Časopis pro pěstování matematiky

Vlastimil Pták

Poznámka k uzavřeným zobrazením

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 95 (1970), No. 4, 402--410

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108327`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 95 (1970), Praha

POZNÁMKA K UZAVŘENÝM ZOBRAZENÍM

VLASTIMIL PTÁK, Praha

(Došlo 20. ledna 1969)

Mezi nejcennější i nejzajímavější prostředky funkcionální analysy patří bezesporu — jak pro svůj dosah tak i pro matematickou eleganci — Banachova věta o otevřeném zobrazení i její varianta o uzavřeném grafu. Jak upozornil nedávno autor [2], obě tyto věty jsou speciálními případy obecnější věty „o uzavřené relaci" a není mezi nimi podstatného rozdílu, i když předpoklady nabývají zdánlivě odlišných forem. Ať tedy použijeme Banachovy věty v té či oné formě, značná část práce k ověření předpokladů spočívá v důkazu uzavřenosti daného zobrazení.

Úkolem předložené poznámky jest upozorniti na jednu metodu ověření uzavřenosti zobrazení, která i v případech dosti složitých umožňuje vésti důkaz uzavřenosti velmi jednoduchým a ve své abstraktní formě průzračným způsobem. K ilustraci této metody volíme větu o porovnání metod sčítatelnosti řad, jeden z klasických příkladů použití věty o otevřeném zobrazení, obsažený již v knize Banachově a dlouhá léta uváděný ve vysokoškolském kursu funkcionální analysy na Karlově universitě.

Předložená poznámka je rozdělena do dvou odstavců. První odstavec rekapituluje známé definice a výsledky z teorie sčítatelnosti, související s větou o spojité závislosti řešení nekonečného systému lineárních rovnic na pravé straně. Tato věta je vyslovena bez důkazu; její důkaz provedeme později jako příklad aplikace abstraktní věty, která je obsahem druhého odstavce. Všechny definice i výsledky prvního odstavce jsou známé a jsou uvedeny jen pro úplnost. Druhý odstavec obsahuje abstraktní větu o podmínkách, za kterých některá přirozeným způsobem definovaná zobrazení jsou uzavřená. Jako příklad aplikace této abstraktní věty je uveden důkaz shora uvedené věty.

1. NEKONEČNÉ SYSTÉMY LINEÁRNÍCH ROVNIC A METODY SČÍTATELNOSTI

Vyslovíme nejprve hlavní větu o spojité závislosti řešení nekonečného systému lineárních rovnic na pravé straně. Množinu všech přirozených čísel značíme N.

(1.1) Věta. *Nechť Q je úplný normovaný lineární prostor jehož prvky jsou posloup-*

nosti reálných čísel $y = \{y_i;\ i \in N\}$. *Nechť pro všechna* $i \in N$ *souřadnice* y_i *jsou spojitými lineárními funkcionály na prostoru* Q.

Buď dále A *matice reálných čísel* $A = \{a_{ik};\ i, k \in N\}$ *taková, že pro každé* $y \in Q$ *existuje právě jedna posloupnost reálných čísel* $x = \{x_k;\ k \in N\}$ *tak, že*

1° *řada* $\sum_{k \in N} a_{ik} x_k$ *konverguje pro každé* i,

2° *pro každé* i *jest* $\sum_{k \in N} a_{ik} x_k = y_i$.

Položíme-li $x_k = f_k(y)$, *potom pro každé* k *jest* f_k *spojitý lineární funkcionál na prostoru* Q.

Tato věta je jistě zajímavá sama o sobě; uveďme však jednu její aplikaci na metody sčítatelnosti. Připomeňme nejprve některé definice.

(1,2) *Budiž dána nekonečná matice reálných čísel* $A = \{a_{ik};\ i, k \in N\}$. *Řekneme, že posloupnost reálných čísel* $x = \{x_k;\ k \in N\}$ *je limitovatelná metodou* A *k číslu* y, *jestliže*

1° *pro každé* $i \in N$ *konverguje řada* $\sum_{k \in N} a_{ik} x_k$,

2° *označíme-li* y_i *součet řady* $\sum_{k \in N} a_{ik} x_k$, *pak platí* $\lim_{i \in N} y_i = y$.

Jistě je zřejmé, co míníme slovy „posloupnost x je limitovatelná metodou A“.

Zavedeme nejprve některá označení. Označíme především X lineární prostor všech posloupností reálných čísel $x = \{x_i;\ i \in N\}$. Na prostoru X zavedeme lineární formy q_i, $i \in N$, jejichž hodnoty jsou souřadnice prvků x, takže $q_i(x) = x$. Označíme E podprostor oněch $x \in X$, pro které existuje vlastní $\lim_{n \in N} x_n$. Tuto limitu označíme $L(x)$. Je-li dána matice A, označíme $W(A)$ množinu všech posloupností $x \in X$ limitovatelných metodou A. Zřejmě $W(A)$ je lineární podprostor prostoru X. Je-li A daná matice, jejíž prvky jsou a_{ik} a je-li $x \in W(A)$, označíme $M_A^{(i)}(x)$ součet řady $\sum_{k \in N} a_{ik} x_k$ a označíme $M_A(x)$ posloupnost, jejíž souřadnice jsou $M_A^{(i)}(x)$. Jest tedy M_A lineární transformací prostoru $W(A)$ do prostoru E. Výrok „posloupnost $x \in X$ je limitovatelná metodou A k číslu y“ znamená tedy totéž jako $x \in W(A)$ a $L(M_A(x)) = y$.

(1,3) *Buďtež dány dvě nekonečné matice* $A = \{a_{ik};\ i, k \in N\}$ *a* $B = \{b_{ik};\ i, k \in N\}$. *Řekneme, že metoda* B *je silnější než metoda* A, *jestliže* $W(A) \subset W(B)$.

Všimněme si, že v předešlé definici nežádáme, aby metoda B limitovala každou posloupnost, limitovatelnou metodou A, kde stejnému číslu. Uvidíme však, že tomu tak skutečně jest pro dosti širokou třídu metod sčítatelnosti. K vymezení této třídy budeme potřebovati některé další pojmy.

Dá se očekávati, že bude rozumné omeziti se na takové metody, pro které posloupnosti konvergentní v obvyklém smyslu budou také limitovatelné k jejich limitě.

To vede k následující definici

(1,4) *Metodu příslušnou matici A nazveme permanentní, jestliže $E \subset W(A)$ a platí $L(M_A(x)) = L(x)$ pro každé $x \in E$.*

Matice, pro které příslušná metoda je permanentní, lze snadno charakterisovat.

(1,5) *Nechť $A = \{a_{ik};\ i, k \in N\}$ je nekonečná matice. Potom metoda jí příslušná je permanentní právě když jsou splněny následující tři podmínky.*

1° $\sup\limits_i \sum\limits_k |a_{ik}| < \infty$,

2° $\lim\limits_i \sum\limits_k a_{ik} = 1$,

3° $\lim\limits_i a_{ik} = 0$ pro každé $k \in N$.

Důkaz. Označme e posloupnost, jejíž všechny souřadnice jsou rovny jedné. Pro každé $n \in N$ označme e_n posloupnost, jejíž všecky souřadnice až na n-tou jsou rovny nule, při čemž n-tá je rovna jedné. Zřejmě podmínka 2° je ekvivalentní požadavku $e \in W(A)$ a $L(M_A e) = 1$. Podmínka 3° zřejmě znamená, že pro každé přirozené n jest $e_n \in W(A)$ a $L(M_A e_n) = 0$. Abychom mohli důkaz dokončit, zavedeme do prostoru E obvyklou normu $|x| = \sup\limits_{i \in N} |x_i|$. Prostor E, opatřený touto normou, je úplný normovaný lineární prostor, který budeme značit (E, u). Nechť nejprve jsou splněny podmínky naší věty.

Označme především $\beta = \sup\limits_i \sum\limits_k |a_{ik}|$; platí tedy pro libovolné $i \in N$ a libovolné $z \in E$ nerovnost $|M_A^{(i)}(z)| \leqq \beta |z|$. Budiž dáno $x \in E$ a označme $\xi = L(x)$. Budiž dáno $\varepsilon > 0$. Existují především přirozené číslo n a čísla $\xi_1, \ldots, \xi_n$ tak, že prvek $m = x - \xi e - \sum\limits_{j=i}^{n} \xi_j e_j$ splňuje $|m| < \varepsilon/2(\beta + 1)$. Pro libovolné $i \in N$ bude pak

$$M_A^{(i)}(x) - \xi = (\xi(M_A^{(i)}(e) - 1) + \sum_{j=i}^{n} \xi_j\, M_A^{(i)}(e_j)) + M_A^{(i)}(m)$$

takže

$$|M_A^{(i)}(x) - \xi| \leqq |\xi(M_A^{(i)}(e) - 1) + \sum_{j=i}^{n} \xi_j M_A^{(i)}(e_j)| + \varepsilon/2\,.$$

Z podmínek 2° a 3° plyne však snadno, že výraz v závorce má pro $i \to \infty$ za limitu nulu. Dokázali jsme tedy, že pro každé $x \in E$ platí $\lim M_A^{(i)}(x) = L(x)$.

Nechť naopak metoda příslušná matici A je permanentní. Je-li dáno pevné $i \in N$, pak pro všechny prvky x Banachova prostoru (E, u) konverguje posloupnost spojitých lineárních funkcionálů $g_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} x_k$ k limitě $M_A^{(i)}(x)$. Odtud plyne, že $M_A^{(i)}$ jest spojitý lineární funkcionál na (E, u). Protože dále posloupnost $M_A^{(i)}(x)$ jest ohraničená pro každé $x \in (E, u)$, jest $\sup\limits_i |M_A^{(i)}| < \infty$, tedy $\sup\limits_i \sum\limits_k |a_{ik}| < \infty$.

Vzhledem k tomu, co bylo řečeno o podmínkách 2° a 3° je tím důkaz dokončen.

(1,6) *Metoda příslušná matici A nazývá se reversibilní, jestliže pro každé $y \in E$ existuje právě jedno $x \in W(A)$ tak, že $M_A(x) = y$.*

Pro reversibilní metody dostáváme jako snadný důsledek věty (1,1) následující větu.

(1,7) *Nechť metoda příslušná matici A je reversibilní a nechť metoda B je silnější než metoda A. Potom $M_B M_A^{-1}$ jest spojité zobrazení prostoru (E, u) do sebe.*

Důkaz. Protože prostor (E, u) je úplný, stačí dokázat, že zobrazení $M_B M_A^{-1}$ je uzavřené v $(E, u) \times (E, u)$. Z předpokladu reversibility metody A plyne, že pro každé $y \in E$ existuje právě jedno $x \in W(A)$ tak, že $M_A(x) = y$; jeho k-tou souřadnici označíme $f_k(y)$, takže $f_k(y) = q_k(x)$. Podle věty (1,1) jsou všechna f_k spojité lineární funkcionály na (E, u). Je-li dáno pevné i, pak pro každé $y \in E$ konverguje řada

$$p_i(y) = \sum_{k \in N} b_{ik} f_k(y)$$

protože $W(B) \supset W(A)$ a $p_i(y) = M_B^{(i)} M_A^{-1} y$. Protože prostor (E, u) je úplný a p_i je limitou spojitých lineárních funkcionálů $\sum_{k=1}^{n} b_{ik} f_k$, jest p_i spojitým lineárním funkcionálem na (E, u).

Nechť nyní $y_n \in (E, u)$, nechť platí $y_n \to y_0$ a zároveň $M_B M_A^{-1} y_n \to z$, obojí v (E, u). Platí tedy pro každé $i \in N$

$$p_i(y_0) = \lim_n p_i(y_n) = \lim_n M_B^{(i)} M_A^{-1} y_n = \lim_n q_i(M_B M_A^{-1} y_n) = z_i\,,$$

odkud $z_i = p_i(y_0) = M_B^{(i)} M_A^{-1} y_0$, takže $z = M_B M_A^{-1} y_0$. Důkaz je dokončen.

Zavedeme nyní ještě další vlastnost metod limitovatelnosti.

(1,8) *Budiž dána nekonečná matice $A = \{a_{ik};\ i, k \in N\}$ taková, že $\lim_i a_{ik} = 0$ pro všechna $k \in N$ a $\lim_i \sum_{k \in N} a_{ik} = 1$. Nechť platí následující podmínka:*

jestliže $\sum_{i \in N} |\alpha_i| < \infty$ a platí $\sum_{i \in N} \alpha_i a_{ik} = 0$ pro všechna $k \in N$, pak $\alpha_i = 0$ pro všechna $i \in N$.

Potom podprostor všech $M_A(x)$, $x \in E \cap W(A)$, jest hustý v (E, u).

Důkaz. Především plyne z našeho předpokladu o matici A, že pro každé k jest $e_k \in W(A)$ a $e \in W(A)$. Nechť nyní je splněna naše podmínka a přitom $M_A(E \cap W(A))$ není hustý v (E, u). Pak existují čísla $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ tak, že $0 < |\alpha_0| + \sum_{i \in N} |\alpha_i| < \infty$ a jest $g(y) = \sum_{i \in N} \alpha_i q_i(y) + \alpha_0 L(y) = 0$ pro všechna $y \in M_A(E \cap W(A))$. Platí tedy zejména pro každé $k \in N$

$$0 = g(M_A(e_k)) = \sum_{i \in N} \alpha_i q_i(M_A(e_k)) + \alpha_0 L(M_A(e_k)) = \sum_{i \in N} \alpha_i a_{ik}\,,$$

odkud plyne $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = 0$. Zároveň

$$0 = g(M_A(e)) = \alpha_0 L(M_A(e)) = \alpha_0 .$$

Vzniklý spor dokazuje tvrzení.

Poznamenejme ještě, že podmínka uvedená v předešlé větě znamená vlastně požadavek, aby řádky matice A byly lineárně nezávislé v jistém zesíleném smyslu.

(1,9) *Metoda příslušná matici A se nazývá perfektní, jestliže je permanentní, reversibilní a splňuje vlastnost lineární nezávislosti z předešlého lemmatu.*

(1,10) Věta. *Nechť metoda příslušná matici A je perfektní a budiž B permanentní metoda silnější než A. Potom každá posloupnost limitovatelná metodou A je rovněž limitovatelná metodou B a to k témuž číslu.*

Důkaz. Protože metoda příslušná matici A je reversibilní, zobrazení $M_B M_A^{-1}$ je spojité na (E, u) podle (1,7). Protože A je permanentní, jest $E \subset W(A)$. Označme E_0 množinu všech $M_A(x)$ pro $x \in E$. Matice A zřejmě splňuje předpoklady lemmatu (1,8). Podle (1,8) jest tedy E_0 hustý podprostor (E, u). Jestliže nyní $y \in E_0$, jest $M_A^{-1}y \in E$ a z permanence A plyne $L(y) = L(M_A M_A^{-1}y) = L(M_A^{-1}y)$. Protože B je permanentní a $M_A^{-1}y \in E$, jest $L(M_B M_A^{-1}y) = L(M_A^{-1}y)$. Obě zobrazení $L(y)$ i $L(M_B M_A^{-1}y)$ jsou spojitá na (E, u) a jejich hodnoty souhlasí na hustém podprostoru E_0. Platí tedy $L(M_B M_A^{-1}y) = L(y)$ pro všechna $y \in E$, čímž je důkaz dokončen.

2. UZAVŘENÁ ZOBRAZENÍ

V tomto odstavci uvedeme dvě abstraktní věty o uzavřených zobrazeních. Jako bezprostřední důsledek druhé z nich dostaneme pak větu o spojité závislosti řešení nekonečných systémů lineárních rovnic na pravé straně. První z těchto vět (2,1) platí dokonce v daleko obecnější formě [4]. Také druhou (2,2) lze snadno zobecnit pro prostory B-úplné [3], což přenecháváme čtenáři jako instruktivní cvičení.

Nejprve několik poznámek k terminologii a označení. Jsou-li E a F dva lineární prostory a T lineární zobrazení z prostoru E do F, budeme značit $D(T)$ jeho definiční obor, $R(T)$ jeho obor hodnot a $G(T)$ jeho graf, podprostor kartézského součinu $E \times F$ sestávající ze všech dvojic tvaru $[x, Tx]$ pro $x \in D(T)$. Abychom odlišili zobrazení všude definovaná od zobrazení, pro něž připouštíme i $D(T)$ různé od E, budeme mluvit o zobrazení prostoru E do F, jestliže $D(E) = F$ a o zobrazení z prostoru E do F, jestliže rovnost $D(E) = F$ nepožadujeme.

(2,1) *Nechť E_1, E_2, E jsou metrisovatelné lokálně konvexní prostory, f_1 lineární zobrazení z E_1 do E, f_2 lineární zobrazení z E_2 do E. Předpokládejme dále, že*

1° *f_1 je spojité a $D(f_1) = E_1$,*

2° *f_2 je uzavřené v $E_2 \times E$.*

Označme F množinu všech dvojic $[x_1, x_2]$ takových, že $f_1 x_1 = f_2 x_2$.

$$\begin{tikzcd} E_2 \arrow[r, "f_2"] & E \\ E_1 \arrow[ur, "f_1"'] & \end{tikzcd}$$

Potom F je uzavřená v $E_1 \times E_2$.

Důkaz. Nechť $[x_n, y_n] \in F$ a $[x_n, y_n] \to [x_0, y_0]$. Protože $x_n \to x_0$ a f_1 je spojité, platí $f_1 x_n \to f_1 x_0$. Platí tedy $y_n \to y_0$ a $f_2 y_n = f_1 x_n \to f_1 x_0$. Z uzavřenosti zobrazení f_2 plyne tedy $y_0 \in D(f_2)$ a $f_2 y_0 = f_1 x_0$, takže $[x_0, y_0] \in F$.

Poznamenejme, že lemma (2,1) platí i za daleko obecnějších předpokladů.

(2,1') *Nechť E_1, E_2 a E jsou Hausdorffovy topologické prostory, f_1 zobrazení z E_1 do E, f_2 zobrazení z E_2 do E. Předpokládejme dále, že*

1° *f_1 je spojité a $D(f_1) = E_1$,*

2° *graf f_2 je uzavřený v $E_2 \times E$.*

Potom množina F všech dvojic $[x_1, x_2]$ takových, že $f_1 x_1 = f_2 x_2$, je uzavřená v $E_1 \times E_2$.

Důkaz. Pro každé $[x_1, x_2] \in E_1 \times E_2$ položme $h(x_1, x_2) = [x_2, f_1(x_1)] \in E_2 \times E$ takže h je spojité zobrazení prostoru $E_1 \times E_2$ do $E_2 \times E$. Zřejmě platí $F = h^{-1}(G)$, kdež G je graf zobrazení f_2.

(2,2) *Buďtež P, Q, E, F metrisovatelné lokálně konvexní prostory, L spojité lineární zobrazení prostoru F do E, C spojité lineární zobrazení prostoru Q do E. Dále buď dáno lineární zobrazení H z prostoru P do prostoru F, které je uzavřené v $P \times F$.*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "H"] & F \arrow[r, "L"] & E \\ & & \\ Q \arrow[uurr, "C"'] & & \end{tikzcd}$$

Předpokládejme, že ke každému $y \in Q$ existuje právě jedno $x \in P$ tak, že $LHx = Cy$. Jestliže prostory P, Q, F jsou úplné, pak zobrazení $y \to x$ jest spojité.

Důkaz. Použijeme předešlé věty (2,1), ve které položíme $E_1 = Q$, $f_1 = C$, $E_2 = G(H)$; za f_2 vezmeme zobrazení, které dvojici $[x, Hx] \in G(H)$ přiřazuje prvek $LHx \in E$. Protože f_2 je spojité zobrazení prostoru $G(H)$ do E, je podle (2,1) množina všech dvojic $[y, z] \in Q \times G(H)$, pro něž $Cy = f_2 z$, uzavřená v $Q \times G(H)$. Podle našeho předpokladu je tato množina grafem jistého zobrazení prostoru Q do $G(H)$. Z uvedených předpokladů plyne dále, že prostory Q i $G(H)$ jsou úplné. Podle věty o uzavřeném grafu je tedy zobrazení $y \to z = [x, Hx]$ spojité. Tím spíše je spojité zobrazení $y \to x$.

Poznamenejme, že věta by byla přímým důsledkem předešlé, kdybychom mohli dokázat, že superposice $L \circ H$ zobrazení spojitého a uzavřeného je uzavřené zobrazení. Nesnáz lze obejít tím, že místo spojitosti zobrazení $y \to x$ dokážeme tvrzení silnější, že totiž zobrazení Q do $G(H)$, přiřazující prvku $y \in Q$ prvek $[x, Hx] \in G(H)$, je spojité.

Uvedeme ještě jeden bezprostřední důsledek věty (2,1') ve tvaru, ve kterém jej budeme později potřebovat. V důkazu budeme potřebovat jedno označení. Jestliže S je normovaný lineární prostor a T je daná množina, označíme S^T lineární prostor všech zobrazení množiny T do S s topologií kartézského součinu.

(2,3) *Nechť P a S jsou metrisovatelné lokálně konvexní prostory, T a V dané množiny. Pro každé $v \in V$ a $t \in T$ buď dán prvek $g(v, t, .) \in P'$. Pro každé $v \in V$ buď dán prvek $f(v, .) \in S'$.*

Potom množina všech dvojic $[x, z] \in P \times S^T$ takových, že

$$f(v, z(t)) = g(v, t, x)$$

pro všechna v, t, jest uzavřená v $P \times S^T$.

Důkaz. Zvolme pevně $v \in V$ a $t \in T$. Potom zobrazení, které prvku $[x, z] \in P \times S^T$ přiřazuje číslo $g(v, t, x) - f(v, z(t))$, jest zřejmě spojitým lineárním funkcionálem na $P \times S^T$. Jeho jádro $N(v, t)$ je tedy uzavřená množina. Množina uvedená v našem tvrzení je zřejmě průnikem všech $N(v, t)$ pro $v \in V$ a $t \in T$.

Lemma (2,3) je ovšem speciálním případem obecného schématu (2,1). O tom se přesvědčíme takto: stačí položiti $E_1 = P$, $E_2 = S^T$, $E = R^{V \times T}$. Je-li $x \in P$, potom $f_1(x)$ bude onen prvek $R^{V \times T}$, jehož souřadnice na místě v, t jest $g(v, t, x)$. Je-li $z \in S^T$, potom $f_2(z)$ bude onen prvek $R^{V \times T}$, jehož souřadnice na místě v, t jest $f(v, z(t))$. Zřejmě f_1 i f_2 jsou spojitá všude definovaná zobrazení.

Vyslovíme nyní větu abstraktní, z níž bezprostředně plyne zostření věty (1,1).

(2,4) *Buďtež Q, P, S tři úplné metrisovatelné lokálně konvexní prostory, T a V dané množiny, při čemž nechť T je spočetná. Pro každé $t \in T$ buď dán $c(t, .) \in Q'$. Pro každé $v \in V$ buď dán $f(v, .) \in S'$; množina všech $f(v, .)$ nechť tvoří totální množinu v S'. Dále buď dán pro každé v a t funkcionál $g(v, t, .) \in P'$. Budiž u daný prvek $u \in S'$. Označme G množinu všech dvojic $[x, z] \in P \times S^T$ takových, že $f(v, z(t)) = g(v, t, x)$ pro všechna v, t. Potom G jest grafem jistého zobrazení H z P do S^T. Jestliže $z = H(x)$ a t je daný prvek množiny T, označíme $H(t, x) = z(t)$.*

Předpokládejme, že ke každému $y \in Q$ existuje právě jedno $x \in P$ takové, že $x \in \in D(H)$ a platí

$$u(H(t, x)) = c(t, y) \quad \text{pro všechna} \quad t \in T.$$

Potom zobrazení $y \to x$ je spojité.

Důkaz. Podle (2,3) je G uzavřená v $P \times S^T$. Že G je grafem jistého zobrazení, plyne ihned z totálnosti množiny $f(v, .)$, $v \in V$. Jest tedy H zobrazení uzavřené v $P \times S^T$. Vezměme nyní ve větě (2,2) za F prostor S^T, za E prostor R^T. Protože T je spočetná, bude F opět úplný metrisovatelný lokálně konvexní prostor. Zobrazení L a C definujme relacemi

$$z(.) \to u(z(.))$$

$$y \to c(., y)$$

Předpoklady věty (2,2) jsou pak zřejmě splněny.

(2,5) Věta. *Nechť Q a P jsou úplné metrisovatelné lokálně konvexní prostory, jejichž prvky jsou posloupnosti reálných čísel; předpokládejme, že každá souřadnice spojitě závisí na příslušném prvku.*

Nechť $A = \{a_{ik};\ i, k \in N\}$ je matice reálných čísel taková, že pro každé $y \in Q$, $y = \{y_i;\ i \in N\}$ existuje právě jedna $x \in P$, $x = \{x_k;\ k \in N\}$ tak, že

1° *řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}x_k$ konverguje pro každé i,*

2° *pro každé i jest $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}x_k = y_i$.*

Potom zobrazení $y \to x$ je spojité.

Důkaz. Označíme S Banachův prostor všech posloupností $z = \{z_r;\ r \in N\}$ takových, že $\lim z_r$ existuje; norma $z = \sup_{r \in N} |z_r|$. Za T i V vezmeme množinu všech přirozených čísel a položíme pro $y \in Q$ a $z \in S$ $c(t, y) = y_t$ a $f(v, z) = z_v$. Položíme pro každé $x \in P$

$$g(t, v, x) = \sum_{k=1}^{v} a_{tk}x_k .$$

Funkcionál $u \in S'$ definujeme vztahem $u(z) = \lim z_r$. Použijme nyní věty (2,4). Zřejmě $D(H)$ jest množina všech $x \in P$ takových, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_{tk}x_k$ konverguje pro každé $t \in T$, přičemž

$$H(t, x) = \{\sum_{k=1}^{v} a_{tk}x_k;\ v \in N\} .$$

Předpoklady věty (2,4) jsou pak zřejmě splněny.

Literatura

[1] *S. Banach:* Théorie des opérations linéaires, Monografie matematyczne 1 (1932).
[2] *V. Pták:* On the closed graph theorem, Czech. Math. J. *84* (1959), 523—527.
[3] *V. Pták:* The principle of uniform boundedness and the closed graph theorem, Czech. Math. J. *87* (1962), 523—528.
[4] *V. Pták:* Some open mapping theorems in LF-spaces, Math. Scand. *16* (1965), 75—93.

Adresa autora: Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV v Praze).

Summary

A REMARK ON CLOSED MAPPINGS

VLASTIMIL PTÁK, Praha

The article describes a simple sufficient condition for a linear mapping from a normed space into another to be closed. This condition is used to establish a general theorem about continuous dependence of solutions of infinite systems of linear equations on the right hand side. As an application a (well-known) comparison theorem for two summability methods for sequences is deduced.