Časopis pro pěstování matematiky, roč. 95 (1970), Praha

ÚHLOVÉ LIMITY POTENCIÁLŮ DVOJVRSTVY

JIŘÍ VESELÝ, Praha

(Došlo dne 22. prosince 1968)

Při vyšetřování vlastností potenciálů jednoduché a dvojné vrstvy, z nichž některé jsou důležité pro řešení okrajových úloh teorie parciálních diferenciálních rovnic, jsme ve svých možnostech značně závislí na charakteru křivek, resp. ploch, s nimiž pracujeme. V tomto článku si všimneme blíže podmínek existence úhlových limit těchto potenciálů. Je-li H plocha v E_3, $Q \in E_3 - H$ a je-li $W(F; Q)$ hodnota potenciálu dvojvrstvy v bodě Q s hustotou F soustředěnou na H, rozumíme úhlovou limitou limitu tvaru

$$\lim_{\varrho \to 0+} W(F; P + \varrho(Q - P)) ;$$

požadujeme přitom, aby existoval nedegenerovaný rotační dvojkužel s osou PQ a vrcholem P tak, že v jistém okolí bodu P má s plochou H společný právě jen bod P. V citované práci [1] jsou formulovány nutné a postačující podmínky pro existenci úhlových limit logaritmického potenciálu dvojvrstvy. Zde jsou tyto výsledky přeneseny na obecné válcové plochy v E_3 a Newtonův, resp. tepelný, potenciál dvojvrstvy. K formulaci podmínek je použito vlastností řídících křivek těchto válcových ploch, vyjádřených pomocí jejich cyklické a radiální variace.

1.

Jelikož budeme užívat ve větší míře výsledků z citovaných prací, zejména pak článku [1], přizpůsobíme k tomu vhodně užívané označení. Zopakujeme též stručně zavedení některých pojmů a shrneme jejich nejdůležitější vlastnosti.

Eukleidovský dvojrozměrný prostor E_2 budeme ztotožňovat s rovinou komplexních čísel. K označení normy v E_k, $k = 1, 2, 3$, budeme užívat symbolu $|\ldots|$. Prostor všech omezených spojitých reálných funkcí na množině M s normou, definovanou vztahem

$$\|f\| = \sup \{|f(x)|,\ x \in M\} ,$$

budeme značit $C(M)$. Symbolem ψ budeme značit spojitou komplexní funkci, definovanou na uzavřeném nedegenerovaném intervalu $\langle a, b\rangle$; budeme předpokládat, že platí

$$\text{var}\,[\psi; \langle a, b\rangle] < +\infty\,, \tag{1.1}$$

$$(a \leqq t_1 < t_2 \leqq b,\ t_2 - t_1 < b - a) \Rightarrow \psi(t_1) \neq \psi(t_2)\,, \tag{1.2}$$

tj. $K = \psi(\langle a, b\rangle)$ je jednoduchá rektifikovatelná křivka v E_2.

Pro $z \in E_2$, $0 < r \leqq +\infty$, $\alpha \in E_1$ označíme $\mu_r^\psi(\alpha, z)$ počet prvků množiny

$$\{t;\ t \in \langle a, b\rangle,\ 0 < |\psi(t) - z| < r,\ \psi(t) - z = |\psi(t) - z| \,.\, \exp i\alpha\}\,.$$

Podobně pro $z \in E_2$, $0 < r \leqq +\infty$, $\varrho > 0$ označíme $\nu^\psi(\varrho, z)$ počet prvků množiny

$$\{t;\ t \in \langle a, b\rangle,\ |\psi(t) - z| = \varrho\}\,.$$

Vzhledem k proměnným α, resp. ϱ, jsou $\mu_r^\psi(\alpha, z)$, resp. $\nu^\psi(\varrho, z)$, lebesgueovsky měřitelné funkce a lze definovat

$$v_r^\psi(z) = \int_0^{2\pi} \mu_r^\psi(\alpha, z)\,\mathrm{d}\alpha\,, \quad u_r^\psi(z) = \int_0^r \nu^\psi(\varrho, z)\,\mathrm{d}\varrho\,. \tag{1.3}$$

V případě $r = +\infty$ budeme užívat označení v^ψ resp. u^ψ.

Pro $z \in E_2$ definujme na $\langle a, b\rangle$ spojitou reálnou funkci r_z předpisem

$$r_z(t) = |\psi(t) - z|\,. \tag{1.4}$$

Na $\langle a, b\rangle - \psi^{-1}(z)$ existuje spojitá větev $\arg\,[\psi(t) - z]$, tj. spojitá reálná funkce θ_z, pro kterou platí

$$r_z(t) \exp i\theta_z(t) = \psi(t) - z\,. \tag{1.5}$$

Je-li $z \notin K$, je funkce θ_z spojitá na $\langle a, b\rangle$ a je určena až na aditivní konstantu jednoznačně.

Označíme-li $\mathfrak{Y}_{z,r}$ systém všech komponent $\mathscr{J}$ množiny

$$\{t;\ t \in \langle a, b\rangle,\ 0 < |\psi(t) - z| < r\}\,,$$

platí

$$u_r^\psi(z) = \sum_{\mathscr{J}} \text{var}_t\,[|\psi(t) - z|; \mathscr{J}]\,, \quad \mathscr{J} \in \mathfrak{Y}_{z,r}\,. \tag{1.6}$$

Je-li $\theta_{\mathscr{J}}$ libovolná spojitá větev $\arg\,[\psi(t) - z]$ na $\mathscr{J} \in \mathfrak{Y}_{z,r}$, je dále

$$v_r^\psi(z) = \sum_{\mathscr{J}} \text{var}_r\,[\theta_{\mathscr{J}}(t); \mathscr{J}]\,, \quad \mathscr{J} \in \mathfrak{Y}_{z,r}\,. \tag{1.7}$$

Je-li $\zeta \in K$, $R > 0$ a $\beta \in E_1$ a existuje-li $\delta > 0$ tak, že platí $(|\gamma - \beta| < \delta,\ 0 < r < 2R) \Rightarrow \zeta \Rightarrow r \exp i\gamma \notin K$, pak platí následující vztahy

$$\sup_{0<r<R} r^{-1} u_r^\psi(\zeta) \leqq L[v_R^\psi(\zeta) + \sup_{0<r<R} v_{2r}^\psi(\zeta + r \exp i\beta)]\,, \tag{1.8}$$

$$\sup_{0<r<R} v_R^\psi(\zeta + r \exp i\beta) \leqq M[v_{2R}^\psi(\zeta) + \sup_{0<r<2R} r^{-1} u_r^\psi(\zeta)]\,, \tag{1.9}$$

kde L, M jsou konstanty závislé pouze na δ. Důkaz platnosti těchto vztahů je proveden v [3].

Funkce v^ψ jest v E_2 zdola polospojitá. Označíme-li $\varrho(z) = \inf\{|z - \zeta|, \zeta \in K\}$, potom vzhledem k (1.1) platí

$$(1.10) \quad v^\psi(z) = \operatorname{var}[\theta_z; \langle a, b\rangle] \leqq \varrho^{-1}(z) \operatorname{var}[\psi; \langle a, b\rangle] \qquad \text{pro } z \notin K,$$

$$(1.11) \quad \operatorname{var}[\theta_u - \theta_v; \langle a, b\rangle] \leqq |u - v|\, \varrho^{-1}(u)\, \varrho^{-1}(v) \operatorname{var}[\psi; \langle a, b\rangle] \text{ pro } u, v \notin K.$$

Důkaz tohoto tvrzení viz v 1.12 v [2].

1.1. Poznámka. Z formulí (1.3) vyplývá, že pro křivku K jsou hodnoty funkcí u_r^ψ, v_r^ψ tytéž pro libovolnou funkci ψ, popisující K a splňující podmínku (1.2). Proto budeme v dalším užívat označení u_r^K, v_r^K.

1.2. Poznámka. Jestliže nastane případ $\psi(a) = \psi(b)$, tj. K jest uzavřená křivka, můžeme při práci s bodem $\zeta \in K$ předpokládat, že $\psi^{-1}(\zeta) = \{t_0\}$, $t_0 \in (a, b)$. Kdyby nastal případ $\psi^{-1}(\zeta) = \{a, b\}$, lze funkci ψ periodicky rozšířit z $\langle a, b\rangle$ na E_1 s periodou $(b - a)$ a zvolit nový interval stejné délky $\langle a', b'\rangle$ tak, že $\psi(a') \neq \zeta$ a $\psi(\langle a', b'\rangle) = K$. Tato změna parametrisace je pro naše úvahy nepodstatná.

Pro $z \in E_2$, $r > 0$ označíme

$$(1.12) \qquad U_r(z) = \{u;\, u \in E_2,\, |u - z| < r\}.$$

1.3. Lemma. *Nechť je dána funkce ψ, $\psi(\langle a, b\rangle) = K$, K je jednoduchá rektifikovatelná křivka v E_2, $\zeta \in K$, $\varrho > 0$ a platí*

$$(1.13) \qquad \sup\{v^K(z);\; z \in U_\varrho(\zeta) \cap K\} < +\infty.$$

Potom platí

$$(1.14) \qquad \sup_{r>0} r^{-1} u_r^K(\zeta) < +\infty.$$

Důkaz. Nechť ve smyslu 1.2 je $\psi^{-1}(\zeta) = \{t_0\}$, $t_0 \in (a, b)$. Označíme (pokud existují limity)

$$(1.15) \qquad \tau_K^+(t) = \lim_{u \to t_+} \frac{\psi(u) - \psi(t)}{|\psi(u) - \psi(t)|} = \exp i\alpha_+(\psi(t)), \quad t \in \langle a, b),$$

$$\tau_K^-(t) = \lim_{u \to t_-} \frac{\psi(u) - \psi(t)}{|\psi(u) - \psi(t)|} = \exp i\alpha_-(\psi(t)), \quad t \in (a, b\rangle.$$

Z podmínky (1.13) plyne $v^K(\zeta) < +\infty$, což zaručuje existenci limit (1.15) v bodě t_0. Volíme-li $\beta \neq \alpha_+(\zeta)$, $\beta \neq \alpha_-(\zeta)$, lze vyhověti předpokladům pro odhad (1.8) a volit příslušná δ a R. Jelikož zřejmě platí $v_r^K(z) \leqq v^K(z)$, pak pro využití (1.8) stačí např. nalézti $r_0 > 0$ tak, aby platilo $\sup\{v^K(z);\; z \in U_{r_0}(\zeta)\} < +\infty$. Položme $r_1 = \frac{1}{2}r$.

Označíme $\langle a_1, b_1 \rangle$ největší interval, pro který platí

$$t_0 \in \langle a_1, b_1 \rangle \subset \langle a, b \rangle, \quad \psi((a_1, b_1)) \subset U_{r_1}(\zeta) \subset U_\varrho(\zeta).$$

V případě $\langle a_1, b_1 \rangle = \langle a, b \rangle$ je $\sup \{v^K(z); z \in K\} < +\infty$ a podle tvrzení 1.5 z [1] je i $\sup \{v^K(z); z \in E_2\} < +\infty$. Předpokládejme bez újmy obecnosti na příklad $a < a_1$, $b_1 < b$. Označíme

$$K_1 = \psi(\langle a, a_1 \rangle), \quad K_2 = \psi(\langle a_1, b_1 \rangle), \quad K_3 = \psi(\langle b_1, b \rangle).$$

Definujeme-li r_ζ pomocí (1.4), platí

$$\min \{r_\zeta(t); t \in \langle a, a_1 \rangle \cup \langle b_1, b \rangle\} = r_2 > 0.$$

Vzhledem k definičním vztahům (1.3) pro v^K platí

$$\sup \{v^{K_2}(z); z \in K_2\} \leqq \sup \{v^K(z); z \in K_2\} < +\infty,$$

z čehož plyne podle 1.5 v [1],

$$\sup \{v^{K_2}(z); z \in E_2\} = c < +\infty.$$

Volíme-li $r_0 = \frac{1}{2} r_2$, platí pro všechna $z \in U_{r_0}(\zeta)$

$$v^K(z) \leqq v^{K_1}(z) + v^{K_2}(z) + v^{K_3}(z),$$

z čehož podle (1.10) vyplývá

$$v^K(z) \leqq c + 2r_0^{-1} \operatorname{var} [\psi; \langle a, b \rangle] < +\infty.$$

Nyní stačí volit $2R < r_0$ a použít nerovnosti (1.8), z čehož obdržíme

$$\sup \{r^{-1} u_r^K(\zeta); \quad 0 < r < R\} < +\infty.$$

Pro $r \geqq R$ platí

$$r^{-1} u_r^K(\zeta) \leqq R^{-1} u_r^K(\zeta) =$$
$$= R^{-1} \sum_{\mathscr{I} \in \mathfrak{Y}_{\zeta,r}} \operatorname{var}_t [|\psi(t) - \varrho|; \mathscr{I}] \leqq R^{-1} \operatorname{var} [\psi; \langle a, b \rangle] < +\infty.$$

Ale odtud již vyplývá požadované tvrzení (1.14).

Budeme ještě používat těchto označení: plochu $H \subset E_3$ vytvoříme jako kartézský součin $H = K \times E_1$. Body v E_3 budeme popisovat dvojím způsobem, tj. $Q \in E_3$, $Q \equiv [x, y, u] \equiv [z; u]$, kde $z \in E_2$, $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Je-li $R \in H$, $R \equiv [\zeta; v]$, je za normálu $v(R)$ k ploše H v bodě R přirozené brát vektor $[n(\zeta), 0]$, kde $n(\zeta)$ je vektor normály ke křivce K v bodě $\zeta \in K$ (lze se vždy dohodnout, jak tento vektor budeme jednoznačně určovat). Je-li λ lineární míra na K, potom vzhledem k předpokladu rektifikovatelnosti K existuje $n(\zeta)$ λ-skoro všude na K. Označíme-li lineární míru na E_1 rovněž λ, je přirozené brát za povrchovou míru μ na H součinovou míru

$\lambda \times \lambda$; pak také $\nu(R)$ existuje μ-skoro všude na H. Budeme studovat vlastnosti funkcí typu

$$W(F; Q) = \int_H F(R) \, . \, \frac{\partial G(R, Q)}{\partial \nu(R)} \, d\mu(R) \tag{1.16}$$

kde F jest omezená spojitá funkce na H a $G(R, Q)$ funkce speciálního tvaru.

1.4. Poznámka. Označíme-li $\mathscr{H} = \langle a, b \rangle \times E_1$, lze zavést následující korespondenci mezi $C(H)$ a $C(\mathscr{H})$

$$F(\zeta, v) \leftrightarrow F(\psi(t), v) = f(t, v)\,, \tag{1.17}$$

kde $F \in C(H)$, $[\zeta; v] \in H$, $\psi(t) = \zeta$. Je-li ψ prostá, je tento vztah vzájemně jednoznačný a je isometrickým isomorfismem mezi $C(H)$ a $C(\mathscr{H})$; pro uzavřenou K není ψ prostá, lze však pomocí (1.17) zavést isometrický isomorfismus mezi $C(H)$ a $C_0(\mathscr{H}) \subset \subset C(\mathscr{H})$, kde $C_0(\mathscr{H})$ je třída všech f z $C(\mathscr{H})$, pro něž platí $f(a, v) = f(b, v)$ pro všechna $v \in E_1$.

2.

Označíme-li $Q \equiv [z_0; u_0]$, $R \equiv [z; u]$, má v prvním případě, který budeme vyšetřovat, funkce $G(R, Q)$ z (1.16) tvar

$$G(R, Q) = [|z - z_0|^2 + (u - u_0)^2]^{-1/2} = |Q - R|^{-1}\,.$$

Je-li $\psi_1 = \operatorname{Re} \psi$, $\psi_2 = \operatorname{Im} \psi$ a předpokládáme-li, že funkce ψ je absolutně spojitá, lze po dosazení do (1.16) $W(F; Q)$ upravit na tvar (pro označení závislosti na ψ budeme užívat symbolu $W^\psi(F; Q)$ apod.)

$$W^\psi(F; Q) =$$

$$= \int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} F(\psi_1(t), \psi_2(t), u) \frac{\psi_2'(t) [\psi_1(t) - x_0] - \psi_1'(t) [\psi_2(t) - y_0]}{[(\psi_1(t) - x_0)^2 + (\psi_2(t) - y_0)^2 + (u - u_0)^2]^{3/2}} \, du \, dt\,.$$

Je-li $z_0 \notin K$, r_{z_0} a θ_{z_0} jsou určeny pomocí (1.4) a (1.5) a jestliže funkci $F \in C(H)$ přiřadíme pomocí (1.17) $f \in C(\mathscr{H})$, lze upravit předešlou formuli na výhodnější tvar

$$W^\psi(F; Q) = w^\psi(f; z_0, u_0) = \int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} f(t, u) \frac{r_{z_0}^2(t)\, \theta_{z_0}'(t)}{[r_{z_0}^2(t) + (u - u_0)^2]^{3/2}} \, du \, dt =$$

$$= \int_a^b \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t, s) \, d_s \left[\frac{s - u_0}{[r_{z_0}^2(t) + (s - u_0)^2]^{1/2}} \right] \right) d_t \theta_{z_0}(t)\,.$$

Poslední výraz má smysl i bez dodatečného předpokladu absolutní spojitosti funkce ψ a proto tento předpoklad opět opustíme. Pro funkce $f \in C(\mathscr{H})$ resp. $f \in C_0(\mathscr{H})$ budeme vyšetřovat vlastnosti funkce

$$(2.1)\qquad w^{\psi}(f; z_0, u_0) = \int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} f(t, s)\, \mathrm{d}_s \left[\frac{s - u_0}{[r_{z_0}^2(t) + (s - u_0)^2]^{1/2}}\right] \mathrm{d}_t \theta_{z_0}(t)\,,$$

kde $z_0 \notin K$. Výrazu (2.1) lze však dát smysl i v případě $z_0 \in K$. Potom, jak již bylo řečeno, je možno funkci θ_{z_0} definovat v $\langle a, b\rangle - \psi^{-1}(z_0)$. Integrál v (2.1) pak budeme chápat jako součet integrálů přes komponenty množiny $\langle a, b\rangle - \psi^{-1}(z_0)$; (v našem případě tento součet má nejvýše dva členy).

Funkce

$$\frac{s - u_0}{[r_{z_0}^2(t) + (s - u_0)^2]^{1/2}}$$

je pro libovolné $z_0 \notin K$, $t \in \langle a, b\rangle$ monotonní funkcí $s \in E_1$ a je

$$(2.2)\qquad \operatorname{var}_s \left[\frac{s - u_0}{[r_{z_0}^2(t) + (s - u_0)^2]^{1/2}}\,;\ (-\infty, \infty)\right] = 2$$

pro libovolné $z_0 \in E_2 - K$. To nám umožňuje odhadnout $w^{\psi}(f; z_0, u_0)$ pro $z_0 \notin K$

$$(2.3)\qquad |w^{\psi}(f; z_0, u_0)| \leqq 2 \,.\, \|f\| \operatorname{var}[\theta_{z_0}; \langle a, b\rangle] = 2 \,.\, \|f\|\, v^K(z_0)\,.$$

Odhad však bude stejný i pro $z_0 \in K$, když budeme pracovat s variacemi θ_{z_0} na komponentách $\langle a, b\rangle - \psi^{-1}(z_0)$. Aby integrál v (2.1) byl konečný pro všechny funkce $f \in C(\mathscr{H})$, je nutno požadovat $v^K(z_0) < +\infty$.

2.1. Lemma. *Pro $r \geqq 0$, $\delta > 0$ platí*

$$(2.4)\qquad \operatorname{var}_x \left[\frac{x}{[r^2 + x^2]^{1/2}}\,;\ \langle \delta, +\infty)\right] \leqq \frac{r^2}{\delta^2}\,.$$

Je-li dále $|\Delta| < \frac{1}{2}\delta$, platí

$$(2.5)\qquad \operatorname{var}_x \left[\frac{x + \Delta}{(r^2 + (x + \Delta)^2)^{1/2}}\,;\ \langle \delta, +\infty)\right] \leqq 4\frac{r^2}{\delta^2}\,.$$

Důkaz. Pro libovolné $r \geqq 0$ je vyšetřovaná funkce monotonní funkcí $x \in E_1$. Přímým výpočtem obdržíme pro hodnotu (2.4) odhad

$$1 - \frac{\delta}{(r^2 + \delta^2)^{1/2}} \leqq 1 - \frac{\delta^2}{r^2 + \delta^2} = \frac{r^2}{r^2 + \delta^2} \leqq \frac{r^2}{\delta^2}\,,$$

tj. platí tvrzení (2.4). Položíme-li nyní v (2.4) $x + \Delta = y$, lze zkoumaný výraz upravit na tvar, který lze dále odhadnout takto

$$\operatorname{var}_y\left[\frac{y}{(r^2+y^2)^{1/2}}\,;\ \langle\delta+\Delta,+\infty)\right]\leqq$$

$$\leqq \operatorname{var}_y\left[\frac{y}{(r^2+y^2)^{1/2}}\,;\ \langle\tfrac{1}{2}\delta,+\infty)\right]\leqq\frac{r^2}{(\frac{1}{2}\delta)^2}=4\,\frac{r^2}{\delta^2}\,.$$

Tím je dokázána i formule (2.5).

2.2. Lemma. *Pro* $r>0$, $\Delta\in E_1$ *platí*

$$\operatorname{var}_x\left[\frac{x+\Delta}{(r^2+(x+\Delta)^2)^{1/2}}-\frac{x}{(r^2+x^2)^{1/2}}\,;\ (-\infty,\infty)\right]\leqq 2\,.\,\frac{|\Delta|}{r}\,.\tag{2.6}$$

Je-li $r_1>0$, $r_2>0$, *platí*

$$\operatorname{var}_x\left[\frac{x}{(r_1^2+x^2)^{1/2}}-\frac{x}{(r_2^2+x^2)^{1/2}}\,;\ (-\infty,\infty)\right]\leqq 4\,.\,\frac{|r_1-r_2|}{\min(r_1,r_2)}\,.\tag{2.7}$$

Důkaz. V prvém případě stačí vyšetřit případ $\Delta\geqq 0$, případ $\Delta\leqq 0$ převedeme na předešlý substitucí.

Označíme-li v prvém případě vyšetřovanou funkci h_1, platí

$$\lim_{x\to+\infty}h_1(x)=\lim_{x\to-\infty}h_1(x)=0\,.$$

Pro $r>0$ je funkce h_1 i se svou derivací

$$h_1'(x)=\frac{r^2}{(r^2+(x+\Delta)^2)^{3/2}}-\frac{r^2}{(r^2+x^2)^{3/2}}$$

spojitá a je $h_1'(x)>0$ pro $x<-\frac{1}{2}\Delta$, $h_1'(x)<0$ pro $x>-\frac{1}{2}\Delta$. Z průběhu funkce h_1 je patrno, že

$$\operatorname{var}_x\,[h_1(x);\ (-\infty,\infty)]=2h_1(-\tfrac{1}{2}\Delta)\leqq\frac{4\Delta}{(4r^2+\Delta^2)^{1/2}}\leqq 2\,.\,\frac{\Delta}{r}\,,\tag{2.8}$$

z čehož již plyne (2.6). Ve druhém případě označíme vyšetřovanou funkci h_2. Tato funkce je v E_1 spojitá, lichá a je $h_2(0)=0$. Dále je $\lim_{x\to+\infty}h_2(x)=0$. V intervalu $(0,+\infty)$ má funkce

$$h_2'(x)=\frac{r_1^2}{(r_1^2+x^2)^{3/2}}-\frac{r_2^2}{(r_2^2+x^2)^{3/2}}$$

jediný nulový bod

$$x_0=\frac{(r_1r_2)^{2/3}}{(r_1^{2/3}+r_2^{2/3})^{1/2}}\,.$$

Z průběhu funkce h_2 vyplývá

$$\operatorname{var}_x [h_2; (-\infty, \infty)] = 2 \operatorname{var}_x [h_2; \langle 0, +\infty)] =$$
$$= 4 . \max \{|h_2(x)|; x \in \langle 0, +\infty)\} = 4 . |h_2(x_0)| ,$$

avšak

$$|h_2(x)| = \left| x . \frac{(r_2^2 + x^2)^{1/2} - (r_1^2 + x^2)^{1/2}}{(r_1^2 + x^2)^{1/2} (r_2^2 + x^2)^{1/2}} \right| =$$

$$= \left| \frac{x}{(r_1^2 + x^2)^{1/2}} \right| \cdot \left| \frac{r_2^2 - r_1^2}{(r_2^2 + x^2)^{1/2} [(r_1^2 + x^2)^{1/2} + (r_2^2 + x^2)^{1/2}]} \right| \leqq \frac{|r_2 - r_1|}{\min (r_1, r_2)} ,$$

z čehož plyne již (2.7).

2.3. Lemma. *Je-li $\mathscr{J}$ interval, $\mathscr{J} \subset E_1, f, g$ funkce s konečnou variací na $\mathscr{J}$, platí*

(2.9) $$\operatorname{var} [f + g; \mathscr{J}] \leqq \operatorname{var} [f; \mathscr{J}] + \operatorname{var} [g; \mathscr{J}] .$$

2.4. Lemma. *Pro $r_1 > 0, r_2 > 0, \Delta \in E_1$ platí*

(2.10)

$$\operatorname{var}_x \left[\frac{x + \Delta}{[r_2^2 + (x + \Delta)^2]^{1/2}} - \frac{x}{[r_1^2 + x^2]^{1/2}} ; (-\infty, \infty) \right] \leqq 4 . \frac{|r_1 - r_2| + |\Delta|}{\min (r_1, r_2)} .$$

Důkaz (2.10) plyne pomocí (2.9) z lemmatu 2.2.

2.5. Lemma. *Nechť je dána funkce ψ, splňující (1.1) a (1.2), $\psi(\langle a, b \rangle) = K$, $f \in C(\mathscr{H})$ a nechť $\zeta \in K$ je hromadným bodem množiny $M \subset E_2 - K$, pro niž platí*

$$\sup \{v^K(z); z \in M\} = c < +\infty .$$

Označíme-li dále $Q \equiv [z; u]$, $P \equiv [\zeta; v]$, $|P - Q| = d$, platí pro libovolné $\delta > 0$

(2.11) $$\lim_{\substack{d \to 0+ \\ z \in M}} \left| \int_a^b \int_{v+\delta}^{\infty} f(t, s) \, \mathrm{d}_s \left[\frac{s - u}{[r_z^2(t) + (s - u)^2]^{1/2}} \right] \mathrm{d}_t \theta_z(t) - \right.$$
$$\left. - \int_a^b \int_{v+\delta}^{\infty} f(t, s) \, \mathrm{d}_s \left[\frac{s - v}{[r_\zeta^2(t) + (s - v)^2]^{1/2}} \right] \mathrm{d}_t \theta_\zeta(t) \right| = 0 ,$$

(2.12) $$\lim_{\substack{d \to 0+ \\ z \in M}} \left| \int_a^b \int_{-\infty}^{v-\delta} f(t, s) \, \mathrm{d}_s \left[\frac{s - u}{[r_z^2(t) + (s - u)^2]^{1/2}} \right] \mathrm{d}_t \theta_z(t) - \right.$$
$$\left. - \int_a^b \int_{-\infty}^{v-\delta} f(t, s) \, \mathrm{d}_s \left[\frac{s - v}{[r_\zeta^2(t) + (s - v)^2]^{1/2}} \right] \mathrm{d}_t \theta_\zeta(t) \right| = 0 .$$

Důkaz. Je zřejmé, že stačí dokázat např. (2.11); platnost (2.12) by se dokazovala stejným způsobem. Předpokládejme nejprve, že K je jednoduchý oblouk a $\psi^{-1}(\zeta) = \{a\}$. Pro dostatečně malé $\delta_1 > 0$ platí následující odhad

$$\left| \int_a^b \int_{v+\delta}^{\infty} f(t, s) \, d_s \left[\frac{s - u}{[r_z^2(t) + (s - u)^2]^{1/2}} \right] d_t\theta_z(t) - \right.$$

$$\left. - \int_a^b \int_{v+\delta}^{\infty} f(t, s) \, d_s \left[\frac{s - v}{[r_\zeta^2(t) + (s - v)^2]^{1/2}} \right] d_t\theta_\zeta(t) \right| \leqq$$

$$\leqq \left| \int_{a+\delta_1}^b \int_{v+\delta}^{\infty} f(t, s) \, d_s \left[\frac{s - u}{[r_z^2(t) + (s - u)^2]^{1/2}} - \frac{s - v}{[r_\zeta^2(t) + (s - v)^2]^{1/2}} \right] d_t\theta_z(t) \right| +$$

$$+ \left| \int_{a+\delta_1}^b \int_{v+\delta}^{\infty} f(t, s) \, d_s \left[\frac{s - v}{[r_\zeta^2(t) + (s - v)^2]^{1/2}} \right] d_t(\theta_z(t) - \theta_\zeta(t)) \right| +$$

$$+ \left| \int_a^{a+\delta_1} \int_{v+\delta}^{\infty} f(t, s) \, d_s \left[\frac{s - u}{[r_z^2(t) + (s - u)^2]^{1/2}} \right] d_t\theta_z(t) \right| +$$

$$+ \left| \int_a^{a+\delta_1} \int_{v+\delta}^{\infty} f(t, s) \, d_s \left[\frac{s - v}{[r_\zeta^2(t) + (s - v)^2]^{1/2}} \right] d_t\theta_\zeta(t) \right| .$$

Zvolme libovolně $\varepsilon > 0$ a očíslujme výrazy v absolutních hodnotách na pravé straně odhadu postupně I–IV. Z trojúhelníkové nerovnosti plyne pro všechna $t \in \langle a, b \rangle$

(2.13) $$|r_z(t) - r_\zeta(t)| \leqq |z - \zeta| \leqq d ,$$

z čehož vyplývá, že pro $d \to 0_+$ je $r_z \to r_\zeta$ stejnoměrně v $\langle a, b \rangle$. Jelikož r_ζ je spojitá funkce, $r_\zeta(a) = 0$, $r_\zeta(t) > 0$ pro $t \in (a, b\rangle$, lze volit δ_1 tak, že platí

(2.14) $$\max \{r_\zeta^2(t);\, t \in \langle a, a + \delta_1 \rangle\} \leqq \tfrac{1}{2}\varepsilon\delta^2 .$$

Označíme ještě

(2.15) $$\min \{r_\zeta(t);\, t \in \langle a + \delta_1, b \rangle\} = 2m > 0 .$$

Vzhledem ke stejnoměrné konvergenci, plynoucí z (2.13), existuje $d_1 > 0$ tak, že pro $d \leqq d_1$, tj. pro příslušná $z \in M$

(2.16) $$\max \{r_z^2(t);\, t \in \langle a, a + \delta_1 \rangle\} \leqq \varepsilon\delta^2 ,$$

$$\min \{r_z(t);\, t \in \langle a + \delta_1, b \rangle\} \geqq m .$$

Provedeme nyní dílčí odhady; podle lemmatu 2.1 platí

$$|\mathrm{IV}| \leqq \|f\| \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon\delta^2}{\delta^2} \cdot v^K(\zeta) \leqq \|f\| \, \varepsilon c .$$

Z lemmatu 2.1 vyplývá dále při $v - u = \Delta < \frac{1}{2}\delta$,

$$|\mathrm{III}| \leqq \|f\| \cdot 4 \cdot \frac{\varepsilon\delta^2}{\delta^2} \cdot v^K(z) \leqq 4 \cdot \|f\| \, \varepsilon c \, .$$

Vzhledem ke zřejmé nerovnosti $|u - v| \leqq d$ obdržíme užitím lemmatu 2.2

$$|\mathrm{I}| \leqq \|f\| \cdot 4 \cdot \frac{2d}{m} \cdot v^K(z) \leqq 8 \cdot \|f\| \cdot \frac{dc}{m} \, .$$

Konečně užitím (1.11) na $\psi|_{\langle a+\delta_1, b\rangle}$ obdržíme

$$|\mathrm{II}| \leqq 2 \cdot \|f\| \, dm^{-1}(2m)^{-1} \operatorname{var}[\psi; \langle a + \delta_1, b\rangle] \leqq \|f\| \, d \cdot \frac{\lambda K}{m^2} \, .$$

Shrnutím těchto částečných odhadů vzhledem k možnosti volby ε a $d \to 0_+$ obdržíme dokazované tvrzení (2.11) pro případ $\psi^{-1}(\zeta) = \{a\}$. Podobným způsobem lze tvrzení dokázat v případě $\psi^{-1}(\zeta) = \{b\}$. Konečně v případě $\psi^{-1}(\zeta) = \{t_0\}$, $t_0 \in (a, b)$ (na tento případ lze též převést ve smyslu poznámky 1.2 i případ uzavřené křivky K) aplikujeme předešlé postupy v každém z intervalů $\langle a, t_0\rangle$ a $\langle t_0, b\rangle$ zvlášť. Tím je vztah (2.11) dokázán.

2.6. Lemma. *Nechť je dána ψ, splňující podmínky (1.1) a (1.2), $\psi(\langle a, b\rangle) = K$ a $f \in C(\mathscr{H})$ takové, že $f(t, s)$ je pro každé $t \in \langle a, b\rangle$ konstantní funkcí proměnné s. Potom pro libovolný bod $[z; u]$, $z \notin K$, platí*

$$w^{\psi}(f; z, u) = 2 \int_a^b f(t, s) \, \mathrm{d}_t \theta_z(t) \, , \tag{2.17}$$

tj. $w^{\psi}(f; z, u)$ rovněž nezávisí na „druhé“ proměnné. Hodnoty této funkce lze určit jako hodnoty logaritmického potenciálu dvojvrstvy s hustotou $2f$.

Důkaz. Dosadíme do (2.1) a provedením vnitřní integrace obdržíme formuli (2.17).

Této souvislosti s logaritmickým potenciálem využijeme podstatně již v následující větě:

2.7. Věta. *Nechť ψ splňuje podmínky (1.1) a (1.2), $K = \psi(\langle a, b\rangle)$, $\zeta \in K$. Nechť $\gamma \in E_1$, $\gamma' \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ a nechť existují konstanty $\delta > 0$, $R > 0$ tak, že platí*

$$(|\gamma - \beta| < \delta, \ 0 < r < R) \Rightarrow \zeta \pm r \exp i\beta \notin K \, .$$

Jestliže pro libovolnou funkci $f \in C(\mathscr{H})$ platí

$$\limsup_{\varrho \to 0_+} |w^{\psi}(f; \zeta + \varrho \exp i\gamma, v + \varrho \operatorname{tg} \gamma')| < +\infty \, , \tag{2.18}$$

(speciálně je-li pro každou $f \in C(\mathscr{H})$)

$$\lim_{\varrho \to 0_+} w^{\psi}(f; \zeta + \varrho \exp i\gamma, v + \varrho \operatorname{tg} \gamma') \neq \pm\infty) \, , \tag{2.19}$$

potom je

$$v^K(\zeta) < +\infty\,, \tag{2.20}$$

$$\sup_{r>0} r^{-1} u_r^K(\zeta) < +\infty\,. \tag{2.21}$$

Důkaz. Pro třídu funkcí $f \in C(\mathscr{H})$, které jsou pro každé $t \in \langle a, b\rangle$ konstantními funkcemi s lze (2.18) vhodně upravit. Pro každou funkci f z této třídy je možno výraz v absolutní hodnotě na levé straně nerovnosti (2.18) nahradit podle lemmatu 2.6 logaritmickým potenciálem dvojvrstvy; po této úpravě platí (2.18) pro každou $f_1 \in C(\langle a, b\rangle)$. Porovnáme-li nyní předpoklady dokazované věty a věty 2.4 z [1], je zřejmé, že lze tuto větu použít a tak dokončit důkaz tvrzení 2.7.

2.8. Poznámka. Podobně jako v poznámce 2.5 v [1] lze ukázat, že v předešlé větě 2.7 stačí např. předpokládat, že limita (2.18) je konečná pro všechny $f \in C(\mathscr{H})$, nezávislé na druhé proměnné, které se vesměs anulují pro pevnou konečnou množinu hodnot $t \in \langle a, b\rangle$.

V [1] je dále ukázáno, jak lze hodnotu limity logaritmického potenciálu pro danou hustotu f za předpokladu (2.20) a (2.21) vypočíst. Odvodíme analogické formule i pro w^ψ.

2.9. Věta. *Nechť ψ splňuje (1.1) a jest prostá. Nechť $\zeta \in K = \psi(\langle a, b\rangle)$ a nechť platí (2.20) a (2.21). Je-li $\psi^{-1}(\zeta) = a$ a $\tau_K^+(a) = \exp i\alpha$ (viz 1.15), platí pro libovolnou $f \in C(\mathscr{H})$*

$$\lim_{\varrho \to 0+} w^\psi(f; \zeta + \varrho \exp i\gamma, v + \varrho \operatorname{tg} \gamma') = w^\psi(f; \zeta, v) + 2f(a, v)(\pi + \alpha - \gamma) \tag{2.22}$$

stejnoměrně pro $\gamma \in \langle \alpha_1, \alpha_2\rangle$, $\gamma' \in \langle \beta_1, \beta_2\rangle$, kde $\alpha < \alpha_1 \leqq \alpha_2 < \alpha + 2\pi$, $-\frac{1}{2}\pi < \beta_1 \leqq \beta_2 < \frac{1}{2}\pi$.

Důkaz. Předpoklad (2.20) zaručuje již existenci $\tau_K^+(a)$; podle 2.6 se opět předchozí tvrzení redukuje pro případ, kdy $f \in C(\mathscr{H})$ a $f(t, s)$ je konstantní funkcí s pro každé $t \in \langle a, b\rangle$, na tvrzení o logaritmickém potenciálu označené v [1] jako tvrzení 2.9.

Libovolnou funkci $f \in C(\mathscr{H})$ rozložíme nyní na součet funkcí $f_1, f_2 \in C(\mathscr{H})$, které jsou určeny takto

$$f_1(t, u) = f(t, v) \quad \text{pro každé} \quad t \in \langle a, b\rangle\,, \quad u \in E_1\,, \tag{2.23}$$

$$f_2 = f - f_1\,.$$

Jelikož zřejmě platí $w^\psi(f; \ldots) = w^\psi(f_1; \ldots) + w^\psi(f_2; \ldots)$, stačí dokázat (2.22) pro každou z funkcí f_1, f_2 zvlášť.

V [1], v důkazu věty 2.9, jest též dokázáno, že předpoklady (2.20) a (2.21) zaručují omezenost funkce v^K pro $z \in \bar{P}_r$, kde

$$P_r = \{z;\, z = \zeta + \varrho \exp i\gamma,\, \alpha_1 \leqq \gamma \leqq \alpha_2,\, 0 < \varrho < r\}\,, \tag{2.24}$$

pro dostatečně malé $r > 0$. Zvolme toto r pevně a položme

$$\sup \{v^K(z);\ z \in \bar{P}_r\} = c < +\infty .$$

Zatím co funkce f_1 je nezávislá na „druhé" proměnné, funkce f_2 splňuje vztah $f_2(t, v) = 0$ pro libovolné $t \in \langle a, b \rangle$. K libovolnému $\varepsilon > 0$ tak existuje $\delta_2 > 0$ tak, že platí

$$[t, s] \in \langle a, b \rangle \times \langle v - \delta_2, v + \delta_2 \rangle \Rightarrow |f(t, s)| < \varepsilon .$$

Využijeme-li (2.2) a předešlých odhadů, obdržíme snadno pro $z \in P_r$

$$\left| \int_a^b \int_{v-\delta_2}^{v+\delta_2} f_2(t, s)) \, \mathrm{d}_s \left[\frac{s - u}{[r_z^2(t) + (s - u)^2]^{1/2}} \right] \mathrm{d}_t \theta_z(t) - \right.$$
$$\left. - \int_a^b \int_{v-\delta_2}^{v+\delta_2} f_2(t, s) \, \mathrm{d}_s \left[\frac{s - v}{[r_\zeta^2(t) + (s - v)^2]^{1/2}} \right] \mathrm{d}_t \theta_\zeta(t) \right| \leqq$$
$$\leqq \left| \int_a^b \int_{v-\delta_2}^{v+\delta_2} f_2(t, s) \ldots \right| + \left| \int_a^b \int_{v-\delta_2}^{v+\delta_2} f_2(t, s) \ldots \right| \leqq 4c\varepsilon .$$

Tento vztah spolu s lemmatem 2.5 dává pro f_2

(2.25) $$\lim_{\varrho \to 0+} w^\psi(f_2; \zeta + \varrho \exp i\gamma, v + \varrho \operatorname{tg} \gamma') = w^\psi(f_2; \zeta, v) .$$

Pro f_1 podle 2.4 v [1] platí

(2.26) $$\lim_{\varrho \to 0+} w^\psi(f_1; \zeta + \varrho \exp i\gamma, v + \varrho \operatorname{tg} \gamma') = w^\psi(f_1; \zeta, v) + 2f(a, v)(\pi + \alpha - \gamma) .$$

Odtud spolu s (2.25) plyne již platnost (2.22).

2.10. Věta. *Nechť ψ splňuje (1.1) a jest prostá; nechť $\zeta \in K = \psi(\langle a, b \rangle)$ a nechť platí (2.20) a (2.21). Je-li $\psi^{-1}(\zeta) = \{b\}$ a $\tau_K^-(b) = \exp i\alpha$ (viz 1.15), platí pro libovolnou $f \in C(\mathscr{H})$*

(2.27) $$\lim_{\varrho \to 0+} w^\psi(f; \zeta + \varrho \exp i\gamma, v + \varrho \operatorname{tg} \gamma') = w^\psi(f; \zeta, v) + 2f(b, v)(\gamma - \alpha - \pi)$$

stejnoměrně pro $\gamma \in \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$, $\gamma' \in \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$ kde $\alpha < \alpha_1 \leqq \alpha_2 < \alpha + 2\pi$, $-\frac{1}{2}\pi < \beta_1 \leqq \beta_2 < \frac{1}{2}\pi$.

D ů k a z. Nahradíme-li ψ funkcí $\tilde{\psi}$, $\tilde{\psi}(t) = \psi(-t)$ pro $t \in \langle -b, -a \rangle$ a funkci f funkcí $\tilde{f}$, $\tilde{f}(t, u) = f(-t, u)$ pro $t \in \langle -b, -a \rangle$, $u \in E_1$, potom platí

$$w^{\tilde{\psi}}(\tilde{f}; z, u) = -w^\psi(f; z, u)$$

a tvrzení plyne z předešlé věty.

2.11. Věta. *Nechť ψ splňuje (1.1) a (1.2); nechť $\zeta \in K = \psi(\langle a, b \rangle)$ a nechť platí (2.20) a (2.21).*

Je-li $\psi^{-1}(\zeta) = \{t_0\}$, $t_0 \in (a, b)$ *a označíme-li* (*viz* 1.15)

$$\tau_K^+(t_0) = \exp i\alpha_+\,, \quad \tau_K^-(t_0) = \exp i\alpha_-\,,$$

(*lze předpokládat* $\alpha_+ \leqq \alpha_- < \alpha_+ + 2\pi$), $\Delta = \pi - (\alpha_- - \alpha_+)$, *platí pro libovolnou* $f \in C(\mathscr{H})$

$$(2.28) \quad \lim_{\varrho \to 0+} w^\psi(f; \zeta + \varrho \exp i\gamma, v + \varrho \operatorname{tg} \gamma') = w^\psi(f; \zeta, v) + 2f(t_0, v)(\pi + \Delta)$$

stejnoměrně pro $(\gamma, \gamma') \in F_1 \times F_2$, *kde* F_1 *je kompaktní v* (α_+, α_-), F_2 *kompaktní v* $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$,

$$(2.29) \quad \lim_{\varrho \to 0+} w^\psi(f; \zeta + \varrho \exp i\gamma, v + \varrho \operatorname{tg} \gamma') = w^\psi(f; \zeta, v) - 2f(t_0, v)(\pi - \Delta)$$

stejnoměrně pro $(\gamma, \gamma') \in F_1' \times F_2'$, *kde* F_1' *je kompaktní v* $(\alpha_-, \alpha_+ + 2\pi)$ *a* F_2' *kompaktní v* $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$.

Důkaz. Schéma důkazu je stejné jako důkaz tvrzení 2.11 v [1]. Dokážeme např. formuli (2.29).

Položíme $\varphi = \psi|_{\langle a, t_0 \rangle}$, $\omega = \psi|_{\langle t_0, b \rangle}$. Nechť $(\gamma, \gamma') \in F_1' \times F_2'$. Potom

$$F_1' \subset (\alpha_-, \alpha_+ + 2\pi) \subset (\alpha_-, \alpha_- + 2\pi) \quad \text{a} \quad F_1' \subset (\alpha_-, \alpha_+ + 2\pi) \subset (\alpha_+, \alpha_+ + 2\pi)\,,$$

tj. podle předešlých vět platí pro $(\gamma, \gamma') \in F_1' \times F_2'$

$$\lim_{\varrho \to 0+} w^\omega(f; \zeta + \varrho \exp i\gamma, v + \varrho \operatorname{tg} \gamma') = w^\omega(f; \zeta, v) + 2f(t_0, v)(\pi + \alpha_+ - \gamma)\,,$$

$$\lim_{\varrho \to 0+} w^\varphi(f; \zeta + \varrho \exp i\gamma, v + \varrho \operatorname{tg} \gamma') = w^\varphi(f; \zeta, v) + 2f(t_0, v)(\gamma - \alpha_- - \pi)\,.$$

Vzhledem k rovnosti $w^\psi(f; \ldots) = w^\omega(f; \ldots) + w^\varphi(f; \ldots)$ plyne odtud sečtením a úpravou formule (2.29).

Připomeňme ještě, že případ uzavřené křivky K lze převést v souhlasu s poznámkou 1.2 na případ vyšetřovaný v této větě.

Vzhledem k tomu, že chceme ještě rozšířit tento výsledek na omezené válcové plochy, položíme $\mathscr{H}_0 = \langle a, b \rangle \times \langle u_1, u_2 \rangle$, kde $\langle u_1, u_2 \rangle$ je nedegenerovaný uzavřený interval v E_1. Pro funkce $f \in C(\mathscr{H}_0)$ resp. $f \in C_0(\mathscr{H}_0)$ (viz část 1) definujeme

$$(2.30) \qquad w_0^\psi(f; z, u) = \int_a^b \int_{u_1}^{u_2} f(t, s)\, \mathrm{d}_s \left[\frac{s - u}{[r_z^2(t) + (s - u)^2]^{1/2}} \right] \mathrm{d}_t \theta_z(t)\,.$$

Pro funkce $f \in C(\mathscr{H}_0)$, pro něž platí $f(t, u_1) = f(t, u_2) = 0$ pro všechna $t \in \langle a, b \rangle$, neobdržíme nic nového – každou tuto funkci lze rozšířit spojitě na $\mathscr{H}$ tak, že ji dodefinujeme mimo $\mathscr{H}_0$ hodnotou 0. Předešlá tvrzení pak zůstanou v platnosti s tím, že můžeme místo w^ψ psát w_0^ψ. Avšak i pro libovolnou $f \in C(\mathscr{H}_0)$ lze dokázat analogická tvrzení, jako jsou 2.9, 2.10 a 2.11. Dokážeme pouze jedno; platí

2.12. Věta. *Tvrzení* 2.11 *zůstane v platnosti, doplníme-li předpoklady o* $v \in$

$\in (u_1, u_2)$ *a ve formulích* (2.28) *a* (2.29) *nahradíme* w^ψ *operátorem* w_0^ψ, *definovaným* v (2.30).

Důkaz. Funkci $f \in C(\mathscr{H}_0)$ lze se zachováním normy spojitě rozšířit na $\mathscr{H}$; zvolme pevně jednu z takto vytvořených funkcí a označme ji $\tilde{f}$. Pro funkci $\tilde{f}$ platí formule (2.28) a (2.29). Je tedy např.

$$\lim_{\varrho \to 0+} w^\psi(\tilde{f}; \zeta + \varrho \exp i\gamma, v + \varrho \operatorname{tg} \gamma') = w^\psi(\tilde{f}; \zeta, v) + 2\tilde{f}(t_0, v)(\pi + \Delta) .$$

Dále platí (stejnoměrně v příslušném oboru)

$$\lim_{\varrho \to 0+} \{(w^\psi(\tilde{f}; \zeta + \varrho \exp i\gamma, v + \varrho \operatorname{tg} \gamma') - w_0^\psi(\tilde{f}; \zeta + \varrho \exp i\gamma, v + \varrho \operatorname{tg} \gamma')) - \\ - (w^\psi(\tilde{f}; \zeta, v) - w_0^\psi(\tilde{f}; \zeta, v))\} = 0 .$$

To vyplývá rozepsáním výrazů v integrálním tvaru; potom užijeme lemmatu 2.5, kde položíme za δ hodnotu $v - u_1 > 0$ resp. $u_2 - v > 0$. Z těchto dvou vztahů již plyne 2.12 pro $\tilde{f}$, avšak v oboru $\mathscr{H}_0$ platí $f = \tilde{f}$, čímž je 2.12 dokázáno.

3.

V této části vyšetříme chování tepelného potenciálu dvojvrstvy. V tomto případě má funkce $G(R, Q)$ z (1.16) tvar (označíme opět $Q \equiv [z_0; u_0]$, $R \equiv [z; u]$)

$$G(R, Q) = \begin{cases} (u_0 - u)^{-1} \exp\left[-\dfrac{|z - z_0|^2}{4(u_0 - u)}\right] & \text{pro} \quad u < u_0 \\ 0 & \text{pro} \quad u \geqq u_0 \end{cases} .$$

Budeme záměrně užívat stejného označení jako v druhé části; tvrzení tak budou mít stejnou formální strukturu, ale nový obsah a bude je nutné dokazovat trochu jiným způsobem.

Nechť je nejprve ψ opět absolutně spojitá; potom dosazením do (1.16) obdržíme

$$W^\psi(F; Q) = \int_a^b \int_{-\infty}^{u_0} F(\psi_1(t), \psi_2(t), u) \exp\left[-\frac{|\psi(t) - z_0|^2}{4(u_0 - u)}\right] . \\ . \frac{\psi_2'(t)\,[\psi_1(t) - x_0] - \psi_1'(t)\,[\psi_2(t) - y_0]}{2(u_0 - u)^2}\, du\, dt .$$

Jestliže $z_0 \notin K$, r_{z_0} a θ_{z_0} mají již známý význam a f odpovídá F podle (1.17), lze ještě upravit formuli dále

$$W^\psi(F; Q) = w^\psi(f; z_0, u_0) = \int_a^b \int_{-\infty}^{u_0} f(t, u) \exp\left[-\frac{r_{z_0}^2(t)}{4(u_0 - u)}\right] \frac{r_{z_0}^2(t)\, \theta_{z_0}'(t)}{2(u_0 - u)}\, du\, dt = \\ = 2\int_a^b \left(\int_{-\infty}^{u_0} f(t, s)\, d_s \left[-\exp\left(-\frac{r_{z_0}^2(t)}{4(u_0 - s)}\right)\right]\right) d_t\, \theta_{z_0}(t) .$$

Poslední výraz má opět smysl i bez absolutní spojitosti funkce ψ. Předpokládejme tedy, že ψ splňuje (1.1) a (1.2). Pro funkce $f \in C(\mathscr{H})$ resp. $f \in C_0(\mathscr{H})$ budeme vyšetřovat vlastnosti funkce

$$w^{\psi}(f; z_0, u_0) = 2\int_a^b \int_{-\infty}^{u_0} f(t, s) \, \mathrm{d}_s \left[- \exp\left(- \frac{r_{z_0}^2(t)}{4(u_0 - s)} \right) \right] \mathrm{d}_t \theta_{z_0}(t) \,. \tag{3.1}$$

(V případě $z_0 \in K$ učiníme tutéž dohodu o významu předešlé formule jako ve druhé části.)

Funkce

$$- \exp\left[- \frac{r_{z_0}^2(t)}{4(u_0 - s)} \right]$$

je pro libovolné $z_0 \notin K$, $t \in \langle a, b \rangle$ monotonní funkcí $s \in (-\infty, u_0\rangle$ a je

$$\operatorname{var}_s \left[- \exp\left(- \frac{r_{z_0}^2(t)}{4(u_0 - s)} \right); \ (-\infty, u_0\rangle \right] = 1 \,. \tag{3.2}$$

Lze tedy opět odhadnout

$$|w^{\psi}(f; z_0, u_0)| \leqq 2 \,.\, \|f\| \, v^K(z_0) \,.$$

Odvodíme opět několik lemmat, která budou mít stejný význam pro w^{ψ} v tomto případě, jako věty a lemmata 2.1–2.6 pro Newtonovský potenciál.

3.1. Lemma. *Pro $r \geqq 0$, $\delta > 0$ platí*

$$\operatorname{var}_x \left[- \exp\left(- \frac{r^2}{4x} \right); \ \langle \delta, +\infty) \right] \leqq \frac{r^2}{4\delta} \,. \tag{3.3}$$

Je-li dále $|\Delta| \leqq \frac{1}{2}\delta$, platí

$$\operatorname{var}_x \left[- \exp\left(- \frac{r^2}{4(x + \Delta)} \right); \ \langle \delta, +\infty) \right] \leqq \frac{r^2}{2\delta} \,. \tag{3.4}$$

Důkaz. Vyšetřovaná funkce v (3.3) je monotonní a žádanou formuli obdržíme snadno odhadem skutečné hodnoty vyšetřovaného výrazu. Vzorec (3.4) obdržíme z (3.3) substitucí.

3.2. Lemma. *Je-li $\delta > 0$, $|\Delta| < \frac{1}{2}\delta$ a dále $M \geqq r_i \geqq m > 0$, $i = 1, 2$ platí*

$$\operatorname{var}_x \left[\exp\left(- \frac{r_1^2}{4x} \right) - \exp\left(- \frac{r_2^2}{4x} \right); \ \langle \delta, +\infty) \right] \leqq \frac{4 \,.\, M \,.\, |r_1 - r_2|}{m^2} \,, \tag{3.5}$$

$$\operatorname{var}_x \left[\exp\left(- \frac{r_2^2}{4(x + \Delta)} \right) - \exp\left(- \frac{r_2^2}{4x} \right); \ \langle \delta, +\infty) \right] \leqq \frac{5|\Delta|}{m^2} \,. \tag{3.6}$$

Důkaz. Označíme funkci, vyšetřovanou v (3.5) symbolem h_1. Odhadneme její variaci na intervalu $(0, +\infty)$; funkce h_1 je v tomto intervalu spojitá, lze ji spojitě rozšířit i do bodu 0. Platí $\lim_{x\to 0+} h_1(x) = \lim_{x\to+\infty} h_1(x) = 0$. Funkce h_1' má v intervalu $(0, +\infty)$ jediný nulový bod

$$x_0 = \frac{r_2^2 - r_1^2}{8(\log r_2 - \log r_1)}.$$

Z průběhu funkce h_1 tedy vyplývá odhad

$$\operatorname{var}_x [h_1(x); (0, +\infty)] = 2|h_1(x_0)| = 2 \exp\left(-\frac{r_1^2}{4x_0}\right). \left|1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right| \leqq$$

$$\leqq \frac{2|r_1^2 - r_2^2|}{r_2^2} \leqq \frac{4 \,.\, M \,.\, |r_1 - r_2|}{m^2},$$

ze kterého plyne žádaný odhad (3.5).

Podobně označíme h_2 funkci, vyšetřovanou v (3.6) a opět odhadneme její variaci na intervalu $(0, +\infty)$. V tom případě předpokládejme $\Delta \geqq 0$. Označíme

$$h(x) = \exp\left(-\frac{r_2^2}{4x}\right);$$

platí

$$\lim_{x\to 0+} h_2(x) > 0\,, \quad \lim_{x\to+\infty} h_2(x) = 0\,, \quad \lim_{x\to 0+} h'(x) = \lim_{x\to+\infty} h'(x) = 0$$

a dále

$$h_2(x) = h(x + \Delta) - h(x)\,, \quad h_2'(x) = h'(x + \Delta) - h'(x)\,.$$

Zřejmě je též $h'(x) > 0$ pro $x \in (0, +\infty)$ a h' nabývá na tomto intervalu svého maxima v bodě $x_1 = \frac{1}{8}r_2^2$. Snadno nyní zjistíme, že funkce h_2' má právě jeden nulový bod x_2 v intervalu $(x_1 - \Delta, x_1)$. Z průběhu funkce h_2 lze tedy odhadnout hodnotu hledané variace hodnotou $2h_2(x_2)$. Z věty o střední hodnotě odhadneme

$$h_2(x) \leqq h(x_1)\,\Delta = \frac{16}{r_2^2} \exp(-2)\,\Delta \leqq 2{,}2 \,.\, \frac{\Delta}{m^2}\,.$$

Odtud již plyne (3.6) pro $\Delta \geqq 0$, pro $\Delta \leqq 0$ užijeme ještě jednoduché substituce.

Užitím (3.5), (3.6) a (2.9) obdržíme

3.3. Lemma. *Nechť je $\delta > 0$, $|\Delta| < \frac{1}{2}\delta$, $M \geqq r_i \geqq m > 0$, $i = 1, 2$. Potom platí*

$$\operatorname{var}_x\left[\exp\left(-\frac{r_2^2}{4(x + \Delta)}\right) - \exp\left(-\frac{r_1^2}{4x}\right);\ \langle\delta, +\infty)\right] \leqq \tag{3.7}$$

$$\leqq 5 \,.\, \frac{|\Delta| + M|r_1 - r_2|}{m^2}\,.$$

3.4. Lemma. *Nechť je dána funkce ψ, splňující (1.1) a (1.2), $\psi(\langle a, b\rangle) = K$, $f \in C(\mathscr{H})$ a nechť $\zeta \in K$ je hromadným bodem množiny $M \subset E_2 - K$, pro niž platí*

$$\sup \{v^K(z); z \in M\} = c < +\infty .$$

Označíme-li dále $Q \equiv [z; u]$, $P \equiv [\zeta; v]$, $|P - Q| = d$, platí pro libovolné $\delta > 0$

$$\lim_{\substack{d \to 0+ \\ z \in M}} \left| \int_a^b \int_{-\infty}^{v-\delta} f(t, s) \, d_s \left[- \exp \left(- \frac{r_z^2(t)}{4(u - s)} \right) \right] d_t \theta_z(t) - \right.$$
$$\left. - \int_a^b \int_{-\infty}^{v-\delta} f(t, s) \, d_s \left[- \exp \left(- \frac{r_\zeta^2(t)}{4(v - s)} \right) \right] d_t \theta_\zeta(t) \right| = 0 . \tag{3.8}$$

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že K je jednoduchý oblouk a $\psi^{-1}(\zeta) = \{a\}$. Pro dostatečně malá $\delta_1 > 0$ platí odhad

$$\left| \int_a^b \int_{-\infty}^{v-\delta} f(t, s) \, d_s \left[- \exp \left(- \frac{r_z^2(t)}{4(u - s)} \right) \right] d_t \theta_z(t) - \right.$$
$$\left. - \int_a^b \int_{-\infty}^{v-\delta} f(t, s) \, d_s \left[- \exp \left(- \frac{r_\zeta^2(t)}{4(v - s)} \right) \right] d_t \theta_\zeta(t) \right| \leqq$$
$$\leqq \left| \int_a^b \int_{-\infty}^{v-\delta} f(t, s) \, d_s \left[\exp \left(- \frac{r_\zeta^2(t)}{4(v - s)} \right) - \exp \left(- \frac{r_z^2(t)}{4(u - s)} \right) \right] d_t \theta_z(t) \right| +$$
$$+ \left| \int_{a+\delta_1}^b \int_{-\infty}^{v-\delta} f(t, s) \, d_s \left[- \exp \left(- \frac{r_\zeta^2(t)}{4(v - s)} \right) \right] d_t (\theta_z(t) - \theta_\zeta(t)) \right| +$$
$$+ \left| \int_a^{a+\delta_1} \int_{-\infty}^{v-\delta} f(t, s) \, d_s \left[- \exp \left(- \frac{r_\zeta^2(t)}{4(v - s)} \right) \right] d_t \theta_z(t) \right| +$$
$$+ \left| \int_a^{a+\delta_1} \int_{-\infty}^{v-\delta} f(t, s) \, d_s \left[- \exp \left(- \frac{r_\zeta^2(t)}{4(v - s)} \right) \right] d_t \theta_\zeta(t) \right| .$$

Zvolme libovolně $\varepsilon > 0$ a očíslujme opět výrazy v absolutních hodnotách na pravé straně předešlé nerovnosti postupně I–IV. Ze spojitosti r_ζ, $r_\zeta(a) = 0$ vyplývá možnost volby δ_1 tak, aby platilo

$$\max \{r_\zeta^2(t); t \in \langle a, a + \delta_1\rangle\} \leqq 4\delta\varepsilon . \tag{3.9}$$

Zároveň označíme

$$\min \{r_\zeta(t); t \in \langle a + \delta_1, b\rangle\} = 2m > 0 .$$

Uvážíme-li opět (2.13), existuje $d_1 > 0$ takové, že pro $|z - \zeta| \leqq d \leqq d_1$, tj. pro příslušná $z \in M$ je

$$\max \{r_z^2(t);\ t \in \langle a, a + \delta_1 \rangle\} \leqq 8\delta\varepsilon\ ,$$

$$\min \{r_z^2(t);\ t \in \langle a + \delta_1, b \rangle\} > m\ .$$

Nahlédneme nyní, že lze odhadnout

$$|\mathrm{III}| \leqq \|f\| \,.\, \frac{4\delta\varepsilon}{4\delta} \,.\, v^K(z) \leqq \|f\| \,.\, \varepsilon \,.\, c\ ,$$

$$|\mathrm{IV}| \leqq \|f\| \,.\, \varepsilon \,.\, c\ .$$

Dále pro $z \in U_{d_1}(\zeta)$ (viz (1.12)) a všechna $t \in \langle a, b \rangle$ existuje konstanta M taková, že lze odhadnout $|r_z(t)| \leqq M$, resp. $|r_\zeta(t)| \leqq M$, neboť křivka K je rektifikovatelná. Potom platí

$$|\mathrm{I}| \leqq \|f\| \,.\, 5 \,.\, \frac{d + Md}{m^2} \,.\, c \leqq 5 \,.\, \|f\| \,.\, \frac{(M + 1)}{m^2} \,.\, d\ .$$

K odhadu II užijeme (1.11) na $\psi|_{\langle a+\delta_1, b \rangle}$, čímž obdržíme

$$|\mathrm{II}| \leqq \|f\| \,.\, d \,.\, \frac{\lambda K}{m^2}\ .$$

Opět shrnutím těchto částečných odhadů obdržíme vzhledem k možnosti volby $\varepsilon > 0$ a $d \to 0_+$ tvrzení (3.8) pro $\psi^{-1}(\zeta) = \{a\}$. Podobně dostaneme (3.8) pro $\psi^{-1}(\zeta) = \{b\}$. Je-li $\psi^{-1}(\zeta) \leqq \{t_0\}$, $t_0 \in (a, b)$ (připomeňme poznámku 1.2 o uzavřené K), aplikujeme oba předešlé postupy v intervalech $\langle a, t_0 \rangle$ a $\langle t_0, b \rangle$. Tím je lemma 3.4 dokázáno.

V následující části využijeme formální shodnosti druhé a třetí části článku.

3.5. Lemma. *Je-li* w^ψ *dáno formulí* (3.1), *platí lemma* 2.6.

Důkaz je stejný jako u lemmatu 2.6 – s tím rozdílem, že se „vnitřní" integrace děje podle jiné funkce.

3.6. Věta. *Je-li* w^ψ *dáno formulí* (3.1), *platí věta* 2.7.

Důkaz opět probíhá stejně jako u 2.7, lemma 2.6 nahradíme 3.5.

Při změněném významu w^ψ si zachová svou platnost i poznámka 2.10; to je důležité pro případ uzavřené křivky K.

3.7. Věta. *Je-li* w^ψ *dáno formulí* (3.1), *platí věta* 2.9.

Důkaz. Využijeme opět vlastností logaritmického potenciálu a lemmatu 3.5.

Libovolnou $f \in C(\mathscr{H})$ rozložíme opět podle (2.21) na součet funkcí f_1, f_2; postupujeme stejně až k volbě $\delta_2 > 0$ takového, že platí

$$[t, s] \in \langle a, b\rangle \times \langle v - \delta_2, v + \delta_2\rangle \Rightarrow |f_2(t, s)| < \varepsilon .$$

Je-li nyní $|u - v| < \delta_2$, můžeme stejně jako v (3.3) odhadnout

$$\left| \int_a^b \int_{v-\delta_2}^u f_2(t, s) \, \mathrm{d}_s \left[- \exp\left(- \frac{r_z^2(t)}{4(u - s)} \right) \right] \mathrm{d}_t \theta_z(t) - \right.$$
$$\left. - \int_a^b \int_{v-\delta_2}^v f_2(t, s) \, \mathrm{d}_s \left[- \exp\left(- \frac{r_\zeta^2(t)}{4(v - s)} \right) \right] \mathrm{d}_t \theta_\zeta(t) \right| \leqq$$
$$\leqq \left| \int_a^b \int_{v-\delta_2}^u f_2(t, s) \ldots \right| + \left| \int_a^b \int_{v-\delta_2}^v f_2(t, s) \ldots \right| \leqq 2c \,.\, \varepsilon \,.$$

Tento vztah spolu s lemmatem 3.4 dává (zde je nutno příslušné vztahy násobit 2) pro f_2

$$\lim_{\varrho \to 0+} w^\psi(f_2; \zeta + \varrho \exp i\gamma, v + \varrho \operatorname{tg} \gamma') = w^\psi(f_2; \zeta, v) ;$$

to jest však již formule (2.25); (2.26) pro f_1 na základě 3.5 platí a tak závěr důkazu je opět stejný a (2.22) platí i při novém významu w^ψ.

3.8. Věta. *Je-li w^ψ dáno formulí* (3.1), *platí věta* 2.10.

Důkaz je týž jako v případě věty 2.10.

Rovněž zcela analogicky z vět 3.7 a 3.8 plyne:

3.9. Věta. *Je-li w^ψ dáno formulí* (3.1), *platí věta* 2.11.

V případě vyšetřování omezených válcových ploch položíme pro $u \in (u_1, u_2)$

$$w_0^\psi(f; z, u) = \int_a^b \int_{u_1}^u f(t, s) \, \mathrm{d}_s \left[- \exp\left(- \frac{r_z^2(t)}{4(u - s)} \right) \right] \mathrm{d}_t \theta_z(t) \tag{3.10}$$

pro libovolnou $f \in C(\mathscr{H}_0)$ resp. $C_0(\mathscr{H}_0)$. Potom opět lze formulovat analogické tvrzení jako ve větě 2.12. Není na závadu, že (3.10) určuje pouze hodnoty w_0^ψ pro $Q \equiv [z; u]$, ležící ve vrstvě $u_1 < u < u_2$. Platí

3.10. Věta. *Je-li w_0^ψ dáno formulí* (3.10), *platí tvrzení* 2.11, *předpokládáme-li $v \in (u_1, u_2)$ a ve formulích* (2.28) *a* (2.29) *nahradíme symbol w^ψ symbolem w_0^ψ.*

Důkaz. Funkci $f \in C(\mathscr{H}_0)$ rozšíříme spojitě pro $u < u_1$ na $\mathscr{H}$; rozšíření na celé $\mathscr{H}$, tj. pro $u > u_2$ je zbytečné a je pouze formální záležitostí, neboť přes tuto část oboru neintegrujeme. Pro rozšířenou f – označme ji $\tilde{f}$ – formule (2.28) a (2.29) platí. Dále podle lemmatu 3.4 platí (stejnoměrně v příslušném oboru)

$$\lim_{\varrho \to 0+} \{(w^{\psi}(\tilde{f}; \zeta + \varrho \exp i\gamma, v + \varrho \operatorname{tg} \gamma') - w_0^{\psi}(\tilde{f}; \zeta + \varrho \exp i\gamma, v + \varrho \operatorname{tg} \gamma')) - $$
$$- (w^{\psi}(\tilde{f}; \zeta, v) - w_0^{\psi}(\tilde{f}; \zeta, v))\} = 0 .$$

Tyto výrazy stačí rozepsat v integrálním tvaru podle (3.1) a (3.10) a porovnat s 3.4 (klademe $v - u_1 = \delta$). Z těchto vztahů shrnutím plyne platnost 3.10 pro $\tilde{f}$, avšak na integračním oboru platí $f = f$ a tedy 3.10 platí i pro f.

4.

V této části pouze předešlé výsledky shrneme. Poznamenejme nejprve, že podle lemmatu 1.3 zůstanou tvrzení vět 2.9–2.12 a 3.7–3.10 v platnosti, nahradíme-li předpoklady

$$v^K(\zeta) < +\infty , \quad \sup_{r>0} r^{-1} u_r^K(\zeta) < +\infty \tag{4.1}$$

předpokladem

$$\sup \{v^K(z); z \in U_r(\zeta) \cap K\} < +\infty$$

pro jisté $r > 0$ (viz 1.12).

Vzhledem ke vztahu (1.17) lze pomocí vztahu $F(\zeta, v) = F(\psi(t), v) = f(t, v)$ převést vyšetřování $W^{\psi}(F; Q)$ na vyšetřovaný případ $w^{\psi}(f; z, u)$, a to pro newtonovský i tepelný potenciál dvojvrstvy. Na základě tohoto faktu formulujeme nejdůležitější výsledky i pro $W^{\psi}(F; Q)$.

4.1. Věta. *Nechť K je jednoduchá rektifikovatelná křivka, popsaná ve stejném smyslu jako v části 1 komplexní funkci ψ. Potom (4.1) jsou nutnými a postačujícími podmínkami pro existenci úhlových limit Newtonova a tepelného potenciálu dvojvrstvy $W^{\psi}(F; Q)$ pro libovolnou $F \in C(H)$, tj. limit tvaru*

$$\lim_{\varrho \to 0+} W^{\psi}(F; P + \varrho(Q - P)) , \tag{4.2}$$

kde $P \equiv [\zeta, v] \in H$; přitom musí existovat nedegenerovaný rotační dvojkužel s osou PQ a vrcholem P, který má v jistém okolí bodu P s plochou H společný pouze bod P. Je-li $H_0 = K \times \langle u_1, u_2 \rangle$, jsou (4.1) postačujícími podmínkami pro existenci úhlových limit (4.2) pro $W_0^{\psi}(F, Q)$ pro libovolnou $F \in C(H_0)$ v každém vnitřním bodě $P \equiv [\zeta, v] \in H_0$ (tj. $v \in (u_1, u_2)$).

Platnost tohoto tvrzení vyplývá z vět, obsažených v předešlých částech, s přihlédnutím k 2.9 pro případ uzavřené křivky K.

Literatura

[1] *J. Král:* Non-tangential limits of the double distribution, Czech. Mat. J. *14* (*89*) 1964, 455—482.

[2] *J. Král:* On the logaritmic potential of the double distribution, Czech. Mat. J. *14* (*89*) 1964, 306—321.

[3] *J. Král:* Some inequalities concerning the cyclic and radial variations of a plane path-curve, Czech. Mat. J. *14* (*89*) 1964, 271—280.

Adresa autora: Praha 1, Malostranské nám 25 (Matematicko-fyzikální fakulta KU).

Summary

ANGULAR LIMITS OF DOUBLE LAYER POTENTIALS

JIŘÍ VESELÝ, Praha

Let ψ be a continuous complex-valued function on a compact interval $\langle a, b\rangle$, $\psi(\langle a, b\rangle) = K$ and let

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{var}\left[\psi; \langle a, b\rangle\right] < +\infty ,$$

$$(a \leqq t_1 < t_2 \leqq b,\ t_2 - t_1 > b - a) \Rightarrow \psi(t_1) \neq \psi(t_2) .$$

We shall identify the set of all finite complex numbers with the Euclidean plane E_2. For $z \in E_2$, $r \in (0, +\infty\rangle$ let $r_z(t) = |\psi(t) - z|$ and denote by $\mathfrak{Y}_{r,z}$ the system of all components $\mathscr{J}$ of

$$\{t; t \in \langle a, b\rangle,\ 0 < |\psi(t) - z| < r\} .$$

$\theta_z^{\mathscr{J}}$ will be a fixed continuous branch of $\arg\left[\psi(t) - z\right]$ on $\mathscr{J} \in \mathfrak{Y}_{r,z}$. Now we can define for $z \in E_2$ the functions v_r^K, u_r^K by

$$v_r^K(z) = \sum_{\mathscr{J} \in \mathfrak{Y}_{r,z}} \operatorname{var}_t \left[\theta_z^{\mathscr{J}}; \mathscr{J}\right], \quad u_r^K(z) = \sum_{\mathscr{J} \in \mathfrak{Y}_{r,z}} \operatorname{var}_t \left[|\psi(t) - z|; \mathscr{J}\right] .$$

In case $r = +\infty$ we shall skip r in all symbols. Let $\mathscr{H} = \langle a, b\rangle \times E_1$ and denote by $C(\mathscr{H})$ the space of all bounded continuous functions f on $\mathscr{H}$ with the usual norm (in case $\psi(a) = \psi(b)$ we shall assume that $f(a, u) = f(b, u)$ whenever $u \in E_1$ and $f \in C(\mathscr{H})$). Let us define for every $f \in C(\mathscr{H})$ the function $w^{\psi}(f; z, u)$ of $[z; u]$ ($z \in E_2$, $u \in E_1$) by

$$\text{(2)} \qquad w^{\psi}(f; z, u) = \sum_{\mathscr{J} \in \mathfrak{Y}_r} \int_{\mathscr{J}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, s)\, \mathrm{d}_s \left[\frac{s - u}{(r_z^2(t) + (s - u)^2)^{1/2}}\right] \mathrm{d}_t \theta_z^{\mathscr{J}}(t)$$

or by

$$(3) \qquad w^{\psi}(f; z, u) = \sum_{\mathscr{I} \in \mathfrak{Y}_r} \int_{\mathscr{I}} \int_{-\infty}^{u} f(t, s) \, d_s \left[- \exp\left(- \frac{r_z^2(t)}{4(u-s)} \right) \right] d_t \theta_z^{\mathscr{I}}(t) .$$

We shall assume that the integrals on the right-hand sides exist end the sums are meaningful (the sums have no more than two terms for every $z \in E_2$).

Since the functions (2) and (3) have similar properties we denote them by the same symbol $w^{\psi}(f; z, u)$; the following theorems are valid for both cases (2) and (3). If $\zeta \in K$ and $v \in E_1$ we are interested in limits

$$\lim_{\substack{z \to \zeta \\ u \to v}} w^{\psi}(f; z, u)$$

for the special case of $[z; u]$ approaching $[\zeta; v]$.

Theorem 1. *Let ψ fulfil (1), $\zeta \in K$, $\gamma \in E_1$, $\gamma' \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$. Suppose that there exist constants $\delta > 0$, $R > 0$ such that*

$$(|\gamma - \beta| < \delta, \ 0 < r < R) \Rightarrow \zeta \pm r \exp i\beta \notin K .$$

If

$$\limsup_{\varrho \to 0+} |w^{\psi}(f; \zeta + \varrho \exp i\gamma, v + \varrho \operatorname{tg} \gamma')| < +\infty$$

(especially if

$$(4) \qquad \lim_{\varrho \to 0+} w^{\psi}(f; \zeta + \varrho \exp i\gamma, \ v + \varrho \operatorname{tg} \gamma') \neq \pm\infty$$

exists)
for every $f \in C(\mathscr{H})$, then

$$(5) \qquad v^K(\zeta) < +\infty , \quad \sup_{r > 0} r^{-1} u_r^K(\xi) < +\infty .$$

Further we put

$$\tau_K^+(t) = \lim_{u \to t+} \frac{\psi(u) - \psi(t)}{|\psi(u) - \psi(t)|} = \exp i\alpha_+(\psi(t)) \quad \text{for} \quad t \in \langle a, b) ,$$

$$\tau_K^-(t) = \lim_{u \to t-} \frac{\psi(u) - \psi(t)}{|\psi(u) - \psi(t)|} = \exp i\alpha_-(\psi(t)) \quad \text{for} \quad t \in (a, b\rangle$$

(if the limits exist). We can express the limit (4) as follows.

Theorem 2. *Assume (5). If $\psi^{-1}(\zeta) = \{a\}$, then $\tau_K^+(a) = \exp i\alpha$* exists and

$$\lim_{\varrho \to 0+} w^{\psi}(f; \zeta + \varrho \exp i\gamma, \ v + \varrho \operatorname{tg} \gamma') = w^{\psi}(f; \zeta, v) + 2f(a, v)(\pi + \alpha - \gamma)$$

(or: if $\psi^{-1}(\zeta) = \{b\}$, then $\tau_K^-(b) = \exp i\alpha$ exists and

$$\lim_{\varrho \to 0+} w^\psi(f; \zeta + \varrho \exp i\gamma,\ v + \varrho \operatorname{tg} \gamma') = w^\psi(f; \zeta, v) + 2f(b, v)(\gamma - \alpha - \pi))$$

for every $f \in C(\mathscr{H})$ and uniformly for $\gamma \in \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$, $\gamma' \in \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$, where $\alpha < \alpha_1 \leqq \leqq \alpha_2 < \alpha + 2\pi$, $-\frac{1}{2}\pi < \beta_1 \leqq \beta_2 < \frac{1}{2}\pi$.

If $\psi^{-1}(\zeta) = \{t_0\}$, $t_0 \in (a, b)$, then $\tau_K^+(t_0)$, $\tau_K^-(t_0)$ exist and we can choose α_+, α_- so that

$$\alpha_+ \leqq \alpha_- < \alpha_+ + 2\pi\,, \quad \tau_K^+(t_0) = \exp i\alpha_+\,, \quad \tau_K^-(t_0) = \exp i\alpha_-\,.$$

We put $\Delta = \pi - (\alpha_- - \alpha_+)$. Then, for every $f \in C(\mathscr{H})$,

$$\lim_{\varrho \to 0+} w^\psi(f; \zeta + \varrho \exp i\gamma,\ v + \varrho \operatorname{tg} \gamma') = w^\psi(f; \zeta, v) + 2f(t_0, v)(\pi + \Delta)$$

uniformly for $(\gamma, \gamma') \in F_1 \times F_2$ where F_1 is any compact in (α_+, α_-), F_2 is any compact in $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$,

$$\lim_{\varrho \to 0+} w^\psi(f; \zeta + \varrho \exp i\gamma,\ v + \varrho \operatorname{tg} \gamma') = w^\psi(f; \zeta, v) - 2f(t_0, v)(\pi - \Delta)$$

uniformly for $(\gamma, \gamma') \in F_1' \times F_2'$ where F_1' is any compact in $(\alpha_-, \alpha_+ + 2\pi)$, F_2' is any compact in $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$.

The functions $w^\psi(f; z, u)$ are used to express the Newtonian potential or the thermal-potential of the double distribution with bounded continuous density F on $H = K \times E_1$. Similar results are obtained for the case of potentials with continuous density F on $H_0 = K \times \langle u_1, u_2 \rangle$ where $\langle u_1, u_2 \rangle$ is any compact interval in E_1.