V autonomním případě se vztahy mezi jednotlivými druhy stability změní. Je:

$$\begin{array}{c}
\text{Asymptotická st.} \rightleftarrows \text{Silná st.} \rightleftarrows \text{Asympt. integrální stabilita} \\
\not\uparrow \downarrow \\
\text{Poruchová stabilita} \\
\not\uparrow \downarrow \\
\text{Integrální stabilita} \\
\not\uparrow \downarrow \\
\text{Stabilita}
\end{array}$$

Ivo Vrkoč, Praha

O DIRACOVĚ FUNKCI V NELINEÁRNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNICÍCH

(Referát o přednášce dr. JAROSLAVA KURZWEILA konané ve schůzi matematické obce pražské dne 13. ledna 1958.)

Naším cílem je popsat průběh řešení diferenciální rovnice

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x, t) + g(x) \cdot \varphi_k(t) , \tag{1}$$

jestliže posloupnost $\varphi_k(t)$ se blíží k Diracově funkci. Předpokládáme, že x je vektor z n-dimensionálního Euklidova prostoru E_n, že funkce $f(x, t)$ a $g(x)$ jsou spojité pro $x \in \bar{D}$, $t \in \langle -T_1, T_1 \rangle$, kde $\bar{D}$ je uzávěr omezené otevřené množiny $D \subset E_n$, a nabývají hodnot z E_n; nechť reálné funkce $\varphi_k(t)$ jsou spojité pro $t \in \langle - T_1, T_1 \rangle$.

Říkáme, že posloupnost $\varphi_k(t)$ konverguje k Diracově funkci, jestliže

$$\limsup_{k \to \infty} \int_{-T_1}^{T_1} |\varphi_k(t)| \, \mathrm{d}t = L < \infty ,$$

$$\lim_{k \to +\infty} \int_{-T_1}^{-\xi} |\varphi_k(t)| \, \mathrm{d}t + \int_{\xi}^{T_1} |\varphi_k(t)| \, \mathrm{d}t = 0$$

pro každé $\xi > 0$ a $\lim_{k \to \infty} \int_{-T_1}^{t} \varphi_k(\tau) \, \mathrm{d}\tau = 0$ resp. 1 pro $- T_1 \leqq t < 0$ resp. $0 < t \leqq T_1$. Posloupnost $\varphi_k(t)$ konverguje k Diracově funkci positivně, konverguje-li k Diracově funkci a je-li $\varphi_k(t) \geqq 0$ pro $t \in \langle -T_0, T_0 \rangle$, $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Věta 1. *Nechť posloupnost $\varphi_k(t)$ konverguje k Diracově funkci a nechť funkce $g(x)$ splňuje podmínku*

$$\|g(x_1) - g(x_2)\| \leqq \chi_1(\|x_1 - x_2\|), \; x_1, x_2 \in D ,$$

kde $\chi(\eta)$ je spojitá rostoucí pro $\eta \geqq 0$, $x(0) = 0$, $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\eta}{\chi(\eta)} = \infty$. Nechť $y_k \to y \in D$, $0 < T_0 < T_1$. Předpokládejme, že řešení $u(t)$, $t \in \langle - T_0, 0 \rangle$, rovnice

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x, t) \tag{2}$$

je jednoznačně určeno počáteční podmínkou $u(-T_0) = y$, *že řešení* $v(t)$ *rovnice*

$$\frac{dx}{dt} = g(x)\,, \tag{3}$$

$v\left(-\frac{1}{2}\right) = u(0)$, *je definováno na intervalu* $\left\langle -\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right\rangle$ *(toto řešení je jednoznačně určeno podle Osgoodovy věty) a že řešení* $w(t)$, $t \in \langle 0, T_0 \rangle$, *rovnice* (2) *je jednoznačně určeno počáteční podmínkou* $w(0) = v(\frac{1}{2})$.

Potom pro dosti velká k *existuje řešení* $x_k(t)$, $t \in \langle -T_0, T_0\rangle$, *rovnice* (1), $x_k(-T_0) = y_k$ *a platí* $x_k(t) \to u(t)$ *resp.* $w(t)$ *pro* $k \to \infty$, $t \in \langle -T_0, 0)$ *resp.* $(0, T_0\rangle$. *Posloupnost* $x_k(t)$ *konverguje stejnoměrně na každém uzavřeném intervalu, který neobsahuje bod* 0.

Věta 2. *Nechť posloupnost* $\varphi_k(t)$ *konverguje k Diracově funkci positivně. Nechť* $y_k \to y \in D$, $0 < T_0 < T_1$. *Předpokládejme, že řešení* $u(t)$, $t \in \langle -T_0, 0\rangle$, *rovnice* (2) *je jednoznačně určeno počáteční podmínkou* $u(-T_0) = y$, *že řešení* $v(t)$, $t \in \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$, *rovnice* (3) *je jednoznačně určeno počáteční podmínkou* $v(-\frac{1}{2}) = u(0)$ *a že řešení* $w(t)$, $t \in \langle 0, T_0\rangle$, *rovnice* (2) *je jednoznačně určeno počáteční podmínkou* $w(0) = u(\frac{1}{2})$.

Potom pro dosti velká k *existuje řešení* $x_k(t)$, $t \in \langle -T_0, T_0\rangle$, *rovnice* (1), $x_k(-T_0) = y_k$ *a platí:* $x_k(t) \to u(t)$ *resp.* $w(t)$ *pro* $k \to \infty$, $t \in \langle -T_0, 0)$ *resp.* $t \in (0, T_0\rangle$. *Posloupnost* $x_k(t)$ *konverguje stejnoměrně na každém uzavřeném intervalu, který neobsahuje bod* 0.

Jaroslav Kurzweil, Praha

SYSTÉMY GENERÁTORŮ ABELOVÝCH GRUP

(Referát o přednášce Vlastimila Dlaba přednesené v Matematické obci pražské dne 17. února 1958.)

V úvodu připomněl přednášející některé definice a základní výsledky teorie grup;[1]) používal při tom terminologie, kterou navrhuje akademik V. Kořínek: Grupu, jejíž každý nenulový prvek má konečný (resp. nekonečný) řád, nazveme *periodickou* (resp. *aperiodickou*). Podgrupu všech prvků konečného řádu dané grupy nazveme *periodickou částí* této grupy. Řekneme, že grupa G je *divisibilní*, jestliže každá rovnice $n \,.\, x = g$, kde n je celé nenulové číslo, $g \in G$, má v G aspoň jedno řešení; G je tedy divisibilní právě tehdy, když pro každé nenulové celé n platí $nG = G$.

Budiž $\mathfrak{M}$ neprázdná množina prvků grupy G; symbolem $\{\mathfrak{M}\}$ označme nejmenší podgrupu grupy G, obsahující všechny prvky množiny $\mathfrak{M}$. Řekneme, že $\mathfrak{S}$ je *systém generátorů* grupy G jestliže $\{\mathfrak{S}\} = G$, tj. jestliže každý prvek grupy G je možno vyjádřit jako lineární kombinaci prvků z $\mathfrak{S}$.

Vlastním obsahem přednášky bylo pak vyšetřování systémů generátorů. Přednášející ukázal nejprve na příkladech těžkosti, s nimiž se při tomto vyšetřování setkáváme. Tyto těžkosti jsou typické pro grupy, jež nemají konečný systém generátorů. Zdůrazňují to i výsledky H. Prüfera, *Untersuchungen über die Zerlegbarkeit der abzählbaren primären Abelschen Gruppen*, Math. Zeit., *17* (1923), 35—61, kterých dosahuje pomocí pojmu „hodnosti“ grupy, založeném na pojmu systému generátorů.

Literatura, týkající se studia systémů generátorů Abelových grup, je velmi chudá; jsou to jen dvě práce polských matematiků: J. Łoś, E. Sąsiada and Z. Słomiński,

[1]) Grupou rozumí se vždy aditivně psaná Abelova grupa.