Jaroslav Štěpán
Dvě věty o pěti mimoběžkách

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 95 (1970), No. 4, 348--355

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108333`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 95 (1970), Praha

DVĚ VĚTY O PĚTI MIMOBĚŽKÁCH

JAROSLAV ŠTĚPÁN, Karlovy Vary

(Došlo dne 18. listopadu 1968)

Nechť je dáno pět mimoběžek v obecné poloze (tj. žádné tři mimoběžky nejsou rovnoběžné s jednou rovinou) o kterých dále platí, že je možno sestrojit dvě a jen dvě reálné různé příčky k libovolným čtyřem (a jen k těmto čtyřem) z daných pěti mimoběžek. O těchto mimoběžkách platí dvě zajímavé věty, mající také fyzikální smysl.

a) První věta o pěti mimoběžkách. Obě příčky téže čtveřice mimoběžek jsou navzájem mimoběžné, je proto možno sestrojit jejich osu. Poněvadž je možno utvořit pět různých kombinací, obsahujících vždy čtyři z daných pěti mimoběžek, obdržíme pět os, příslušných těmto pěti čtveřicím mimoběžek, o kterých platí věta:

Všech pět os, příslušných k pěti různým čtveřicím mimoběžek, utvořených z daných pěti mimoběžek, je rovnoběžných s jednou rovinou (tzv. komplanárou pěti mimoběžek).

Důkaz. Označme dané mimoběžky písmeny a, b, c, d, e, utvořme všechny možné kombinace, obsahující vždy čtyři mimoběžky, ke každé kombinaci připišme obě příčky a označme velkými písmeny jejich osy. Obdržíme tyto kombinace:

I. a, b, c, d, e', e'', E,

II. a, b, c, e, d', d'', D,

III. a, b, d, e, c', c'', C,

IV. a, c, d, e, b', b'', B,

V. b, c, d, e, a', a'', A.

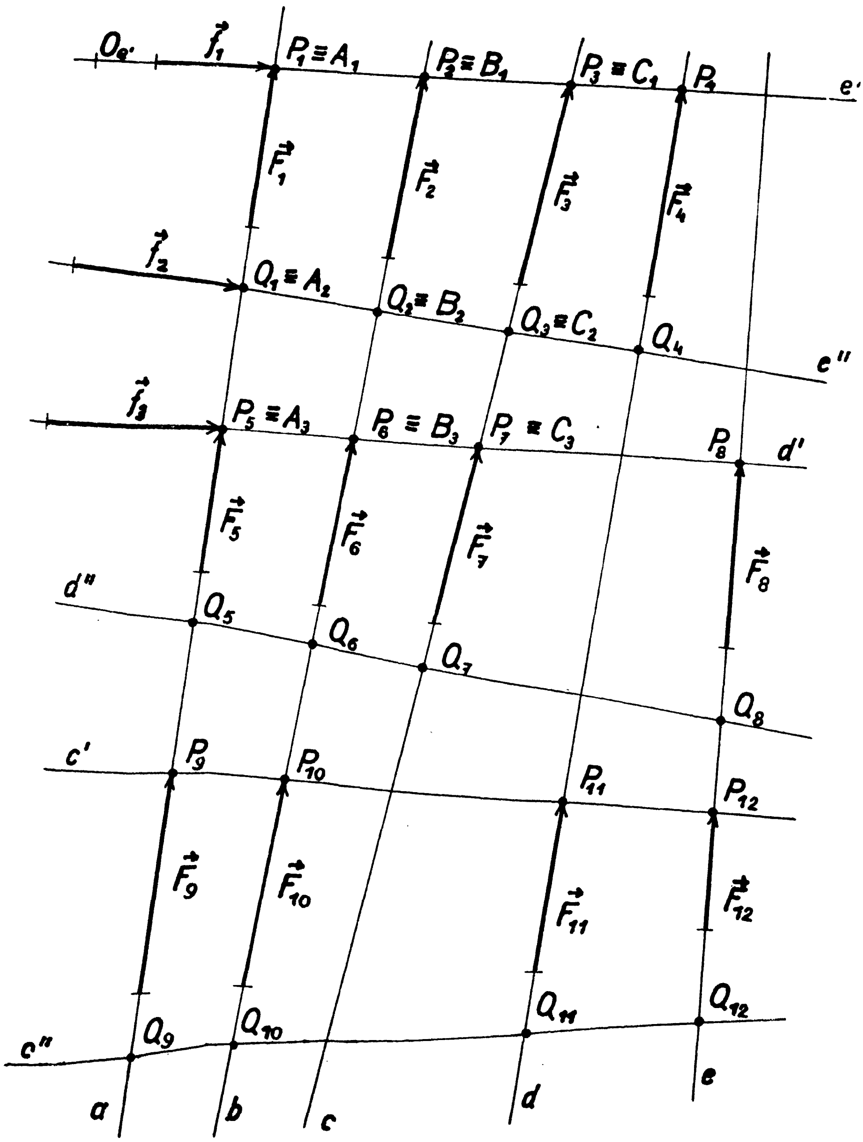
K důkazu věty použijeme nejprve prvních tří kombinací. Na obr. 1 jsou znázorněny dané mimoběžky a, b, c, d, e, příčky $e', e'', d', d'', c', c''$, a body, ve kterých protínají příčky mimoběžky.

Představme si, že dané mimoběžky jsou pevně spojeny s absolutně tuhým tělesem T

a že v bodech P_1 až P_{12} působí na těleso T podél daných mimoběžek síly $\mathbf{F}_1$ až $\mathbf{F}_{12}$ (z nichž žádná není nulovým vektorem), o kterých nechť platí vektorové rovnice:

(1) $$\text{a)}\ \sum_{n=1}^{4} \mathbf{F}_n = \mathbf{0}\,, \quad \text{b)}\ \sum_{n=5}^{8} \mathbf{F}_n = \mathbf{0}\,, \quad \text{c)}\ \sum_{n=9}^{12} \mathbf{F}_n = \mathbf{0}\,,$$

(2) $$\text{a)}\ \mathbf{F}_4 + \mathbf{F}_{11} = \mathbf{0}\,, \quad \text{b)}\ \mathbf{F}_8 + \mathbf{F}_{12} = \mathbf{0}\,.$$



Obr. 1.

Je-li jeden z vektorů $\boldsymbol{F}_1$ až $\boldsymbol{F}_{12}$ nulový, pak z rovnic (1) a (2) ihned plyne z předpokladů o mimoběžkách a, b, c, d, e, že jsou všechny tyto vektory nulové. Vyloučíme-li tento případ splnění uvedených rovnic, pak všechny vektory $\boldsymbol{F}_1$ až $\boldsymbol{F}_{12}$ jsou nenulové. Tuto okolnost lze prokázat přímo, když zvolíme nenulový jeden z nich, např. $\boldsymbol{F}_{12}$.

Sečteme-li rovnice (1) a seskupíme vhodně jednotlivé sčítance s přihlédnutím k rovnicím (2), obdržíme:

$$(\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_5 + \boldsymbol{F}_9) + (\boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_6 + \boldsymbol{F}_{10}) + (\boldsymbol{F}_3 + \boldsymbol{F}_7) = \boldsymbol{0}\,.$$

Této vektorové rovnici lze vyhovět pouze za předpokladu, že

$$(\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_5 + \boldsymbol{F}_9)\,, \quad (\boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_6 + \boldsymbol{F}_{10}) \quad \text{a} \quad (\boldsymbol{F}_3 + \boldsymbol{F}_7)$$

jsou nulové vektory, neboť mimoběžky a, b, c, jsou nekomplanární. Obdržíme tedy:

$$\text{(3)} \qquad \text{a)}\ \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_5 + \boldsymbol{F}_9 = \boldsymbol{O}\,, \quad \text{b)}\ \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_6 + \boldsymbol{F}_{10} = \boldsymbol{O}\,, \quad \text{c)}\ \boldsymbol{F}_3 + \boldsymbol{F}_7 = \boldsymbol{O}\,.$$

Vzhledem k rovnicím (2) a (3) je absolutně tuhé těleso T v rovnováze. Odtud také plyne, že celkový moment sil $\boldsymbol{F}_1$ až $\boldsymbol{F}_{12}$ vzhledem k libovolnému bodu O prostoru je nulový vektor, což je možno vyjádřit vektorovou rovnicí:

$$\text{(4)} \qquad \boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2 + \boldsymbol{M}_3 = \boldsymbol{O}\,,$$

kde

$$\text{(5)} \qquad \text{a)}\ \boldsymbol{M}_1 = \sum_{n=1}^{4} \boldsymbol{P}_n \times \boldsymbol{F}_n\,, \quad \text{b)}\ \boldsymbol{M}_2 = \sum_{n=5}^{8} \boldsymbol{P}_n \times \boldsymbol{F}_n\,, \quad \text{c)}\ \boldsymbol{M}_3 = \sum_{n=9}^{12} \boldsymbol{P}_n \times \boldsymbol{F}_n\,.$$

Vektory $\boldsymbol{P}_n$ značí tu geometrické vektory, jejichž počáteční bod je libovolně zvolený bod O prostoru a koncový bod je příslušný bod P_n.

Nyní dokážeme, že vektor $\boldsymbol{M}_1$ je nenulový a rovnoběžný s osou E.

Představme si na okamžik, že na absolutně tuhé těleso T působí pouze síly $\boldsymbol{F}_1$ až $\boldsymbol{F}_4$, o kterých platí vektorová rovnice (1a). Kdyby vektor $\boldsymbol{M}_1$ byl nulový, pak by absolutně tuhé těleso T bylo v rovnováze. To však není možné, protože kdyby těleso T bylo otáčivé kolem osy d', vyvíjela by síla $\boldsymbol{F}_4$ na těleso T kroutící moment. Tedy vektor $\boldsymbol{M}_1$ je nenulový. Totéž možno dokázat stejnou úvahou i o vektorech $\boldsymbol{M}_2$ a $\boldsymbol{M}_3$.

Vektory $\boldsymbol{M}_1$, $\boldsymbol{M}_2$ a $\boldsymbol{M}_3$ v rovnicích (4) *a* (5) *jsou nenulové.*

Dokažme dále, že vektor $\boldsymbol{M}_1$ je kolmý na příčku e'. Zvolme proto libovolný bod prostoru na příčce e' a označme jej $O_{e'}$. Pak možno rovnici (5a) napsat ve tvaru

$$\boldsymbol{M}_1 = \sum_{n=1}^{4} \boldsymbol{P}'_n \times \boldsymbol{F}_n$$

kde vektory $\boldsymbol{P}'_n$ jsou opět geometrické vektory, jejichž počáteční bod je bod $O_{e'}$ na příčce e' a koncový bod je opět příslušný bod P_n.

Podíváme-li se na pravou stranu právě napsané vektorové rovnice vidíme, že každý vektor $\boldsymbol{P}'_n \times \boldsymbol{F}_n$ je kolmý na příčku e' a tedy i vektor $\boldsymbol{M}_1$ je kolmý na příčku e'. Stejnou úvahou dokážeme, že vektor $\boldsymbol{M}_1$ je kolmý na příčku e'' a tedy rovnoběžný s osou E. Podobnou úvahou můžeme dokázat, že vektor $\boldsymbol{M}_2$ je rovnoběžný s osou D a že vektor $\boldsymbol{M}_3$ je rovnoběžný s osou C.

Protože vektory $\boldsymbol{M}_1$, $\boldsymbol{M}_2$ a $\boldsymbol{M}_3$ jsou komplanární – viz rovnici (4), – jsou komplanární také osy E, D, C. Podobnými úvahami je možno dokázat, že i osy B a A jsou komplanární s osami E a D.

Tím je první věta o pěti mimoběžkách dokázána.

Poznámka. Na základě daných předpokladů lze dokázat, že žádné dvě osy (A, B, C, D, E) nejsou spolu rovnoběžné. Předpokládejme proto, že naše osy E a D jsou spolu rovnoběžné. Pak musí být komplanární příčky e', e'', d' a d''. Představme si na okamžik, že na absolutně tuhé těleso T působí podél příček e', e'' a d' síly $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$ a $\boldsymbol{f}_3$ (obr. 1), o nichž nechť platí vektorová rovnice:

$$\boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{0}\,.$$

Právě napsané vektorové rovnici lze vyhovět nenulovými vektory, poněvadž příčky e', e'' a d' jsou komplanární. Avšak těleso T není v rovnováze, protože síly $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$ a $\boldsymbol{f}_3$ neleží v jedné rovině a neprotínají se v jednom bodě. Proto moment sil $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$ a $\boldsymbol{f}_3$ vzhledem k libovolnému bodu prostoru je nenulový vektor, který označme $\boldsymbol{m}$. Platí vektorové rovnice:

$$\text{a)}\ \boldsymbol{m} = \sum_{n=1}^{3} \boldsymbol{A}_n \times \boldsymbol{f}_n\,, \quad \text{b)}\ \boldsymbol{m} = \sum_{n=1}^{3} \boldsymbol{B}_n \times \boldsymbol{f}_n\,, \quad \text{c)}\ \boldsymbol{m} = \sum_{n=1}^{3} \boldsymbol{C}_n \times \boldsymbol{f}_n$$

kde $\boldsymbol{A}_n(\boldsymbol{B}_n, \boldsymbol{C}_n)$ jsou geometrické vektory, mající počátek v bodě $Q_5(Q_6, Q_7)$ a konec v příslušném bodě $A_n(B_n, C_n)$.

Z právě napsaných vektorových rovnic plyne, že nenulový vektor $\boldsymbol{m}$ je kolmý k mimoběžkám a, b, c, což však není možné, protože mimoběžky a, b, c, podle předpokladu jsou nekomplanární. Proto předpoklad, že osy E a D jsou rovnoběžné, vede ke sporu. Podobnou úvahou je možno dokázat, že žádné dvě osy nejsou spolu rovnoběžné.

b) Druhá věta o pěti mimoběžkách. Proložme třemi z daných pěti mimoběžek (o kterých platí shora uvedené předpoklady) zborcený hyperboloid a nechť tyto tři mimoběžky patří k prvnímu regulu zborceného hyperboloidu. Zbývající dvě mimoběžky protnou zborcený hyperboloid vždy ve dvou reálných různých bodech, ve kterých sestrojme povrchové přímky, patřící k druhému regulu zborceného hyperboloidu. Obdržíme tak dva páry povrchových přímek druhého regulu a sice první pár vytvořený čtvrtou mimoběžkou a druhý pár vytvořený pátou mimoběžkou. Sestrojme bikomplanáru, tj. přímku komplanární jak s prvním, tak i s druhým párem povrchových přímek druhého regulu. Poněvadž existuje deset různých kombinací tří a dvou mimoběžek z daných pěti mimoběžek, existuje také deset bikomplanár, příslušných ke každé kombinaci. O těchto bikomplanárách platí věta:

Všech deset bikomplanár, příslušných k deseti různým kombinacím ze tří a dvou mimoběžek, utvořených z daných pěti mimoběžek, je kolmých k jedné rovině (tzv. komplanáře pěti mimoběžek).

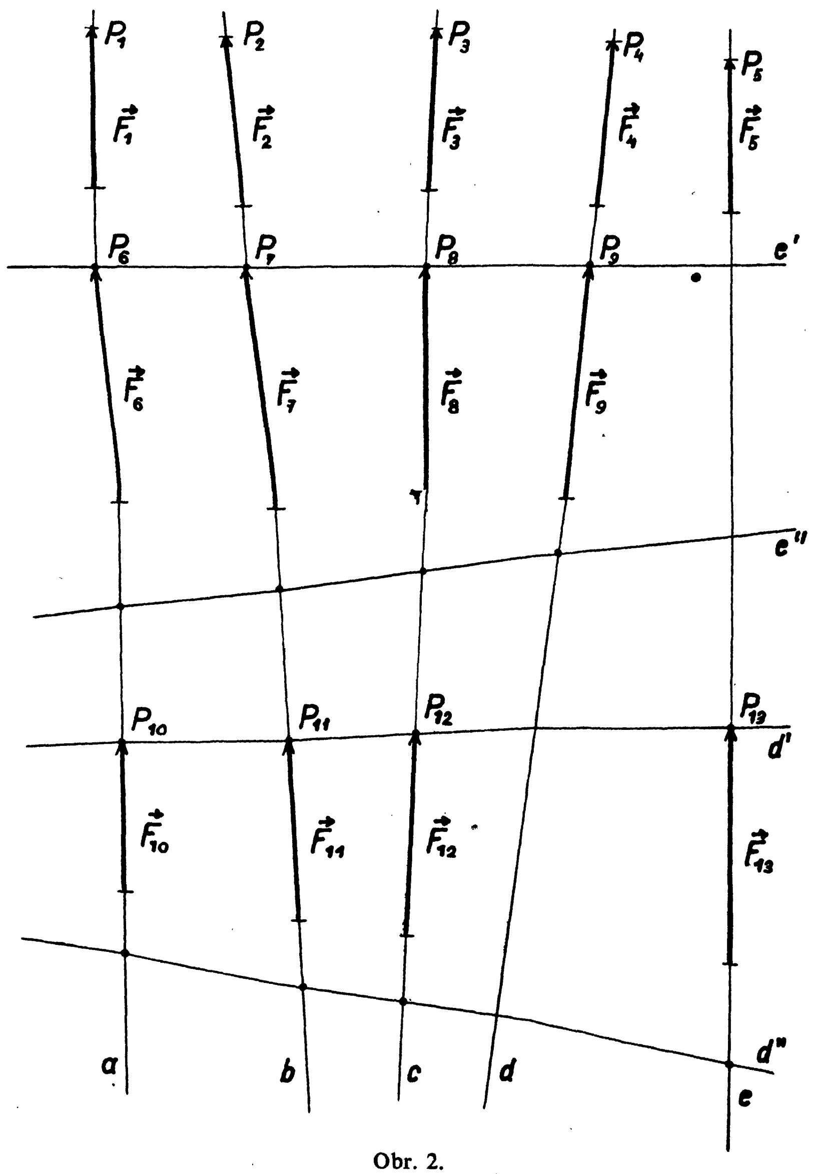
Důkaz. Je dáno pět mimoběžek a, b, c, d, e, o kterých platí naše předpoklady. Ke každé kombinaci připišme do závorek oba páry povrchových přímek druhého regulu a písmeny b s příslušnými indexy označme příslušnou bikomplanáru. Obdržíme tak těchto deset kombinací:

I. $a, b, c, \; d, e, \; (e', e'', \; d', d'',) \, b_1$
II. $a, b, d, \; c, e, \; (e', e'', \; c', c'',) \, b_2$
III. $a, c, d, \; b, e, \; (e', e'', \; b', b'',) \, b_3$
IV. $b, c, d, \; a, e, \; (e', e'', \; a', a'',) \, b_4$
V. $a, b, e, \; c, d, \; (d', d'', \; c', c'',) \, b_5$
VI. $a, c, e, \; b, d, \; (d', d'', \; b', b'',) \, b_6$
VII. $b, c, e, \; a, d, \; (d', d'', \; a', a'',) \, b_7$
VIII. $a, d, e, \; b, c, \; (c', c'', \; b', b'',) \, b_8$
IX. $b, d, e, \; a, c, \; (c', c'', \; a', a'',) \, b_9$
X. $c, d, e, \; a, b, \; (b', b'', \; a', a'',) \, b_{10}$

Proveďme nejprve důkaz druhé věty pro první kombinaci. Proložme mimoběžkami a, b, c, zborcený hyperboloid H_1. Mimoběžka d nechť jej protne v bodech D_1' a D_1'' a mimoběžka e v bodech E_1' a E_1''. Mimoběžky a, b, c, nechť patří k prvnímu regulu zborceného hyperboloidu H_1. Sestrojme v bodech D_1' a D_1'' povrchové přímky druhého regulu zborceného hyperboloidu H_1 a označme je d_1' a d_1''. Vidíme ihned, že povrchové přímky d_1' a d_1'', protínající mimoběžky a, b, c, d, jsou v podstatě příčky e' a e'', neboť podle předpokladu mají mimoběžky a, b, c, d, dvě a jen dvě příčky, které jsme označili e' a e''. Podobně povrchové přímky druhého regulu zborceného hyperboloidu H_1, sestrojené v bodech E_1' a E_1'' jsou opět příčky d' a d''. Odtud je také zřejmé, že zbývající mimoběžky protínající zborcený hyperboloid H, sestrojený ze tří daných mimoběžek vždy ve *dvou různých a reálných* bodech, jak již bylo uvedeno bez důkazu v úvodu tohoto článku, protože podle předpokladu lze sestrojit ke čtyřem z daných pěti mimoběžek a, b, c, d, e vždy *dvě* (a jen dvě) *reálné* příčky, které se protnou s každou mimoběžkou vždy ve *dvou různých reálných* bodech. Také je zřejmé, že osa E, kolmá na příčky e' a e'', je kolmá na každou přímku, komplanární s příčkami e' a e'' a tedy i na bikomplanáru b_1. Z téhož důvodu je osa D kolmá na bikomplanáru b_1. *Je tedy bikomplanára b_1, kolmá na osy E a D, kolmá* *na komplanáru pěti mimoběžek.* Stejný důkaz je možno provést i pro kteroukoliv jinou kombinaci.

Tím je druhá věta o pěti mimoběžkách dokázána.

Fyzikální význam komplanáry pěti mimoběžek. Nechť je dáno pět mimoběžek a, b, c, d, e, o kterých nechť platí naše předpoklady a které spojme pevně s absolutně



Obr. 2.

tuhým tělesem T. Podél těchto mimoběžek nechť působí na absolutně tuhé těleso T vesměs nenulové síly $\boldsymbol{F}_1$ až $\boldsymbol{F}_5$, o kterých nechť platí vektorová rovnice:

$$\sum_{n=1}^{5} \boldsymbol{F}_n = \boldsymbol{O} .$$

Je možno dokázat, že síly $\boldsymbol{F}_1$ až $\boldsymbol{F}_5$ nejsou v rovnováze, ale že vyvíjejí na absolutně tuhé těleso T kroutící moment a že momentová rovina, ve které leží dvojice sil, schopná kompenzovat kroutící moment sil $\boldsymbol{F}_1$ až $\boldsymbol{F}_5$, je kolmá ke komplanáře pěti mimoběžek.

Předpokládejme nejprve, že na absolutně tuhé těleso T působí síly $\boldsymbol{F}_1$ až $\boldsymbol{F}_{13}$, jak naznačeno na obr. 2, o kterých nechť platí vektorové rovnice:

$$(6) \qquad \text{a)} \sum_{n=1}^{5} \boldsymbol{F}_n = \boldsymbol{O}, \quad b) \sum_{n=6}^{9} \boldsymbol{F}_n = \boldsymbol{O}, \quad \text{c)} \sum_{n=10}^{13} \boldsymbol{F}_n = \boldsymbol{O},$$

$$\text{d)}\ \boldsymbol{F}_4 + \boldsymbol{F}_9 = \boldsymbol{O}, \quad e)\ \boldsymbol{F}_5 + \boldsymbol{F}_{13} = \boldsymbol{O} .$$

Postupem, užitým při důkazu první věty o pěti mimoběžkách lze dokázat, že vektorovým rovnicím (6) lze vyhovět vesměs nenulovými vektory.

Sečteme-li první tři právě napsané vektorové rovnice, přihlédneme-li k dalším dvěma rovnicím a seskupíme-li vhodně jednotlivé sčítance, obdržíme:

$$(\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_6 + \boldsymbol{F}_{10}) + (\boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_7 + \boldsymbol{F}_{11}) + (\boldsymbol{F}_3 + \boldsymbol{F}_8 + \boldsymbol{F}_{12}) = \boldsymbol{O} .$$

Vzhledem k tomu, že mimoběžky a, b, c nejsou komplanární, lze právě napsaným vektorovým rovnicím vyhovět jen tak, že platí:

$$(7) \qquad \text{a)}\ \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_6 + \boldsymbol{F}_{10} = \boldsymbol{O}, \quad \text{b)}\ \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_7 + \boldsymbol{F}_{11} = \boldsymbol{O},$$

$$\text{c)}\ \boldsymbol{F}_3 + \boldsymbol{F}_8 + \boldsymbol{F}_{12} = \boldsymbol{O} .$$

Vzhledem k rovnicím (7), (6d) a (6e), je absolutně tuhé těleso T vlivem sil $\boldsymbol{F}_1$ až $\boldsymbol{F}_{13}$ v rovnováze, takže platí vektorová rovnice:

$$\boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}_e + \boldsymbol{M}_d = 0$$

kde

$$\text{a)}\ \boldsymbol{M} = \sum_{n=1}^{5} \boldsymbol{P}_n \times \boldsymbol{F}_n, \quad \text{b)}\ \boldsymbol{M}_e = \sum_{n=6}^{9} \boldsymbol{P}_n \times \boldsymbol{F}_n, \quad \text{c)}\ \boldsymbol{M}_d = \sum_{n=10}^{13} \boldsymbol{P}_n \times \boldsymbol{F}_n .$$

$\boldsymbol{P}_n$ jsou tu opět geometrické vektory, jejichž počáteční bod je libovolný bod O prostoru a koncové body jsou příslušné body P_n.

O vektorech $\boldsymbol{M}_e$ a $\boldsymbol{M}_d$ je nám již známo, že jsou nenulové, nekolineární a rovnoběžné s komplanárou pěti mimoběžek – viz vektory $\boldsymbol{M}_1$ a $\boldsymbol{M}_2$ v rovnicích (4) a (5). Proto také vektor $\boldsymbol{M}$ je nenulový a je rovnoběžný s komplanárou pěti mimoběžek.

Tím je dokázáno, že síly $\mathbf{F}_1$ až $\mathbf{F}_5$ vyvíjejí na absolutně tuhé těleso T kroutící moment ($\mathbf{M}$ je nenulový vektor) a že momentová rovina je kolmá ke komplanáře pěti mimoběžek (momentová rovina je kolmá na vektor $\mathbf{M}$).

Adresa autora: Karlovy Vary, Na vyhlídce č. 57.

Zusammenfassung

ZWEI SÄTZE ÜBER FÜNF WINDSCHIEFE GERADEN

JAROSLAV ŠTĚPÁN, Karlovy Vary

Es seien fünf windschiefe Geraden in allgemeiner Lage gegeben (d. h. keine drei von diesen Geraden verlaufen parallel zu einer Ebene), sodass man genau zwei verschiedene reelle Schrägen zu beliebigen vier und nur zu diesen vier von den fünf gegebenen windschiefen Geraden konstruieren kann. Es gelten nun folgende zwei Sätze:

Satz 1. *Alle fünf Achsen, die den fünf verschiedenen Quadrupeln von windschiefen Geraden entsprechen, die man aus den fünf windschiefen Geraden bilden kann, sind zu einer Ebene (die man die Komplanarebene der fünf windschiefen Geraden nennt) parallel.*

Satz 2. *Alle zehn Bikomplargeraden, die den zehn verschiedenen Kombinationen von zwei und drei der insgesamt fünf windschiefen Geraden entsprechen, stehen zu einer Ebene (der Komplanarebene der fünf windschiefen Geraden) senkrecht.*

Die Beweise beruhen auf Überlegungen aus der Mechanik. Es ist auch die physikalische Deutung der Sätze angeführt.