varphi)/|h|) = (q^2(t_0) + c_1^2(t_0))^{\frac{1}{2}}\,,$$

a proto

$$\lim_{\Delta t \to 0} \Delta t/\Delta\varphi = \left(q^2(t_0) + c_1^2(t_0)\right)^{-\frac{1}{2}} = {}^1p_0(t_0)\,.$$

Týmž postupem dostáváme ${}^2p_0$, užijeme-li vektoru extremální base $\boldsymbol{u}_2$ místo $\boldsymbol{u}_1$

$${}^2p_0(t_0) = \left(q^2(t_0) + c_2^2(t_0)\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Tím je věta dokázána.

Také můžeme zjistit distribuční parametr plochy, vytvořené křivkou A a vektorem extremální base tvořící roviny. Taková plocha leží v pětirozměrném prostoru. Je možné najít její strikční křivku, najít parametr, aby splýval s obloukem strikční křivky, a na základě toho vyjádřit distribuční parametr.

Uvažujme tedy plochu $[A, \boldsymbol{u}_1]$. Najdeme strikční křivku. Nechť je strikční křivka definována jako množina bodů $C(t)$, pro něž je $C'(t)\,\boldsymbol{u}_1'(t) = 0$,

$$C = A + \beta\boldsymbol{u}_1\,, \quad C' = A' + \beta'\boldsymbol{u}_1 + \beta\boldsymbol{u}_1'\,.$$

Protože

$$A' = p_1\boldsymbol{u}_1 + p_2\boldsymbol{u}_1 + \sqrt{\left(1 - \sum p_1^2\right)}\,\boldsymbol{u}_5\,,$$
$$\boldsymbol{u}_1' = q\boldsymbol{u}_2 + c_1\boldsymbol{u}_3\,,$$
$$C' = (p_1 + \beta')\,\boldsymbol{u}_1 + (p_2 + \beta q)\,\boldsymbol{u}_2 + \beta c_1\boldsymbol{u}_3 + \sqrt{\left(1 - p_1^2 - p_2^2\right)}\,\boldsymbol{u}_5\,,$$

je

$$C'\boldsymbol{u}_1' = q(p_2 + \beta q) + c_1^2\beta = 0$$

a z toho $\beta = -\,q\,p_2(q^2 + c_1^2)^{-1}$, takže

$$C = A - q\,p_2(q^2 + c_1^2)^{-1}\,\boldsymbol{u}_1$$

je strikční křivka přímkové plochy $[A, \boldsymbol{u}_1]$. Splývá se strikční křivkou monosystému, právě když $q \equiv 0$. To však je zřejmé už z definice strikční křivky monosystému.

Analogicky můžeme vyjádřit strikční křivku plochy $[A, \boldsymbol{u}_2]$:

$$D = A + \gamma\boldsymbol{u}_2\,, \quad \text{kde} \quad \gamma = q\,p_1(q^2 + c_2^2)^{-1}\,.$$

Snadno zjistíme, že mezi distribučními parametry ${}^1p$, ${}^2p$ a relativními distribučními parametry platí tyto vztahy:

$${}^1p = {}^1p_0|C'|\left(1 - (p_1 + \beta')^2\right).\left(p_2^2c_1^2 + 1 - p_1^2 - p_2^2\right)^{-\frac{1}{2}},$$
$${}^2p = {}^2p_0|D'|\left(1 - (p_2 + \gamma')^2\right).\left(p_1^2c_2^2 + 1 - p_1^2 - p_2^2\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Definice. *Mějme jednotkový vektor* $\boldsymbol{u}$, *závislý na* t. *Zvolme v prostoru libovolný pevný bod* B. *Potom množina bodů* $B + \boldsymbol{u}(t)$ *je křivka, kterou nazveme sférický obraz vektoru* $\boldsymbol{u}$.

Věta 7. *Křivost sférického obrazu vektoru* $\boldsymbol{u}_1$ *je*

$$k_1 = \{1 + (q^2 + c_1^2)^{-2}[(q'c_1 - qc_1')^2 . (q^2 + c_1^2)^{-1} + (c_2q + c_1r)^2 + s_1^2c_1^2]\}^{\frac{1}{2}}$$

a vektoru $\boldsymbol{u}_2$

$$k_2 = \{1 + (q^2 + c_2^2)^{-2}[(q'c_2 - qc_2')^2\,(q^2 + c_2^2)^{-1} + (c_1q + c_2r)^2 + s_2^2c_2^2]\}^{\frac{1}{2}}.$$

Důkaz. Sférický obraz vektoru $\boldsymbol{u}_1$ označíme ${}^1K$ a sférický obraz $\boldsymbol{u}_2$ označíme ${}^2K$. $\boldsymbol{B}$ je pevný bod v prostoru. Platí

$$ {}^1K = B + \boldsymbol{u}_1 \,, \quad {}^1K' = q\boldsymbol{u}_2 + c_1\boldsymbol{u}_3 \,, $$

$$ {}^1K'' = q[- q\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_4] + c_1[- c_1\boldsymbol{u}_1 + r\boldsymbol{u}_4 + s_1\boldsymbol{u}_5] + q'\boldsymbol{u}_2 + c_1'\boldsymbol{u}_3 \,. $$

Zavedeme parametr s tak, aby $|\mathrm{d}^1K/\mathrm{d}s| = 1$. Derivace podle tohoto parametru budeme značit tečkou. Potom

$$ 1 = |{}^1K^{\cdot}| = \left|\frac{\mathrm{d}^1K}{\mathrm{d}t}\right| \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} \,, $$

a proto

$$ \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = t^{\cdot} = (q^2 + c_1^2)^{-\frac{1}{2}} \,, \quad {}^1K^{\cdot\cdot} = {}^1K''\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^2 + {}^1K'\left(\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}s^2}\right), $$

přičemž je

$$ \frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}s^2} = -(qq' + c_1'c_1) \,.\, (q^2 + c_1^2)^{-2} $$

a tedy

$$ {}^1K^{\cdot\cdot} = [\boldsymbol{u}_1(- q^2 - c_1^2) + \boldsymbol{u}_2q' + \boldsymbol{u}_3c_1' + \boldsymbol{u}_4(c_2q + c_1r) + s_1c_1\boldsymbol{u}_5] \,. $$
$$.\, (q^2 + c_1^2)^{-1} + [\boldsymbol{u}_2q + \boldsymbol{u}_3c_1](- q'q - c_1'c_1)(q^2 + c_1^2)^{-2} \,, $$

$$ {}^1K^{\cdot\cdot} = -\frac{q^2 + c_1^2}{q^2 + c_1^2}\boldsymbol{u}_1 + \frac{q'(q^2 + c_1^2) - q(q'q + c_1'c_1)}{(q^2 + c_1^2)^2}\boldsymbol{u}_2 + \frac{c_2q + c_1r}{q^2 + c_1^2}\boldsymbol{u}_4 + $$
$$ + \frac{c_1'(q^2 + c_1^2) - c_1(q'q - c_1'c_1)}{(q^2 + c_1^2)^2}\boldsymbol{u}_3 + \frac{s_1c_1}{q^2 + c_1^2}\boldsymbol{u}_5 \,, $$

$$ |{}^1K^{\cdot\cdot}| = \left\{1 + \frac{1}{(q^2 + c_1^2)^2}\left[\frac{(q^2 + c_1^2)(q'c_1 - qc_1')^2}{(q^2 + c_1^2)^2} + (c_2q + c_1r)^2 + s_1c_1^2\right]\right\}^{\frac{1}{2}}. $$

Z toho je již zřejmé, že je to výraz uvedený ve větě 7. Stejným postupem se ověří výraz pro k_2.

Na začátku byl definován pro každé t prostor $A_4(t) \equiv [A(t), \boldsymbol{u}_1(t), \boldsymbol{u}_2(t), \boldsymbol{u}_1'(t), \boldsymbol{u}_2'(t)]$. Jeho poloha je dána bodem $A(t)$ a jeho směr je totálně kolmý k $\boldsymbol{u}_5(t)$.

Věta 8. *Platí*

$$ \lim \sphericalangle A_4(t + h)\, A_4(t) = \boldsymbol{u}_5'(t) \,; \quad |\boldsymbol{u}_5'(t)| = (s_1^2(t) + s_2^2(t))^{\frac{1}{2}} = v(t) \,. $$

Tedy $v(t)$ je mírou toho, jak se mění směr $A_4(t)$ v závislosti na t.

Důkaz je analogický jako ve větě 6.

Věta 9. *Výše uvažovanými invariantními funkcemi*

(10) $$ p_1 \,, \quad p_2 \,, \quad q \,, \quad {}^1p_0 \,, \quad {}^2p_0 \,, \quad k_1 \,, \quad k_2 \,, \quad v $$

je monosystém určen nejvýše osmiznačně.

Důkaz. Stačí, když z těchto invariantů (10) vypočítáme funkce (7). Pak každým systémem funkcí (7) je už monosystém jednoznačně určen. Funkce (7) jsou p_1, p_2, q, r, c_1, c_2, s_1, s_2, z toho p_1, p_2, q jsou tytéž invarianty jako v systému (10). Z invariantů ${}^1p_0$, ${}^2p_0$ dosazením q lze vypočítat c_1, c_2. Protože je $c_1, c_2 > 0$, jsou tyto funkce dány jednoznačně. Z k_1, k_2, v lze vypočítat r tímto postupem:

$$(k_1^2 - 1)\frac{(c_2^2 + q^2)^2}{c_1^2} - \frac{1}{c_1^2}\frac{(-qc_1' + q'c_1)^2}{q^2 + c_1^2} +$$

$$+ (k_2^2 - 1)\frac{(c_2^2 + q^2)^2}{c_2^2} - \frac{1}{c_2^2}\frac{(qc_2' - q'c_2)^2}{q^2 + c_2^2} - v^2 = \frac{(c_2q + c_1r)^2}{c_1^2} + \frac{(c_1q + c_2r)^2}{c_2^2}.$$

Z této kvadratické rovnice lze vypočítat r. To jde pokud $D \gtreqq 0$ a pak je r obecně dvojznačné.

Dosazením r do výrazu pro k_1 dostáváme rovnici, ze které lze vyjádřit s_1^2. Použitím výrazu pro k_2 vyjádříme s_2^2. Není dáno znamení s_1 a s_2. Jsou celkem čtyři možnosti, jak je lze volit. Protože pro každý případ je ještě r dvojznačné, je celý systém funkcí (7) dán osmiznačně, a tedy funkcím (10) je monosystém přiřazen nejvýš osmiznačně až na eukleidovské transformace.

Poznámka. Libovolně zvolené funkce (10) monosystém neurčují, musí splňovat jisté podmínky. Ty podmínky jsou složité a nemají žádný názorný význam; proto je neuvádím.

Zvláštní případ 1. Mějme opět nerozvinutelnou varietu v prostoru E_5, tvořenou rovinami $[A(t), \boldsymbol{u}_1(t), \boldsymbol{u}_2(t)]$. Při vytváření soustavy (6) a funkcí (7) se předpokládalo $p_i > 0$ $(i = 1, 2)$.

Věta 10. *Je-li při volbě extremální base monosystému dimense 3 v E_5 v soustavě (6) $p_i \equiv 0$ $(i = 1$ nebo $2)$, pak není systém funkcí (7) jednoznačný, pokud jednoznačnost neurčíme jinak.*

Důkaz. Na základě směru kolmého průmětu A' do $\boldsymbol{B}_2$ byl definován smysl $\boldsymbol{u}_1$ a $\boldsymbol{u}_2$, a to předpokladem $p_1 > 0$, $p_2 > 0$.

Je-li $p_1 \equiv 0$, $p_2 \not\equiv 0$, pak $\boldsymbol{u}_1$ lze volit dvojím způsobem, takže q může nabývat dvou různých hodnot; s_1 je určeno tím, který smysl $\boldsymbol{u}_1$ se vybral, to znamená, s jakým q se počítá. Tedy monosystému odpovídají dvě soustavy funkcí (7). A když se omezíme na případy, kde lze volit $q > 0$, pak jsou funkce (7) určeny jednoznačně.

Pro $p_2 \equiv 0$, $p_1 \not\equiv 0$ to jde zcela analogicky.

Je-li $p_1 \equiv 0$ i $p_2 \equiv 0$, pak monosystému odpovídají čtyři systémy funkcí (7). Soustava funkcí (7) záleží na volbě smyslu $\boldsymbol{u}_1$ i $\boldsymbol{u}_2$, což jsou čtyři možnosti, a každé z nich odpovídá jedna soustava funkcí (7). Zde je možno zaručit jednoznačnost, volíme-li orientaci tak, aby $q > 0$, $s_1 > 0$, omezíme-li se na ty případy, kde obojí může platit.

Věta 11. *Mějme opět monosystém $[A, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2]$. Nechť v soustavě funkcí (7) tohoto monosystému je $p_1 \equiv 0$ nebo $p_2 \equiv 0$. Pak jsou příslušné invarianty (10) určeny* *dvojznačně. Obráceně, soustava invariantů* (10) *monosystému, v níž $p_1 \equiv p_2$, určují nejvýš osm monosystémů, které nelze ztotožnit eukleidovskými transformacemi.*

Důkaz. Je-li jen $p_1(t) \equiv 0$ nebo jen $p_2(t) \equiv 0$, pak je tvrzení zřejmě správné podle věty (10). Když $p_1 \equiv 0$ i $p_2 \equiv 0$, pak monosystému odpovídají čtyři systémy funkcí (7). Každé dva, které mají stejné q se liší jen znaménkem s_1 a s_2; ale tyto funkce jsou v invariantech (10) ve druhé mocnině, takže jejich znamení na soustavu (10) nemá vliv. Záleží tedy jen na znamení q. Tím je věta dokázána.

Zvláštní případ 2. Nechť $\boldsymbol{B}_2(t) \equiv [A(t), \boldsymbol{u}_1(t), \boldsymbol{u}_2(t)]$ je tvořící prostor monosystému, k němu totálně kolmý v $\boldsymbol{A}_4(t)$ je $\boldsymbol{C}_2(t)$; $\{\boldsymbol{u}_1(t), \boldsymbol{u}_2(t)\}$ je extremální base. Kolmé průměty $\boldsymbol{u}_1'(t)$, $\boldsymbol{u}_2'(t)$ do $\boldsymbol{C}_2(t)$ označíme $'\boldsymbol{u}_1'(t)$, $'\boldsymbol{u}_2'(t)$.

Ve větě 2 je vyloučen případ, že některý kořen charakteristické rovnice matice $\mathbf{E}$ je vícenásobný. U monosystému v $\boldsymbol{E}_5$ to znamená, že platí vztahy (9) (podle věty 3).

Věta 12. *Monosystém $[A, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2]$, kde platí vztahy* (9) *pro každé t z definičního oboru monosystému, můžeme pomocí soustavy* (6) *přiřadit tyto funkce:*

$$c_1\,,\quad r - q\,,\quad p_1\,,\quad p_2\,,\quad s_1\,,\quad s_2\,, \tag{11}$$

nebo kteroukoliv jinou soustavu funkcí

$$c_1\,,\quad r - q\,,\quad 'p_1\,,\quad 'p_2\,,\quad 's_1\,,\quad 's_2\,, \tag{12}$$

pro kterou platí

$$\begin{aligned}
&('s_1s_1 + 's_2s_2)/(s_1^2 + s_2^2) = ('p_1p_1 + 'p_2p_2)/(p_1^2 + p_2^2)\,,\\
&('s_1s_2 - s_1's_2)/(s_1^2 + s_2^2) = ('p_1p_2 + p_1'p_2)/(p_1^2 + p_2^2)\,.
\end{aligned} \tag{13}$$

Obráceně, splňují-li funkce (11) *vztahy* (8), *až na to, že je $c_1 = c_2$, určují pomocí* (6) *jednoznačně monosystém — až na eukleidovské transformace. Tento monosystém je též určen libovolnými funkcemi* (12), *splňujícími* (8), *pokud mezi* (11) *a* (12) *platí vztahy* (13).

Důkaz. Zatím budeme vše uvažovat pro jednu pevnou hodnotu parametru.

Mějme libovolný vektor $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{B}_2$. Velikost $'\boldsymbol{u}'$ je kvadratická forma. Při jakékoliv volbě ortonormální base prostoru $\boldsymbol{B}_2$ je tato forma v diagonálním tvaru; to znamená, že je to součet čtverců souřadnic vektoru $\boldsymbol{u}$, násobených stejným koeficientem. (To plyne z věty 10.) Hledáme takovou basi, kde $'\boldsymbol{u}_1' \perp {}'\boldsymbol{u}_2'$. Z předešlého plyne, že tuto vlastnost mají všechny ortonormální base prostoru $\boldsymbol{B}_2$, a proto soustava (6) není jednoznačně určena. Vezměme jednu z nich:

$$\begin{aligned}
A' &= \quad p_1\boldsymbol{u}_1 + p_2\boldsymbol{u}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_1' &= \qquad\qquad q\boldsymbol{u}_2 + c_1\boldsymbol{u}_3\,,\\
\boldsymbol{u}_2' &= - q\boldsymbol{u}_1 \qquad\qquad + c_2\boldsymbol{u}_4\,,\\
\boldsymbol{u}_3' &= - c_1\boldsymbol{u}_1 \qquad\qquad + r\boldsymbol{u}_4 + s_1\boldsymbol{u}_5\,,\\
\boldsymbol{u}' &= \qquad - c_2\boldsymbol{u}_2 - r\boldsymbol{u}_3 \qquad + s_2\boldsymbol{u}_5\,,\\
\boldsymbol{u}' &= \qquad\qquad - s_1\boldsymbol{u}_3 - s_2\boldsymbol{u}_4\,;
\end{aligned}$$

při tom je $c_1 = c_2$.

Vezměme jinou basi B_2, vzniklou otočením původní base o úhel α:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 \cos \alpha + \mathbf{u}_2 \sin \alpha\,, \quad \mathbf{v}_2 = - \mathbf{u}_1 \sin \alpha + \mathbf{u}_2 \cos \alpha\,.$$

V této basi vyjádříme derivace $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$, pak vektory $\mathbf{v}_3$ a $\mathbf{v}_4$ a celý systém invariantních funkcí

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1' &= \mathbf{u}_1' \cos \alpha + \mathbf{u}_2' \sin \alpha - \mathbf{u}_1\alpha' \sin \alpha + \mathbf{u}_2\alpha' \cos \alpha = \\
&= c_1\mathbf{u}_3 \cos \alpha + q\mathbf{u}_2 \cos \alpha + c_2\mathbf{u}_4 \sin \alpha - q\mathbf{u}_1 \sin \alpha + \alpha'(- \mathbf{u}_1 \sin \alpha + \mathbf{u}_2 \cos \alpha)\,, \\
\mathbf{v}_2' &= \mathbf{u}_1' \sin \alpha + \mathbf{u}_2' \cos \alpha - \mathbf{u}_1\alpha' \sin \alpha - \mathbf{u}_2\alpha' \cos \alpha = \\
&= c_1\mathbf{u}_3 \sin \alpha - q\mathbf{u}_2 \sin \alpha + c_2\mathbf{u}_4 \cos \alpha - q\mathbf{u}_1 \cos \alpha - \alpha'\mathbf{v}_1\,.
\end{aligned}$$

Volíme

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 \cos \alpha + \mathbf{u}_4 \sin \alpha\,, \quad \mathbf{v}_4 = - \mathbf{u}_3 \sin \alpha + \mathbf{u}_4 \cos \alpha$$

a pak je

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_3' &= \mathbf{u}_3\alpha' \sin \alpha + \mathbf{u}_4\alpha' \cos \alpha + \mathbf{u}_3' \cos \alpha + \mathbf{u}_4' \sin \alpha = \\
&= \alpha'\mathbf{v}_4 - c_1\mathbf{u}_1 \cos \alpha + r\mathbf{u}_4 \cos \alpha + s_1\mathbf{u}_5 \cos \alpha - \\
&- c_2\mathbf{u}_2 \sin \alpha - r\mathbf{u}_3 \sin \alpha + s_2\mathbf{u}_5 \sin \alpha = \\
&= \alpha'\mathbf{v}_4 - c_1\mathbf{v}_1 + r\mathbf{v}_4 + (s_1 \cos \alpha + s_2 \sin \alpha)\,\mathbf{u}_5\,.
\end{aligned}$$

Stejným postupem dostaneme

$$\mathbf{v}_4' = \alpha'\mathbf{v}_3 - c_2\mathbf{v}_2 - r\mathbf{v}_3 + (- s_1 \sin \alpha + s_2 \cos \alpha)\,\mathbf{u}_5\,.$$

Derivace A v uvažovaném bodě je

$$A' = p_1\mathbf{u}_1 + p_2\mathbf{u}_2 = (p_1 \cos \alpha + p_2 \sin \alpha)\,\mathbf{v}_1 + (- p_1 \sin \alpha + p_2 \cos \alpha)\,\mathbf{v}_2\,.$$

Volíme

$$\begin{aligned}
'p_1 &= p_1 \cos \alpha + p_2 \sin \alpha\,, \quad 'p_2 = - p_1 \sin \alpha + p_2 \cos \alpha\,; \\
's_1 &= s_1 \cos \alpha + s_2 \sin \alpha\,, \quad 's_2 = - s_1 \sin \alpha + s_2 \cos \alpha\,.
\end{aligned}$$

Zavedeme-li takto $'p_1$, $'p_2$, $'s_1$, $'s_2$, pak platí

$$\begin{aligned}
('s_1s_1 + 's_2s_2)/(s_1^2 + s_2^2) &= ('p_1p_1 + 'p_2p_2)/(p_1^2 + p_2^2) = \cos \alpha\,, \\
('s_1s_2 - s_1's_2)/(s_1^2 + s_2^2) &= ('p_1p_2 - p_1'p_2)/(p_1^2 + p_2^2) = \sin \alpha\,.
\end{aligned}$$

Při tom je $\mathbf{u}_5 = \mathbf{v}_5$ a snadno se přesvědčíme, že $\mathbf{v}_5' = - s_1\mathbf{u}_3 - s_2\mathbf{u}_4 = - 's_1\mathbf{v}_3 - 's_2\mathbf{v}_4$. Předpokládáme-li $c_1 = c_2$, plyne z předešlého:

$$\begin{aligned}
A' &= 'p_1\mathbf{v}_1 + p_2\mathbf{v}_2\,, \\
\mathbf{v}_1' &= (\alpha' + q)\,\mathbf{v}_2 + c_1\mathbf{v}_3\,, \\
\mathbf{v}_2' &= - (\alpha' + q)\,\mathbf{v}_1 + c_1\mathbf{v}_4\,, \\
\mathbf{v}_3' &= - c_1\mathbf{v}_1 + (\alpha' + r)\,\mathbf{v}_4 + 's_1\mathbf{v}_5\,, \\
\mathbf{v}_4' &= - c_1\mathbf{v}_2 - (\alpha' + r)\,\mathbf{v}_3 + 's_2\mathbf{v}_5\,, \\
\mathbf{v}_5' &= - 's_1\mathbf{v}_3 - 's_2\mathbf{v}_4\,.
\end{aligned}$$

Funkce p_1, p_2, s_1, s_2 závisí v jednom bodě jen na poloze $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ právě v tomto bodě, nezávisí na tom, jak se v okolí bodu base mění. q a r nezávisí přímo na poloze $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, závisí jen na změnách směrů vektorů base. Při tom platí, že rozdíl $q - r$ je pro monosystém charakteristický a nezávisí ani na volbě base $\boldsymbol{B}_2$, ani na tom, jak se tato base mění v okolí uvažovaného bodu. c_1 a c_2 jsou zřejmě zcela nezávislé na volbě base $\boldsymbol{B}_2$.

Věta 13. *Monosystém $[A, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2]$ nechť vyhovuje v definičním oboru podmínce (9). Vybereme funkce (7), náležející tomuto monosystému tak, aby $p_1 \equiv p_2$. Pak je soustava funkcí (7) dána jednoznačně až na pořadí s_1 a s_2. Obráceně, každým systémem funkcí (7) splňujících (8), kde $c_1 \equiv c_2$, $p_1 \equiv p_2$, je pomocí diferenciálních rovnic (6) monosystém jednoznačně určen (až na eukleidovské transformace).*

Důkaz. Sestrojíme funkce (11) pro libovolnou basi a pomocí vztahů (13) přejdeme k takové, kde $p_1 \equiv p_2$. To znamená, že jsou $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ dány až na pořadí podél celého monosystému; tím jsou dány funkce s_1, s_2 – jejich pořadí zase neznáme – a funkce q a r.

Věta 14. *Nechť $[A, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2]$ je monosystém, kde pro každé t z uvažovaného intervalu platí (12). Takovému monosystému odpovídá více různých soustav funkcí (11). Vybereme tu soustavu, kde $p_1 \equiv p_2$. Taková soustava existuje právě jedna až na pořadí k_1 a k_2.*

Obráceně, soustava (10) invariantů monosystému, v níž $p_1 \equiv p_2$, určuje nejvýš osm monosystémů, které nelze v sebe převést eukleidovskými transformacemi.

Důkaz plyne z předcházející věty.

Literatura

[1] *E. Čech*: Nová metoda projektivní geometrie zborcených ploch. Časopis pro pěstování matematiky a fyziky, *53*, 1924, 31–37.

[2] *J. Favard*: Cours de géometrie différentielle locale. Paris 1957.

[3] *M. Jůza*: Ligne de striction sur une généralisation à plusieurs dimensions d'une surface réglée. Чех. мат. журнал, *12 (87)*, 1962, 243–250.

[4] *M. Jůza*: Le système complet d'invariants d'un monosystème à trois dimensions dans l'espace euklidien à cinq dimensions. Чех. мат. журнал, *12 (87)*, 1962, 401–403.

Резюме

ЕВКЛИДОВЫ ИНВАРИАНТЫ МОНОСИСТЕМ

АННА ЮЗОВА (Anna Jůzová), Прага

Пусть в евклидовом пространстве E_n дан объект, образованный однопараметрической системой евклидовых пространств $E_k(t)$, $1 \leqq k \leqq n - 2$. Назовем этот объект моносистемой размерности $k + 1$, пространства $E_k(t)$ – образующими пространствами моносистемы. Пусть каждое образующее пространство

определяется точкой $A(t)$ а линейно независимыми векторами $\boldsymbol{u}_1(t), \ldots, \boldsymbol{u}_k(t)$. Рассмотрим теперь моносистему размерности $k + 1$ в пространстве $\boldsymbol{E}_{2k+1}$. Базисы $A(t)$, $\boldsymbol{u}_1(t), \ldots, \boldsymbol{u}_n(t)$ образующих пространств можно, вообще говоря, выбрать так, чтобы они удовлетворяли системе (2). Для этой моносистемы можно найти инварианты, данные коэффициентами системы (2); ими моносистема определяется однозначно. В $\boldsymbol{E}_5$, т. е. для $k = 2$ — это система дифференциальных уравнений (6) и инварианты (7). Если искать их геометрический смысл, то мы получим инварианты (10), которые определяют моносистему не более чем восьмизначно. Далее можно найти инварианты для некоторых случаев, не содержащихся в общем случае.

Résumé

LES INVARIANTS EUCLIDIENS DE MONOSYSTÈMES

ANNA JŮZOVÁ, Praha

Dans l'espace euclidien $\boldsymbol{E}_n$ soit donné un objet géométrique formé d'un système à un paramètre d'espaces euclidiens $\boldsymbol{E}_k(t)$, $1 \leqq k \leqq n - 2$. Nous l'appellerons monosystème à $k + 1$ dimensions; les espaces $\boldsymbol{E}_k(t)$ seront appelés espaces générateurs du monosystème. Chaque espace générateur soit donné par un point $A(t)$ et k vecteurs $\boldsymbol{u}_1(t), \ldots, \boldsymbol{u}_k(t)$, linéairement indépendents. Considérons maintenant un monosystème à $k + 1$ dimensions dans l'espace $\boldsymbol{E}_{2k+1}$. Les bases $A(t)$, $\boldsymbol{u}_1(t), \ldots, \boldsymbol{u}_k(t)$ des espaces générateurs peuvent, en général, être choisies de façon à vérifier le système (2). On peut trouver les invariants de ce monosystème; ils sont donnés par les coefficients du système (2) et déterminent le monosystème univoquement. Dans $\boldsymbol{E}_5$, c'est-à-dire pour $k = 2$, c'est le système d'équations différentielles (6) avec les invariants (7). En cherchant leur signification géométrique, nous arrivons aux invariants (10) qui déterminent le monosystème, mais en laissant huit choix possibles. On peut trouver des invariants aussi pour quelques cas particuliers que le cas général n'enferme pas.