Časopis pro pěstování matematiky

Tibor Katriňák

M-Polaren in halbgeordneten Mengen

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 95 (1970), No. 4, 416--419

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108328`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 95 (1970), Praha

M-POLAREN IN HALBGEORDNETEN MENGEN

TIBOR KATRIŇÁK, Bratislava[1])

(Eingegangen am 8. April 1969)

Das Ziel dieser Bemerkung ist zu zeigen, daß der Hauptsatz der Arbeit [3, Theorem 5] ganz allgemein auch für die halbgeordneten Mengen gilt.

1. VORBEREITENDE BEMERKUNGEN

Eine Teilmenge J (auch leere) einer halbgeordneten Menge T heißt ein *Anfang*, wenn aus $x \leqq y$ und $y \in J$ immer $x \in J$ folgt. $A(T)$ bezeichne die Gesamtheit aller Anfänge von T, die bezüglich der mengentheoretischen Inklusion halbgeordnet sind. Offenbar ist die leere Menge $\emptyset$ das kleinste und T das größte Element von $A(T)$.

Die mengentheoretische Vereinigung und der mengentheoretische Durschnitt von Anfängen sind immer Anfänge. Deswegen gilt

1.1. *Die halbgeordnete Menge $A(T)$ der Anfänge einer halbgeordneten Menge T bildet einen vollständigen und distributiven Verband, wobei für $\{J_i;\ i \in J\} \subseteq A(T)$*

$$\bigvee(J_i;\ i \in I) = \bigcup(J_i;\ i \in I) \tag{1}$$

und

$$\bigwedge(J_i;\ i \in I) = \bigcap(J_i;\ i \in I)\ ^2) \tag{2}$$

gilt.

Ein Verband L heißt $\bigvee$-*vollständig*, falls zu jeder nicht leeren Teilmenge von L die

[1]) Der Verfasser hat die Arbeit als Stipendiat der Alexander von Humboldt-Stiftung am Mathematischen Institut der Universität Bonn geschrieben.

[2]) „$\bigcup$" bzw. „$\bigcap$" bezeichnet die mengentheoretische Vereinigung bzw. den mengentheoretischen Durchschnitt. Dagegen bezeichnet „$\bigvee$" bzw. „$\bigwedge$" die kleinste obere bzw. die größte untere Schranke in der gegebenen Halbordnung. Für zwei Anfänge J_1, J_2 schreibt man anstatt $\bigvee(J_i; i = 1, 2)$ einfacher $J_1 \cup J_2$. Analoge Bezeichnung auch für die andere Operation.

kleinste obere Schranke in L existiert. Ein $\bigvee$-vollständiger Verband L heißt *unendlich $\bigvee$-distributiv*, wenn für jedes $x \in L$ und beliebige $\{x_i;\ i \in I\} \subseteq L$

$$(3) \qquad x \cap \bigvee(x_i;\ i \in I) = \bigvee(x \cap x_i;\ i \in I)$$

gilt.

Da die mengentheoretischen Operationen in $A(T)$ mit den Verbandsoperationen übereinstimmen, gilt noch

1.2. *Der Verband $A(T)$ der Anfänge einer halbgeordneten Mengen T ist unendlich* $\bigvee$-distributiv.

Nach 1.2 und [1, V, Theorem 24] bekommt man

1.3. *Der Verband $A(T)$ einer halbgeordneten Menge T ist brouwersch.*

Bezeichne $A_0(T)$ die Gesamtheit aller nicht leeren Anfänge einer halbgeordneten Menge T. Es ist klar, daß $A_0(T)$ genau dann ein Teilverband von $A(T)$ ist, wenn T nach unten gerichtet ist. In diesem Falle kann man für $A_0(T)$ analoge Behauptungen aussagen, wie z. B.

1.4. *Sei T eine nach unten gerichtete halbgeordnete Menge. Dann ist $A_0(T)$ ein $\bigvee$-vollständiger und Brouwerscher Verband.*

1.5. *In einem Brouwerschen Verband L gilt für beliebige $x,\ a \in L$ $x_*a = (x \cup a)_*a$.*

Beweis. Die Ungleichung $(x \cup a)_*a \leqq x_*a$ ist leicht einzusehen. L ist distributiv (siehe [1, II, Theorem 18]). Demnach folgt aus $x \cap y \leqq a$ $(x \cup a) \cap y = (x \cap y) \cup \cup (a \cap y) \leqq a$. Daher bekommt man $x_*a \leqq (x \cup a)_*a$. Somit ist die Behauptung bewiesen.

1.6. *Sei L ein Brouwerscher Verband und $a \in L$. Dann ist der Teilverband $[a, 1]$ (1 ist das größte Element in L) pseudokomplementär und zu $x \in [a, 1]$ läßt sich das Pseudokomplement in $[a, 1]$ in der Gestalt x_*a darstellen.*

Beweis. Offenbar ist $x_*a \geqq a$. Seien $x, c \in [a, 1]$. Es gelte $x \cap c = a$. Der Annahme nach muß $c \leqq x_*a$ sein. Wegen $x_*a \geqq a$ gilt dann $x \cap x_*a = a$. Also ist x_*a das Pseudokomplement zu x in $[a, 1]$.

1.7. *Sei T eine halbgeordnete Menge und $J \in A(T)$. Dann bildet die Gesamtheit $\{X_*J;\ X \in A(T)\}$ [3], die bezüglich der mengentheoretischen Inklusion halbgeordnet ist, eine vollständige Boolesche Algebra.*

Beweis. Angenommen, daß J ein Anfang einer halbgeordneten Menge T ist. Nach 1.1 und 1.3 ist der Verband $A(T)$ ein vollständiger Brouwerscher Verband. Nach 1.5

---

[3]) X_*J bedeutet das Relativpseudokomplement in $A(T)$.

genügt es, unsere Behauptung für $X \in [J, T]$ zu beweisen. Nach 1.6 ist $[J, T]$ ein pseudokomplementärer Verband, wobei $X^+ = X_* J$ das Pseudokomplement zu $X \in [J, T]$ darstellt. Es ist bekannt, daß ein Element x eines pseudokomplementären Verbandes genau dann ein abgeschlossenes Element, d. h. $x = x^{**}$, ist, wenn es ein Element z gibt, so daß x in der Form $x = z^*$ darstellbar ist. Wegen dieser Tatsache bildet in unserem Fall die Gesamtheit $\{X_* J; X \in [J, T]\}$ die Menge aller abgeschlossenen Elemente des Verbandes $[J, T]$. Nach dem Satz von GLIVENKO [1, V, Theorem 26] bildet die Gesamtheit $\{X_* J;\ X \in [J, T]\}$ bezüglich der mengentheoretischen Inklusion eine vollständige Boolesche Algebra, was zu beweisen war.

Ganz analog bekommt man

1.8. *Sei T eine nach unten gerichtete halbgeordnete Menge und $J \in A_0(T)$. Dann bildet die Gesamtheit $\{X_* J;\ X \in A_0(T)\}$, die bezüglich der mengentheoretischen Inklusion halbgeordnet ist, eine vollständige Boolesche Algebra.*

2. M-POLAREN

In einer halbgeordneten Menge T bezeichne $(M]$ für $M \subseteq T$ den kleinsten Anfang von $A(T)$, der M enthält. Offensichtlich gilt $(M] \leqq \{x \in T;$ es gibt ein $y \in M$ derart, daß $x \leqq y$ ist$\}$.

Für eine beliebige Teilmenge $S \subseteq T$, wobei T eine halbgeordnete Menge ist, und einen Anfang $M \in A(T)$ bezeichne

$$p_0(S, M) = \{x \in T;\ (x] \cap (s] \subseteq M \text{ für beliebige } s \in S\}\,. \tag{4}$$

Nach [3] hängt $p_0(S, M)$ in einem Verband eng zusammen mit dem Begriff „M-Polare von S", der für die Verbandsgruppen in [2] eingeführt wurde. Deswegen nennen wir auch $p_0(S, M)$ eine M-Polare von S in T.

2.1. *Sei T eine halbgeordnete (nach unten gerichtete) Menge, $M \in A(T)$ ($M \in A_0(T)$) und $S \subseteq T$. Dann ist $p_0(S, M) \in A(T)$ ($p_0(S, M) \in A_0(T)$) und $p_0(S, M) = p_0((S], M)$.*

Beweis. Sei T eine halbgeordnete Menge, $S \subseteq T$ und $M \in A(T)$. Angenommen, daß $y \leqq x$ und $x \in p_0(S, M)$ ist. Aus $(x] \cap (s] \subseteq M$ ergibt sich $(y] \cap (s] \subseteq M$ für alle $s \in S$ und folglich auch $y \in p_0(S, M)$. Also ist $p_0(S, M) \in A(T)$. Wegen $S \subseteq (S]$ gilt $p_0(S, M) \supseteq p_0((S], M)$. Wenn $x \in p_0(S, M)$ ist, gilt $(x] \cap (s] \subseteq M$ für alle $s \in S$. Demnach muß auch $(x] \cap (t] \subseteq M$ für alle $t \leqq s$, wo s ein Element von S ist, gelten. Dies liefert uns $x \in p_0((S], M)$. Damit haben wir $p_0(S, M) = p_0((S], M)$ gezeigt. Für die nach unten gerichtete Menge T verläuft der Beweis ganz analog.

Aus 2.1 sieht man, daß man die weiteren Betrachtungen auf $S \in A(T)$ beschränken kann.

2.2. *Sei T eine halbgeordnete (nach unten gerichtete) Menge und $S, M \in A(T)$ $(S, M \in A_0(T))$. Dann gilt*

$$p_0(S, M) = S_* M$$

in $A(T)$ $(A_0(T))$.

Beweis. Angenommen, daß T eine halbgeordnete Menge und $S, M \in A(T)$ ist. Nach 1.3 ist $A(T)$ brouwersch. Offensichtlich gilt für die Anfänge X, Y in $A(T)$

$$X \cap Y = \{t \in T;\ \text{existieren } x \in X \text{ und } y \in Y, \text{ so daß } t \in (x] \cap (y]\}\ .$$

Demnach bekommt man $S \cap p_0(S, M) \subseteq M$. Also $p_0(S, M) \subseteq S_* M$. Darüber hinaus gilt auch $S \cap S_* M \subseteq M$. Infolgedessen ist $(s] \cap (x] \subseteq M$ für beliebige $s \in S$ und $x \in S_* M$, was nach (4) $x \in p_0(S, M)$ impliziert. Also $S_* M = p_0(S, M)$, was zu beweisen war. Für die nach unten gerichteten Mengen geht man analog vor.

Aus 2.1, 2.2 und 1.7 (1.8) folgt

2.3. Satz. *Sei T eine halbgeordnete (nach unten gerichtete) Menge, $M \in A(T)$ $(M \in A_0(T))$ und $S \subseteq T$. Dann bildet die Gesamtheit aller M-Polaren $p_0(S, M)$, die bezüglich der mengentheoretischen Inklusion halbgeordnet ist, eine vollständige Boolesche Algebra.*

Aus 2.3 ergibt sich

2.4. *Sei L ein Verband und M ein Ideal in L. Dann bildet die Gesamtheit aller M-Polaren in L eine vollständige Boolesche Algebra.*

Wenn in 2.4 M ein „regulares" Ideal im Sinne von [3] ist, dann besagt 2.4 nichts Anderes als den Hauptsatz [3, Theorem 5].

2.5. Bemerkung. In (4) haben wir $M \in A(T)$ gefordet. Die Bedingung (4) kann man auch so verändern, daß M eine beliebige Teilmenge einer halbgeordneten Menge T sein könnte. Es reicht $p_0(S, M) := p_0(S, (M])$ zu setzen. Nun können wir auch in einer zu T dualen Menge $p^0(S, M) := p^0(S, [M))$ setzen, wobei $[M)$ ein dualer Anfang in T ist und $p^0(S, [M))$ dual zu (4) definiert ist. Ferner setzen wir noch $p(S, M) := := p_0(S, M) \cap p^0(S, M)$ in T. Man kann zeigen, daß der Satz 2.3 auch für so definierte „M-Polaren" gültig bleibt.

Literatur

[1] *Birkhoff G.:* Lattice theory, Amer. Math. Soc. Colloquium Pulications, vol. 25, third edition. 1967.

[2] *Byrd R. D.:* M-polars in lattice ordered groups, Czechosl. Math. J. *18 (93)* (1968), 230—239.

[3] *Jakubík J.:* M-polars in lattices, Časop. Pěst. Mat. (Im Druck).

Anschrift des Verfassers: Bratislava, Šmeralova 2/b (Prírodovedecká fakulta University Komenského).