Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958), Praha

ÚVAHY Z LOGIKY V BOLZANOVĚ RUKOPISNÉ POZŮSTALOSTI[1])

KAREL RYCHLÍK, Praha

DT: 517.11

(Došlo dne 21. srpna 1957)

Autor článku zde podává překlad obsahu Bolzanovy práce „Von der mathematischen Lehrart“ a volný překlad § 8, výňatku z ní, který má obzvláštní význam pro matematickou logiku.[2])

Bernard Bolzano pracoval od r. 1830 na obsáhlém matematickém díle „Grössenlehre“, které zůstalo nedokončeno v rukopise. K tomuto dílu napsal Bolzano obšírný úvod, jehož druhý díl má název „Von der mathematischen Lehrart“ (v dalším ML). Tento spis se zabývá hlavně otázkami z logiky a to zejména se zřetelem na potřeby matematiky. Většina těchto otázek je již probrána v Bolzanově díle „Wissenschaftslehre“.[3]) Ve spise ML jsou však tyto otázky znovu a snad ještě lépe formulovány.

Rukopis Bolzanovy Grössenlehre je uložen v Národní knihovně ve Vídni; v Archivu Československé akademie věd (ČSAV) jsou uloženy fotografické kopie tohoto rukopisu opatřené M. Jaškem. Pořídil jsem opis kopie posledního, třetího, zpracování rukopisu ML. Rukopis sám byl psán neznámým písařem, avšak byl Bolzanem opravován a doplňován a řada stránek je psána vlastní rukou Bolzanovou. Rovněž je provedeno již Bolzanem rozdělení spisu na paragrafy a jejich očíslování.

[1]) Byl jsem pověřen první sekcí ČSAV provedením opisů dosud neuveřejněných Bolzanových rukopisů.

[2]) Srv. Bolzano, Wissenschaftslehre, II, § 155–159.

Na význam Bolzanův v logice upozornili: W. Dubislav v pojednání „Bolzano als Vorläufer der mathematischen Logik“, Philos. Jahrbuch (Görres) *44*, 1931, 448–456; H. Scholz v pojednání „Die Wissenschaftslehre Bolzano's“, Abh. d. Friesschen Schule, N. S. *6*, 1933, 399–472.

Viz též H. Hermes, H. Scholz, Mathem. Logik, Enzyklop. d. mathem. Wiss., 2. vyd., Bd. I 1, Heft 11.

Konečně viz V. Filkorn, Matematická logika I, Slovenský filozofický čas. *11*, 1956, č. 4, 352–368, hlavně str. 360–361.

[3]) Dr. B. Bolzano's Wissenschaftslehre, 4 sv., Sulzbach, 1837. Nový otisk (vydavatel W. Schulze) Lipsko 1929–1931.

Jiným výtahem z Bolzanovy Wissenschaftslehre vydaným ještě za života Bolzanova je „Bolzano's Wissenschaftslehre und Religionswissenschaft in einer beurtheilenden Übersicht“. Eine Schrift für Alle, die dessen wichtigste Ansichten kennen zu lernen wünschen. Sulzbach, 1841.

V rukopise jsou očíslovány listy; stránky jsou vyznačeny tak, že jsou na listech napsána písmena *a*, *b*. Červenými čísly jsou označeny stránky na fotokopiích opatřených M. Jaškem.

Obsah Bolzanova spisu M L

§ 1. Předběžné připomínky.
§ 2. Věty a pouhé představy o sobě.
§ 3. Jednoduché a složené představy.
§ 4. Předmětné a bezpředmětné představy.
§ 5. Vztahy mezi představami vzhledem k jejich rozsahu.
§ 6. Názory a pojmy.
§ 7. Věty pojmové a jiné.
§ 8. Vztahy mezi větami založené na předpokladu proměnnosti jistých částí.
§ 9. Dohody.
§ 10. Které pojmy a věty dlužno vyjádřit co nejzřetelněji.
§ 11. Jak se to má stát.
§ 12. Důkazy.
§ 13. Objektivní souvislost mezi pravdami o sobě.
§ 14. Je nutno usilovat o to, dokázat tuto souvislost.
§ 15. Pochopitelný postup.
§ 16. Apagogický (nepřímý) důkaz.
§ 17. Pořádek výkladu.
§ 18. Nadpisy.

Výňatek z Bolzanova spisu M L

§ 8. *Vztahy mezi větami založené na předpokladu proměnnosti jistých částí* (str. 36^b—39^b, str. 44—50 v červeném očíslování)

1. Z rozličných vztahů, které mohou býti mezi větami, stačí se zmíniti jen o některých z těch, které vzniknou za předpokladu, že se ve větách vyskytnou proměnné součásti. Neboť není při porovnávání vět nic jednoduššího, než považovat za proměnnou některou součást v nich se vyskytující[4]) (buď podmět, nebo výrok, nebo součást vyskytující se v představě podmětové nebo výrokové) a zabývat se tím, jak se ony věty chovají vzhledem k pravdě, zaměníme-li ony části považované za proměnné libovolnými jinými.

[4]) Při tom musíme tutéž součást vyskytující se ve větách na několika různých místech nahradit touž proměnnou částí a jinou součást od předešlé různou považovat za proměnnou část od předešlé různou. (Pozn. překl.)

První zajímavý případ, který se zde může vyskytnout, nastává, mají-li věty $A, B, C, \ldots$, které spolu chceme porovnávat, a součásti v nich $i, j, k, \ldots$, které budeme považovat za proměnné, tu vlastnost, že existují představy, které dosazeny místo $i, j, k, \ldots$ činí věty $A, B, C, \ldots$ vesměs pravdivými. V tom případě řekneme, že věty $A, B, C, \ldots$ jsou konsistentní[5]) vzhledem k proměnným částem $i, j, k, \ldots$. Tak nazveme obě věty: „Číslo N je liché" a „Číslo N je čtverec (celého čísla)" konsistentními vzhledem k představě N, ježto lze snadno zvolit N tak, že obě věty vyslovují pravdu.

Kdyby nastal opačný případ, kdyby totiž měly věty $A, B, C, \ldots$ a součásti $i, j, k, \ldots$, které budeme považovat za proměnné, tu vlastnost, že by nebylo možno za $i, j, k, \ldots$ dosadit takové představy, aby věty $A, B, C, \ldots$ se pak staly vesměs pravdivými, řekli bychom, že ony věty jsou nekonsistentní.[6]) Tak jsou např. nekonsistentní věty: „Obrazec X je trojúhelník" a „Dva úhly v obrazci X jsou pravé" — je-li X jediná představa, kterou chceme v obou větách považovat za proměnnou.

2. Má-li být možno nazvat větu A (nebo více vět $A, B, C, \ldots$) konsistentní s větou M (nebo s více větami $M, N, P, \ldots$) vzhledem k součástem $i, j, k, \ldots$, musí být podle toho, co bylo řečeno, možno na místo součástí $i, j, k, \ldots$ klásti takové součásti, které činí pravdivými nejen věty $A, B, C, \ldots$, ale také věty $M, N, P, \ldots$. Případ obzvláště zajímavý nastane, když nejen některé, ale všechny představy, které dosazeny místo $i, j, k, \ldots$ činí pravdivými věty $A, B, C, \ldots$, činí také pravdivými všechny věty $M, N, P, \ldots$. V tomto případě řekneme, že věty $M, N, P, \ldots$ lze odvodit (dedukovat)[7]) z vět $A, B, C, \ldots$ (jsou k větám těm ve vztahu odvoditelnosti, deducibility) v širším slova smyslu vzhledem k proměnným částem $i, j, k, \ldots$.

V užším slova smyslu, a to ve smyslu, v jakém tohoto rčení budeme budoucně vždy užívat, řekneme, že větu M možno odvodit z vět $A, B, C, \ldots$ vzhledem k proměnným částem $i, j, k, \ldots$, jestliže každý souhrn představ, který po dosazení místo $i, j, k, \ldots$ činí pravdivými všechny věty $A, B, C, \ldots$, činí také pravdivou větu M, neplatí-li to však již o (skutečné) části souhrnu vět $A, B, C, \ldots$, tj., není-li věta M již také tehdy pravdivá, kdykoli je jen jistá (skutečná) část souhrnu vět $A, B, C, \ldots$ pravdivá.

Věty $A, B, C, \ldots$, z nichž lze jednu nebo více jiných vět $M, N, P, \ldots$ odvoditi, nazýváme také premisami (předpoklady)[8]) vedoucími k těmto větám, věty $M, N, P, \ldots$ pak samy nazveme důsledky (závěry)[9]) plynoucími z vět $A, B, C, \ldots$.

---

[5]) Bolzano užívá slova „einstimmig" nebo „verträglich".

[6]) U Bolzana: „unverträglich, stehen in dem Verhältnisse der Unverträglichkeit".

[7]) U Bolzana: „ableiten, stehen in dem Verhältnisse der Ableitbarkeit".

[8]) U Bolzana také „Vordersätze".

[9]) U Bolzana: „Schlusssätze".

Tak řekneme, že ze dvou vět

„Všechna i jsou j“ a „Všechna j jsou k“
lze odvodit větu třetí: „Všechna i jsou k“,

a to vzhledem k proměnným částem $i, j, k, \ldots$, ježto, kdykoliv na místo $i, j, k, \ldots$ klademe takové představy, že první dvě věty se stanou pravdivými, také třetí věta vyslovuje pravdu. Obyčejně se tento vztah deducibility mezi větami $A, B, C, \ldots$ na jedné straně a větami $M, N, P, \ldots$ na straně druhé vyslovuje slovy: „Je-li $A, B, C, \ldots$, je také $M, N, P, \ldots$“; např.: „Jsou-li i, j, k tři vrcholy trojúhelníku a je-li (pro strany) $ij = ik$, je také (pro úhly) $j = k$“.

3. Abychom nahlédli, že mezi větani $A, B, C, \ldots$ na jedné straně a větami $M, N, P, \ldots$ na straně druhé (nebo také mezi větami $A, B, C, \ldots$ na jedné straně a jen jedinou větou M na straně druhé) je skutečný vztah deducibility, k tomu je třeba mít podle okolností často mnoho zvláštních předběžných vědomostí, mnohdy opět je to věc, která je ihned sama sebou patrná. Jen v tomto posledním případě, kdy tento vztah je na první pohled patrný a nespočívá na ničem jiném než na tom, co se nazývá logickou formou vět, označuje se názvem logický úsudek. Jsou-li premisy u takového logického úsudku toho druhu, jak jsme je právě vyslovili, tj., jsou-li při té vlastnosti jejich proměnných částí $i, j, k, \ldots$, kterou právě předpokládáme, pravdami, a to takovými pravdami, které jsou známé tomu, komu je k úvaze předkládáme, dá se čekat, že také závěr z nich plynoucí bude se jevit jako pravda, zvláště když bude následovat ihned za výkladem těchto premis. Nastane-li to skutečně, lze říci, že jsme sprostředkovali poznání pravdy M úsudkem z pravd již známých $A, B, C, \ldots$. Různým druhům úsudků, jichž můžeme k tomu účelu použít v očekávání příznivého výsledku, učí logika (v oné její části, která se nazývá sylogistikou), nebo aspoň má s nimi seznamovat. Uváděti je zde, vedlo by však příliš daleko.

4. Vztah deducibility mezi danými větami $A, B, C, \ldots$ a jinými danými větami $M, N, P, \ldots$ může být vzájemný, tj. věty $M, N, P, \ldots$ mohou být odvoditelné z vět $A, B, C, \ldots$ a tyto opět z vět $M, N, P, \ldots$ a to vzhledem k týmž částem $i, j, k, \ldots$ považovaným za proměnné. V tomto případě řekneme, že věty $A, B, C, \ldots$ jsou s větami $M, N, P, \ldots$ ekvivalentní (ekvipolentní).[10] V tomto stavu ekvivalence jsou např. dvě věty: „V trojúhelníku ijk jsou strany $ij = kj$“ a „λ je střed základny ik“ s dvěma větami: „V trojúhelníku ijk jsou úhly $ij\lambda$ a $kj\lambda$ rovny“ a „přilehlé úhly $j\lambda i$ a $j\lambda k$ jsou si rovny“, při čemž považujeme za proměnné části představy i, j, k, λ.

5. Jsou-li věty $A, B, C, \ldots$ s jedné strany a věty $M, N, P, \ldots$ se strany druhé nekonsistentní (odst. 1) vzhledem k částem $i, j, k, \ldots$ pokládaným za proměnné, lze z věty: „Všechny věty $A, B, C, \ldots$ jsou pravdivé“ odvodit větu: „Ne všechny věty $M, N, P, \ldots$ jsou pravdivé“; a z věty: „Všechny věty

[10]) U Bolzana: „gleichgeltend“, „äquipolent“.

$M, N, P, \ldots$ jsou pravdivé", lze odvodit větu: „Ne všechny věty $A, B, C, \ldots$ jsou pravdivé".

Někdy se však stane, že také naopak z věty: „Ne všechna $M, N, P, \ldots$ jsou pravdivá", lze odvodit větu: „Všechna $A, B, C, \ldots$ jsou pravdivá" a z věty: „Ne všechna $A, B, C, \ldots$ jsou pravdivá", lze odvodit větu: „Všechna $M, N, P, \ldots$ jsou pravdivá". V tomto zvláštním případě říkáme, že věty $A, B, C, \ldots$ s jedné strany a věty $M, N, P, \ldots$ se strany druhé jsou spolu ve vztahu **kontradikce**,[11] v každém jiném případě jsou **kontrární**.[12] Ve vztahu kontradikce jsou na př. obě věty: „Jsou-li i, j různé okamžiky, je i dříve než j" a „Jsou-li i a j různé okamžiky, je j dříve než i." Ve vztahu pouhé kontrárnosti jsou naproti tomu věty: „Veličina i je větší než j" a „Veličina i je menší než veličina j", považujeme-li ve všech případech i a j za proměnné části.

Poznámky

Místo příliš mnohoznačného slova věta (na př. věta v gramatice, věta ve smyslu poučka v matematice) navrhuji užívat slova **výpověď**.[13] Výpověď je tedy buď pravdivá nebo nepravdivá. Místo výrazů proměnná představa, proměnná část nebo součást užívaných Bolzanem se říká prostě **proměnná**. Postupem popsaným v odst. 1 vzniknou z výpovědí **výpovědní formy** (funkce) jedné neb více proměnných. Z výpovědní formy možno tím, že za každou proměnnou dosadíme nějaký „výraz", dostat výpověď — pravdivou neb nepravdivou. V prvním případě se řekne, že výpovědní forma je **verifikována**, v druhém že je **falsifikována**.

Bolzano je první, kdo zavedl do logiky velmi důležitý pojem výpovědní formy. Tohoto pojmu pak užil k definici **deducibility**,[14] odvoditelnosti, konsekvence, logické implikace (odst. 2) a ovšem i pojmu **ekvivalence** (odst. 4), který lze odtud snadno odvodit.

Pomocí deducibility lze také vyjádřit pojem **důsledku** (odst. 3).[15]

---

[11]) U Bolzana také „sind in dem Verhältniss des Widerspruches".

[12]) U Bolzana také „widerstreiten".

[13]) Něm. „Aussage". Pro predikát ve smyslu gramatickém se užívalo kdysi (na přelomu století) názvu „výrok", pak „přísudek" a nyní se opět užívá názvu „výrok". Vedlo by tedy užívání slova výrok ve smyslu Aussage k dvojznačnosti tohoto slova, která by ovšem mohla být na závadu. Patrně z tohoto důvodu užíval slova výpověď ve smyslu něm. Aussage VOROVKA a užívá ho i V. FILKORN v pojednání citovaném v pozn. pod č.[3]).

[14]) Podobně zavedl pojem ten (užívaje při tom pojmu modelu) nezávisle na Bolzanovi A. TARSKI: Über den Begriff der logischen Folgerung, Actual. scient. et industr. *394*, Paříž 1936, 1—11.

[15]) Gentzenovu logiku konsekvencí lze interpretovat jako formalisaci tohoto pojmu. Viz GENTZEN, Untersuchungen über das logische Schliessen, Math. Zeitschr. *39*, 1934, 176—210, 405—431.

Резюме

РАССУЖДЕНИЯ ПО ЛОГИКЕ В РУКОПИСНОМ НАСЛЕДСТВЕ БОЛЬЦАНО

КАРЕЛ РЫХЛИК, Karel Rychlík, Прага

(Поступило в редакцию 21/VIII 1957 г.)

Автором статьи здесь дается в переводе на чешский язык оглавление работы Больцано „*Von der mathematischen Lehrart*", а также свободный перевод § 8 этой работы, имеющего особое значение для математической логики.

Zusammenfassung

BETRACHTUNGEN AUS DER LOGIK IM BOLZANO'S HANDSCHRIFTLICHEN NACHLASSE

KAREL RYCHLÍK, Praha

(Eingelangt am 21. August 1957)

Der Verfasser bringt in diesem Aufsatze die Übersetzung des Inhaltes Bolzanos Arbeit „Von der mathematischen Lehrart" ins Tschechische und in freier Übersetzung den § 8 dieser Arbeit, einen Auszug, der für die mathematische Logik von besonderer Bedeutung ist.