Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958), Praha

POZNÁMKA O ENDOMORFIZMOCH NA SVÄZOCH

JÁN JAKUBÍK, Košice

DT: 519.48

(Došlo dne 12. srpna 1957)

V poznámke je riešený problém, položený G. BIRKHOFFOM ([1], problém 93).

Nech S je sväz. Zobrazenie f sväzu S do seba, pre ktoré platí

$$x, y \in S \Rightarrow f(x) \cup f(y) = f(x \cup y)\,,$$

sa nazýva endomorfizmus vzhľadom k operácii $\cup$ na sväze S.

Nech E je množina všetkých endonorfizmov vzhľadom k operácii $\cup$ na sväze S. Ak $f, g \in E$, položíme $f \leqq g$ vtedy a len vtedy, keď pre každé $x_0 \in S$ platí $f(x_0) \leqq g(x_0)$. Tým je na množine E definované čiastočné usporiadanie.

G. BIRKHOFF uvádza, že mu nie je známe, či E je sväz, ak sväz S nie je distributívny (pozri [1], str. 213) a špeciálne kladie otázku ([1], str. 209, problém 93):

Nech S je ľubovoľný sväz. Je čiastočne usporiadaná množina E semimodulárnym sväzom?

V tejto poznámke dokážeme tvrdenia:

1. *Nech sväz je úplný. Potom množina všetkých endomorfizmov vzhľadom k operácii $\cup$ tvorí úplný sväz.*

2. *Čiastočne usporiadaná množina E nemusí byť semimodulárnym sväzom (ani vtedy, keď sväz S je konečný).*

Dôkaz tvrdenia 1. Nech S je úplný sväz, nech $\{f_i; i \in M\} \subset E$, $M \neq \emptyset$. Položme pre každé $x \in S$

$$\bar{f}(x) = \cup f_i(x) \quad (i \in M)\,.$$

$$\bar{f}(x_1) \cup \bar{f}(x_2) = (\cup f_i(x_1)) \cup (\cup f_i(x_2)) = \cup (f_i(x_1) \cup f_i(x_2)) = \\ = \cup (f_i(x_1 \cup x_2)) = \bar{f}(x_1 \cup x_2)\,.$$

Z predošlej rovnosti vyplýva, že $\bar{f}$ je najmenšie horné ohraničenie množiny $\{f_i\}$,

$$\bar{f} = \cup f_i \quad (i \in M)\,.$$

Nech 0 je najmenší prvok sväzu S. Položme pre každé $x \in S$ $f_0(x) = 0$. Potom f_0 je zrejme najmenší prvok čiastočne usporiadanej množiny E. Podľa vety 2 kap. IV, [1] E je úplný sväz.

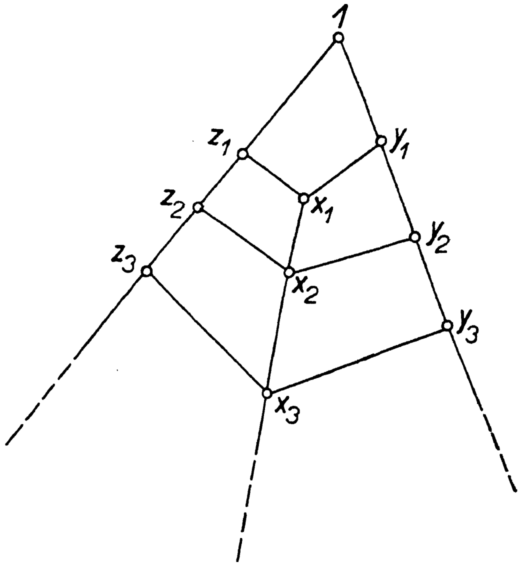
D ô k a z t v r d e n i a 2. Nech S je sväz, obsahujúci 5 prvkov, $S = \{0,1,2,3,4\}$, $0 < 2 < 4 < 1$, $0 < 3 < 1$, pričom prvok 3 je nezrovnateľný s každým z prvkov 2,4. Položme pre $i = 0, \ldots, 4$

$$f_i(0) = 0\,, \quad f_i(1) = f_i(2) = f_i(4) = 1\,, \quad f_i(3) = i\,.$$

Ľahko sa preverí, že každé zo zobrazení f_i $(i = 0, \ldots, 4)$ je endomorfizmus vzhľadom k operácii $\cup$ na sväze S. Z tvrdenia 1 vyplýva, že príslušný čiastočne usporiadaný systém E je sväz. Nech pre $f, g \in E$ symbol $f \prec g$ označuje, že prvok f je pokrytý prvkom g (t. j. platí $f < g$ a neexistuje prvok $h \in E$, pre ktorý by bolo $f < h < g$). Zrejme platí

$$f_0 \prec f_2 \prec f_4 \prec f_1\,, \quad f_0 \prec f_3 \prec f_1\,. \tag{1}$$

Z definície semimodulárnosti a zo vzťahov (1) vyplýva, že sväz E nie je semimodulárny.



Obr. 1.

D o d a t o k. V príklade 4, § 4, kap. XIII [1] (str. 208) je uvedené tvrdenie: „Endomorfizmy vzhľadom k operácii $\cup$ na ľubovolnom sväze L tvoria l-pologrupu". (Príslušná terminológia je uvedená v [1], str. 200—201.)

Vyšetrujme tento p r í k l a d:

Nech sú dané 4 množiny, z ktorých každé dve sú navzájom dizjunktné: $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$, $A_3 = \{y_1, y_2, y_3, \ldots\}$, $A_4 = \{z_1, z_2, z_3, \ldots\}$. Definujme na množine $L = \cup A_i$ $(i = 1, \ldots 4)$ operácie $\cap$, $\cup$ nasledovne: Pre každé $p \in L$ položme

a) $p \cap 1 = p$, $p \cup 1 = 1$.

Ak n, m sú prirodzená čísla, označme $u = \max(n, m)$, $v = \min(n, m)$.

Ak $p_n, p_m \in A_i$ $(i = 2, 3, 4)$, položme

b) $p_n \cap p_m = p_u\,, \quad p_n \cup p_m = p_v$.

Ďalej položme

c) $y_n \cap z_m = x_u\,, \quad y_n \cup z_m = 1\,,$

d) $x_n \cap p_m = x_u\,, \quad x_n \cup p_m = p_v\,,$

pričom p je ľubovoľný zo symbolov y, z. Množina L s operáciami $\cap$, $\cup$ je sväz (porov. obrázok).

Nech f_1 je identické zobrazenie množiny L na L. Nech f_2 je nasledujúce zobrazenie množiny L na L:

$$f_2(1) = 1,\ f_2(x_n) = x_n,\ f_2(y_n) = z_n,\ f_2(z_n) = y_n \quad (n = 1, 2, \ldots) .$$

Zrejme je f_1 aj f_2 endomorfizmus vzhľadom k operácii $\cup$ na sväze L. Predpokladajme, že f je endomorfizmus vzhľadom k operácii $\cup$ na sväze L a že platí $f \leqq f_1$, $f \leqq f_2$.

Potom musí byť pre $n = 1, 2, \ldots$

$$f(y_n) \leqq f_1(y_n) = y_n\ , \quad f(y_n) \leqq f_2(y_n) = z_n\ , \quad f(y_n) \leqq y_n \cap z_n = x_n$$
$$f(y_n) \leqq y_n \cap z_n = x_n$$

a analogicky

$$f(z_n) \leqq x_n\ ,$$

takže

$$f(1) = f(y_n \cup z_n) = f(y_n) \cup f(z_n) \leqq x_n\ .$$

Keďže vo sväze L množina A_2 nie je zdola ohraničená, došli sme ku sporu. Teda neexistuje žiadny endomorfizmus f vzhľadom k operácii $\cup$ na sväze L, pre ktorý by platilo $f \leqq f_1$, $f \leqq f_2$.

Z toho vyplýva, že citované Birkhoffovo tvrdenie je nesprávne.

LITERATÚRA

[1] *G. Birkhoff:* Lattice theory, revised ed., Amer. Math. Soc. Colloquium Publications vol. XXV, New York 1948.

Резюме

ЗАМЕЧАНИЕ ОБ ЭНДОМОРФИЗМАХ СТРУКТУР

ЯН ЯКУБИК (Ján Jakubík), Кошице

(Поступило в редакцию 12/VIII 1957 г.)

Отображение f структуры S в себя, для которого имеет место

$$x, y \in S \Rightarrow f(x) \cup f(y) = f(x \cup y)\ ,$$

называется $\cup$-эндоморфизом.

Пусть E — множество всех $\cup$-эндоморфизмов данной структуры S. Для f, $g \in S$ мы положим $f \leqq g$, если для каждого $x \in S$ $f(x) \leqq g(x)$.

Доказаны утверждения:

1. *Если структура S — полная, то E тоже является полной структурой.*

2. *Существует конечная структура S, для которой структура E не является полудедекиндовой. Существует структура, для которой E совсем не является структурой.*

Этим решен вопрос, поставленный Г. Биркгофом (см. [1], проблема 93).

Summary

NOTE ON THE ENDOMORPHISMS OF LATTICES

JÁN JAKUBÍK, Košice

(Received August 12, 1957)

A mapping f of a lattice S into S is called an $\cup$-endomorphism if

$$x, y \in S \Rightarrow f(x) \cup f(y) = f(x \cup y) .$$

Let E be the set of all $\cup$-endomorphisms of a given lattice S. If $f, g \in S$ we put $f \leqq g$ if for every $x \in S$ $f(x) \leqq g(x)$.

1. *If S is a complete lattice, then E is also a complete lattice.*

2. *There exists a finite lattice S such that the lattice E is not semi-modular. There exists a lattice S such that the set E is not a lattice at all.*

This solves a problem of G. Birkhoff ([1], Problem 93).