Časopis pro pěstování matematiky

Josef Král

Transformace vícerozměrných integrálů

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 83 (1958), No. 3, 365–368

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108294

Přednášející postavil pak obrácenou otázku:

Budiž dána grupa G; jaké kombinace zavedených typů systémů generátorů mohou v grupě G nastat?

Odpověď na tuto otázku usnadňují následující věty, jejichž důkazy jsou na rozdíl od důkazů vět 1, 2 a 3 složitější (s výjimkou věty 5).

Věta 4. *Dostižitelná grupa, která má systém generátorů typu* (V), *má též systém generátorů typu* (III).

Věta 5. *Grupa, mající systém generátorů typu* (IV), *má též systém generátorů typu* (III).

Věta 6. *Má-li grupa systém generátorů typu* (III), *má též systém generátorů typu* (IV).

Důkaz věty 6 se opírá o dvě důležitá lemmata:

Lemma 1. *Budiž $\mathfrak{G}$ dědičně reducibilní systém grupy G, $\mathfrak{G}_0 \subseteq G \setminus \mathfrak{G}$ konečná podmnožina. Potom též $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_0)$ je dědičně reducibilní systém generátorů grupy G.*

Lemma 2. *Budiž $\mathfrak{G}$ ireducibilní systém generátorů grupy G; budiž dále $\mathfrak{G}_0 \subseteq G \setminus \mathfrak{G}$ konečná podmnožina taková, že platí: Existuje $\bar{g} \in \mathfrak{G}$ tak, že*

$$\bar{g} \in \{\mathfrak{G} \setminus (\bar{g}),\ \mathfrak{G}_0\} \quad a \quad \bar{g} \operatorname{non} \in \{\mathfrak{G} \setminus (\bar{g}),\ \mathfrak{G}_0'\},\ kde\ \mathfrak{G}_0' \subsetneqq \mathfrak{G}_0 .$$

Potom existuje ireducibilní systém generátorů $\overline{\mathfrak{G}}$ grupy G s vlastnostmi

$$\overline{\mathfrak{G}} \subset (\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_0), \quad \overline{\mathfrak{G}} \supseteq \mathfrak{G}_0, \quad \bar{g} \operatorname{non} \in \overline{\mathfrak{G}} .$$

Z těchto výsledků pak snadno usoudíme na tyto možnosti kombinací: Grupa G má systémy generátorů

1. pouze typu (VI) ($\Leftrightarrow G = 0$) ;
2. typů (VI) a (I) ($\Leftrightarrow G = G(2)$) ;
3. typů (VI), (I) a (II) (např. každá nenulová grupa $G \neq G(2)$ s konečným počtem generátorů);
4. typů (VI), (I), (II), (III) a (IV) (např. grupa $G_3 = G(p^\infty) + \sum_{i=1}^{\infty} G_i(p)$);
5. typů (VI), (I), (II), (III), (IV) a (V) (např. grupa G_2);
6. typů (III), (IV) a (V) (např. grupa G_1) ;
7. pouze typu (V) ($\Leftrightarrow G \neq 0$ divisibilní).

Jedinou další možnou kombinací by mohla být:

8. Grupa G má systémy generátorů typu (III) a (IV).

Odpověď na otázku, zda tato možnost může nastat (tj. zda taková grupa G existuje) nebo ekvivalentně: zda existuje grupa, jež nemá systém generátorů typu (V) ani typu (VI), zůstává zatím otevřeným problémem.

První část práce je otištěna v časopise Чех. мат. журнал, *8* (1958), 54—61.

Vlastimil Dlab, Praha

TRANSFORMACE VÍCEROZMĚRNÝCH INTEGRÁLŮ

(Vlastní referát Josefa Krále o přednášce proslovené na schůzi matematické obce pražské dne 24. února 1958.)

Buď G otevřená množina v E_m a nechť Φ je „hladké" zobrazení množiny G do E_m. Označme symbolem $D_\Phi(t)$ jakobián transformace Φ v bodě t a předpokládejme, že

$\int\limits_G |D_\Phi(t)|\, \mathrm{d}t < \infty$. Potom pro skoro všechna $x \in E_m$ je množina $\Phi^{-1}(x)$ konečná a vztah

$$\int\limits_G F(t)|\, D_\Phi(t)|\, \mathrm{d}t = \int\limits_{E_m} \Big(\sum_{\Phi(t)=x} F(t)\Big)\, \mathrm{d}x \tag{1}$$

platí pro každou funkci F na G, pro niž existuje Lebesgueův integrál vlevo (součet za integračním znamením vpravo má pak smysl pro skoro všechna x, integrál vpravo rovněž existuje a je roven integrálu vlevo). Jednoduchý důkaz obecnějšího tvrzení podal J. MAŘÍK v článku „Transformation of m-dimensional Lebesgue integrals", Чех. мат. журнал 6 (81), 1956. Lze očekávat, že integrál na pravé straně formule (1) bude mít smysl i pro jiná zobrazení Φ, než jsou zobrazení „hladká". To nás vede k následující definici:

Buď G množina typu F_σ[1]) *v E_m a buď Φ spojité zobrazení množiny G do E_m. Označme symbolem $N_\Phi(G, x)$ počet bodů množiny $\Phi^{-1}(x) \cap G$ (je-li tato množina nekonečná, klademe $N_\Phi(G, x) = +\infty$) a položme*

$$V_\Phi(G) = \int\limits_{E_m} N_\Phi(G, x)\, \mathrm{d}x\,.$$

Řekneme, že zobrazení Φ má konečnou variaci na množině G, jestliže $V_\Phi(G) < \infty$.

Snadno se zjistí, že funkce $N_\Phi(G, x)$ je borelovsky měřitelná, takže uvedená definice má smysl. (Zobrazení s konečnou variací studoval po prvé S. BANACH v článku „Sur les lignes rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie", Fund. Math., vol. 7, 1925.) Stejným způsobem můžeme ovšem definovat symbol $V_\Phi(M)$ pro každou množinu M typu F_σ, jež je obsažena v G. V případě, že zobrazení Φ má konečnou variaci na G, můžeme množinovou funkci V_Φ (definovanou zatím jen na těch podmnožinách množiny G, jež mají typ F_σ) rozšířit na úplnou a úplně konečnou míru na G. Potom platí

$$\int\limits_G F(t)\, \mathrm{d}V_\Phi(t) = \int\limits_{E_m} \Big(\sum_{\Phi(t)=x} F(t)\Big)\, \mathrm{d}x$$

pro každou funkci F na G, pro niž existuje integrál vlevo. Srovnáním tohoto vztahu se vzorcem (1) dostáváme (za příslušných předpokladů o funkci F)

$$\int\limits_G F(t)|\, D_\Phi(t)|\, \mathrm{d}t = \int\limits_G F(t)\, \mathrm{d}V_\Phi(t)$$

pro „hladké" zobrazení Φ s integrovatelným jakobiánem na otevřené množině G.

Pro transformaci integrálů podle míry V_Φ při spojité záměně proměnných lze odvodit následující větu:

Buď Ψ spojité zobrazení otevřené množiny $O \subset E_m$ na množinu $G \subset E_m$ a buď Φ spojité zobrazení množiny G do E_m. Označme symbolem $\Phi * \Psi$ zobrazení, jež vznikne složením zobrazení Φ, Ψ (tj. $(\Phi * \Psi)(t) = \Phi(\Psi(t))$ pro každé $t \in O$). Má-li zobrazení $\Phi * \Psi$ konečnou variaci na množině O, pak zobrazení Φ má konečnou variaci na množině G a vztah

$$\int\limits_O F(\Psi(t))\, \mathrm{d}V_{\Phi * \Psi}(t) = \int\limits_G F(x)\, N_\Psi(O, x)\, \mathrm{d}V_\Phi(x)$$

platí pro každou funkci F na G, pro niž existuje některý z uvedených integrálů (pak existuje i druhý integrál a platí rovnost).

Je-li mimo to zobrazení Ψ prosté, pak $N_\Psi(O, x) = 1$ pro všechna $x \in G$ a uvedená formule ukazuje, že v integrálu $\int\limits_G F(x)\, \mathrm{d}V_\Phi(x)$ můžeme „provést substituci $x = \Psi(t)$", aniž bychom změnili jeho hodnotu (nebo porušili jeho existenci).

[1]) V dalším nevystačíme s otevřenými množinami; budeme totiž vyšetřovat také obrazy takových množin při spojitých zobrazeních. Proto vyslovujeme naši definici hned pro množiny typu F_σ. Omezení na množiny tohoto typu není ovšem podstatné.

Nyní si všimneme podobných otázek v souvislosti s „orientovanými" integrály typu $\int_G F(t)\, D_\Phi(t)\, \mathrm{d}t$; omezíme se pouze na případ $m = 2$.

Je-li Φ spojité zobrazení otevřené množiny $G \subset E_2$ do E_2, pak v každém bodě $t \in G$, jenž je isolovaným bodem množiny $\Phi^{-1}(\Phi(t))$, je definován lokální index zobrazení Φ, který označíme $\iota_\Phi(t)$. Zhruba řečeno, má index $\iota_\Phi(t)$ tento názorný význam: Označíme-li K uzavřenou orientovanou křivku, ve kterou přejde zobrazením Φ „dostatečně malá" kladně orientovaná Jordanova křivka, obsahující bod t ve svém vnitřku, pak $\iota_\Phi(t)$ je topologický index bodu $\Phi(t)$ vzhledem ke křivce K.

Předpokládejme nyní, že zobrazení Φ je „hladké" a má integrovatelný jakobián na G. Potom platí

$$\int_G F(t)\, D_\Phi(t)\, \mathrm{d}t = \int_G F(t) \operatorname{sgn} D_\Phi(t) \,.\, |D_\Phi(t)|\, \mathrm{d}t = (\text{viz } (1)) =$$
$$= \int_{E_2} \Big(\sum_{\Phi(t)=x} F(t) \operatorname{sgn} D_\Phi(t)\Big)\, \mathrm{d}x\,,$$

jakmile existuje výchozí integrál. Avšak $\operatorname{sgn} D_\Phi(t) = \iota_\Phi(t)$ pro každé $t \in G$, pro něž je $D_\Phi(t) \neq 0$. Protože množina $E[t;\, t \in G, D_\Phi(t) = 0]$ přejde zobrazením Φ v množinu Lebesgueovy míry 0, dostáváme

$$\int_G F(t)\, D_\Phi(t)\, \mathrm{d}t = \int_{E_2} \Big(\sum_{\Phi(t)=x} F(t)\, \iota_\Phi(t)\Big)\, \mathrm{d}x\,. \tag{2}$$

Poslední integrál má opět smysl pro mnohem širší třídu transformací, než jsou „hladké" transformace s integrovatelným jakobiánem. Je-li např. Φ spojité zobrazení otevřené množiny $G \subset E_2$ do E_2 takové, že $V_\Phi(G) < \infty$, pak index $\iota_\Phi(t)$ je definován pro V_Φ — skoro všechna $t \in G$ a funkce ι_Φ je V_Φ — měřitelná na G. Jak ukázal T. Radó, je mimo to množina $E[t;\, t \in G,\, |\iota_\Phi(t)| > 1]$ spočetná. Jsme tedy oprávněni definovat na G zobecněnou míru $\tilde{V}_\Phi$ předpisem

$$\tilde{V}_\Phi(M) = \int_M \iota_\Phi(t)\, \mathrm{d}V_\Phi(t)$$

(pro každou množinu $M \subset G$, jež je měřitelná vzhledem k míře V_Φ). Za příslušných předpokladů o funkci F platí pak vztah

$$\int_G F(t)\, \mathrm{d}\tilde{V}_\Phi(t) = \int_G F(t)\, \iota_\Phi(t)\, \mathrm{d}V_\Phi(t) = \int_{E_2} \Big(\sum_{\Phi(t)=x} F(t)\, \iota_\Phi(t)\Big)\, \mathrm{d}x\,.$$

Odtud dostáváme srovnáním s (2)

$$\int_G F(t)\, D_\Phi(t)\, \mathrm{d}t = \int_G F(t)\, \mathrm{d}\tilde{V}_\Phi(t)$$

pro ten případ, že zobrazení Φ je „hladké" a má integrovatelný jakobián. Poslední vztah platí také pro mnohem obecnější diferencovatelné transformace. Podobné otázky jsou vyšetřeny v monografii *T. Radó*: Length and area. O tom, jak se transformují integrály podle míry $\tilde{V}_\Phi$ při spojité záměně proměnných, nás poučuje např. tato věta:

Buď Ψ spojité zobrazení otevřené množiny $O \subset E_2$ na množinu $G \subset E_2$ a buď Φ spojité zobrazení množiny G do E_2. Položme $\tilde{N}_\Psi(O, x) = \sum_{\Psi(t)=x} \iota_\Psi(t)$ pro každé $x \in G$, pro něž je množina $\Psi^{-1}(x) \cap O$ konečná. Je-li $V_{\Phi * \Psi}(O) < \infty$, pak je též $V_\Phi(G) < \infty$, funkce $\tilde{N}_\Psi(O, x)$ je definována V_Φ — skoro všude na G a vztah

$$\int_O F(\Psi(t))\, \mathrm{d}\tilde{V}_{\Phi * \Psi}(t) = \int_{G^\circ} F(x)\, \tilde{N}_\Psi(O, x)\, \mathrm{d}\tilde{V}_\Phi(x)\ ^{2)}$$

platí pro každou funkci F na G, pro niž existuje integrál vlevo.

---

[2]) G° je vnitřek množiny G.

V tom případě, že O je oblast a Ψ je homeomorfismus, máme buď $\tilde{N}_{\Psi}(O, x) = 1$ pro všechna $x \in G = G^{\circ}$ nebo $\tilde{N}_{\Psi}(O, x) = -1$ pro všechna $x \in G$; uvedená formule pak ukazuje, že integrál $\int_G F(x) \, \mathrm{d}\tilde{V}_{\Phi}(x)$ je (až na znaménko) „invariantní vůči substituci $x = \Psi(t)$".

Stejná tvrzení platí také pro jednorozměrný případ. Integrál podle míry $\tilde{V}_{\Phi}$ přejde v Lebesgue - Stieltjesův integrál podle funkce Φ; zvláště jednoduchý význam má funkce $\tilde{N}_{\Psi}$. Z výše uvedené věty dostáváme pak snadno jednoduchou větu o záměně proměnných v Lebesgue-Stieltjesově integrálu.

Josef Král, Praha