Časopis pro pěstování matematiky

Milan Koman

Poznámka k jedné definici topologických K-lineálů

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 83 (1958), No. 2, 156--159

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108313`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958), Praha

POZNÁMKA K JEDNÉ DEFINICI TOPOLOGICKÝCH K-LINEÁLŮ

MILAN KOMAN, Praha

DT: 513.831

(Došlo dne 10. prosince 1956)

V této poznámce je ukázáno, že pro topologické K-lineály definované v [1], poznámka 2, str. 19, neplatí tvrzení: *Ke každému okolí nuly U existuje takové okolí nuly V, že $0 \leqq a \leqq b$, $b \in V \Rightarrow a \in U$,* uvedené na téže straně.

J. Mařík v [1] nazývá topologickým K-lineálem K-lineál Y, v němž je definována topologie tak, že jsou při ní algebraické i svazové operace spojité a jednobodové množiny uzavřené.

Následující příklad ukazuje, že pro takto definované topologické K-lineály neplatí věta:

Ke každému okolí nuly U existuje okolí nuly V tak, že

$$0 \leqq a \leqq b\,, \quad b \in V \Rightarrow a \in U\,.$$

Příklad 1. Buď F množina všech spojitých funkcí v intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Buď G množina všech funkcí v intervalu $\langle 0, 1\rangle$, různých od nuly jen pro konečný počet bodů z intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Buď H množina všech funkcí $h = f + g$, kde $f \in F$, $g \in G$ (vyjádření je jednoznačné).

Množina H je zřejmě při obvyklé definici polouspořádání K-lineálem. Definujme v H normu. Pro $f \in F$ buď $\|f\| = \max\limits_{x \in \langle 0,1\rangle} |f(x)|$, pro $g \in G$ buď norma $\|g\| = \sum\limits_{x \in \langle 0,1\rangle} |g(x)|$, pro $h \in H$ buď pak $\|h\| = \|f\| + \|g\|$, kde $h = f + g$; $f \in F$ $g \in G$. Při takto definované normě je H topologickým K-lineálem.

Důkaz. K-lineál H je zřejmě normovaným lineárním prostorem. Je tedy výrazem $\varrho(a, b) = \|a - b\|$, kde $a, b \in H$, definována metrika, při níž jsou algebraické operace spojité (viz na př. větu 42 z [1]). Zbývá tedy dokázat, že i svazové operace jsou při dané normě spojité. Důkaz provedeme postupně.

1. *Je-li $h \in H$, $|h(x)| \leqq \varepsilon$ pro $x \in \langle 0, 1\rangle$ a má-li h nejvýše n bodů nespojitosti, je $\|h\| \leqq (2n + 1)\, \varepsilon$.*

Je-li totiž $h = f + g$; $f \in F$, $g \in G$, pak platí

$$|h(x)| \leqq \varepsilon \Rightarrow |f(x)| \leqq \varepsilon\,, \quad |g(x)| \leqq 2\varepsilon\,.$$

Tedy $\|h\| = \|f\| + \|g\| \leqq \varepsilon + 2n\varepsilon = (2n + 1)\,\varepsilon$.

2. *Je-li $g \in G$, $g_0 \in H$ a platí-li $|g_0(x)| \leqq |g(x)|$ pro $x \in \langle 0, 1\rangle$, potom je $g_0 \in G$ a platí* $\|g_0\| \leqq \|g\|$. Zřejmé.

3. *Operace $|h|$ je v každém bodě $h \in H$ spojitá.*

Nechť $h_0 \in H$ a nechť h_0 má n bodů nespojitosti. Buď $h \in H$, $h = f + g$; $f \in F$, $g \in G$. Pak

$$\||h_0| - |h_0 + h|\| \leqq \||h_0| - |h_0 + f|\| + \||h_0 + f| - |h_0 + h|\|\,.$$

Avšak $||h_0| - |h_0 + f|| \leqq |f| \leqq \|f\|$, tedy podle 1 je

$$\||h_0| - |h_0 + f|\| \leqq (2n + 1)\,\|f\|\,.$$

Dále je $||h_0 + f| - |h_0 + h|| \leqq |g| \leqq \|g\|$, tedy podle 2 je

$$\||h_0 + f| - |h_0 + h|\| \leqq \|g\|\,.$$

Celkem tedy

$$\||h_0| - |h_0 + h|\| \leqq (2n + 1)\,\|f\| + \|g\| \leqq (2n + 1)\,\|h\|\,.$$

4. *Svazové operace jsou v každém bodě $h \in H$ spojité.*

Nechť h, $h_0 \in H$, pak

$$h_0 \vee h = h_0 + (h - h_0)_+ = \tfrac{1}{2}(|h_0 - h| + h_0 + h)\,,$$
$$h_0 \wedge h = - [(- h_0) \vee (- h)]\,.$$

H je tedy topologickým K-lineálem, přes to v něm však neplatí výše uvedená věta. Stačí volit na př. $g(x) = \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) pro n hodnot $x \in \langle 0, 1\rangle$, jinak $g(x) = 0$ a $f(x) = 2\varepsilon$ pro $x \in \langle 0, 1\rangle$. Zřejmě nyní $0 \leqq g \leqq f$, ale zatím co $\|f\| = 2\varepsilon$, je $\|g\| = n\varepsilon$, což může být při daném $\varepsilon > 0$ libovolně velké (záleží na počtu bodů nespojitosti funkce g).

Neplatí-li však pro topologické K-lineály shora uvedená věta, neplatí pro ně ani celá řada jiných vět, o nichž bychom předpokládali, že pro ně budou platit, má-li mít totiž uvedená definice topologických K-lineálů rozumný význam. Jako příklad si ukážeme, že pro topologické K-lineály neplatí věta 46 b) a c) z [1].

Příklad 2. Buď H topologický K-lineál z příkladu 1. Definujme v něm funkcionálu J předpisem $J(h) = \sum_{x \in \langle 0, 1\rangle} g(x)$, kde $h = f + g$; $f \in F$, $g \in G$. Snadno se zjistí, že J je spojitou funkcionálou. $J(1)$ však není podle [1] regulární funkcionálou, neboť

$$J_+(1) = \sup_{0 \leqq h \leqq 1} J(h) = \infty\,.$$

Není tedy $C(H)$ (množina všech spojitých funkcionál na topologickém K-lineálu H) K-lineálem a neplatí též $C(H) \subset R(H)$ (množina všech regulárních funkcionál na K-lineálu H).

Buď Y K-lineál, ve kterém je definována topologie, při níž jsou algebraické a svazové operace spojité; buď $\mathfrak{V}$ systém všech okolí nuly. Řekneme, že Y má vlastnost T_1, jestliže ke každému okolí $U \in \mathfrak{V}$ existuje takové okolí $V \in \mathfrak{V}$, že $x - y \in V \Rightarrow x_+ - y_+ \in U$; řekneme, že Y má vlastnost T_2, jestliže ke každému $U \in \mathfrak{V}$ existuje takové $V \in \mathfrak{V}$, že $0 \leqq x \leqq y \in V \Rightarrow x \in U$. Na str. 19 v [1] je vlastně dokázáno, že z vlastnosti T_1 plyne vlastnost T_2; pokládá se však za zřejmé, že každý K-lineál s topologií, při níž jsou algebraické a svazové operace spojité a jednobodové množiny uzavřené, má vlastnost T_1. Avšak K-lineál H z našeho příkladu nemá vlastnost T_2 a nemůže tedy mít ani vlastnost T_1 (o čemž se lze snadno přesvědčit přímo).

Snadno se zjistí, že naopak také z vlastnosti T_2 plyne vlastnost T_1.

To dokážeme takto: Buď $U \in \mathfrak{V}$. Protože $x = x_+ - x_-$, $x_+ \leqq |x|$, $x_- \leqq |x|$, plyne z vlastnosti T_2 a ze spojitosti algebraických operací, že ke každému $U \in \mathfrak{V}$ existuje takové $U_1 \in \mathfrak{V}$, že $|x| \in U_1 \Rightarrow x \in U$. Z vlastnosti T_2 plyne dále existence takového $U_2 \in \mathfrak{V}$, že $0 \leqq x \leqq y \in U_2 \Rightarrow x \in U_1$. Ze spojitosti algebraických a svazových operací pak plyne, že existuje takové $V \in \mathfrak{V}$, že $x \in V \Rightarrow$ $\Rightarrow |x| \in U_2$. Jestliže nyní $x - y \in V$, je $|x - y| \in U_2$; protože podle [1], str. 8, odst. 17 platí $|x_+ - y_+| \leqq |x - y|$, je $|x_+ - y_+| \in U_1$ a tedy $x_+ - y_+ \in U$. Tím je důkaz ukončen.

Vlastnost T_1 vyjadřuje stejnoměrnou spojitost zobrazení $x \to x_+$ a tedy (za předpokladu spojitosti algebraických operací) také stejnoměrnou spojitost svazových operací; to znamená, že ke každému $U \in \mathfrak{V}$ existuje $V \in \mathfrak{V}$ tak, že platí implikace:

$$x_1 - y_1 \in V, x_2 - y_2 \in V \Rightarrow (x_1 \vee x_2) - (y_1 \vee y_2) \in U, (x_1 \wedge x_2) - (y_1 \wedge y_2) \in U .$$

K-lineál Y, v němž je definována topologie, při níž jsou algebraické a svazové operace spojité a jednobodové množiny uzavřené, se v [1], str. 19 nazývá topologickým K-lineálem. Viděli jsme však, že tato definice není vhodná. Chceme-li pro topologické K-lineály zachovat aspoň hlavní věty, dokázané v [1] pro K-lineály s obecnou normou, musíme požadovat více, např. některou z vlastností T_1, T_2 nebo stejnoměrnou spojitost svazových operací.

LITERATURA

[1] *J. Mařík:* Vrcholy jednotkové koule v prostoru funkcionál na daném polouspořádaném prostoru, Časopis pro pěstování matematiky *79* (1954), 3—40.

Резюме

ЗАМЕЧАНИЕ ОБ ОДНОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ K-ЛИНЕАЛОВ

МИЛАН КОМАН (Milan Koman), Прага

(Поступило в редакцию 10/12 1956 г.)

Если определяются топологические K-линеалы как K-линеалы, в которых дана топология, при которой алгебраические и структурные операции непрерывны и одноточечные множества замкнуты, то не справедливо утверждение, приведенное в [1]:

В каждой окрестности нуля U существует такая окрестность нуля V, что $0 \leqq a \leqq b$, $b \in U \Rightarrow a \in V$.

Zusammenfassung

BEMERKUNG ZU EINER DEFINITION DER TOPOLOGISCHEN K-LINEALE

MILAN KOMAN, Praha

(Eigelangt am 10. XII. 1956)

Definiert man topologische K-Lineale als K-Lineale, in welchen eine Topologie gegeben ist, in der algebraische Operationen und Verbandoperationen stetig und Einpunktsmengen geschlossen sind, dann gilt in [1] angeführte Behauptung nicht:

Zu jeder Umgebung des Nullelements U kann man eine solche Umgebung des Nullelements V finden, dass $0 \leqq a \leqq b$, $b \in V \Rightarrow a \in U$.