Jindřich Nečas
Řešení biharmonického problému pro nekonečný klín. I.

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 83 (1958), No. 3, 257–286

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108291`

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha

SVAZEK 83 * PRAHA, 20. VIII. 1958 * ČÍSLO 3

ŘEŠENÍ BIHARMONICKÉHO PROBLÉMU PRO NEKONEČNÝ KLÍN, I

JINDŘICH NEČAS, Praha

(Došlo dne 12. června 1957) DT: 517.516

V prvé části této práce je dokázána existence a unicita řešení biharmonického problému pro nekonečný konvexní klín užitím Mellinovy transformace. Transformační metoda je tak zpracována, že hlavní výsledky jsou přímým důsledkem vlastností obrazů.

1. Úvod

Řešení biharmonického problému pro nekonečný klín je důležité jednak samo o sobě, jednak je výchozím bodem pro řešení biharmonického problému v mnohoúhelnících.

Biharmonický problém pro mnohoúhelníky lze řešit např. metodou S. L. Soboleva popsanou v [1]. Nevýhoda této metody spočívá v tom, že řeší poměrně malou třídu problémů a to takových, pro něž hraniční hodnoty jsou dány hraničními hodnotami funkce u, jejíž integrál

$$\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2\right] \mathrm{d}\Omega < \infty ,$$

kde Ω je vyšetřovaný mnohoúhelník. Řešení problému také splňuje tuto podmínku. O takové funkci je v [1] dokázáno, že je v jistém smyslu prodlužitelná na hranici Ω. Metoda, které použil N. I. Muschelišvili v [2], není zatím zpracována pro takové oblasti, jejíž hranice má rohy.

Co se týče nekonečného klínu, lze s úspěchem použít speciální metody, a to Mellinovy transformace. To učinil např. C. J. Tranter v [3] nebo J. Majer v [4]. První z nich dostal pouze formální výsledky, druhý dokázal existenci řešení pro jistou třídu hodně hladkých okrajových podmínek.

Nicméně tyto výsledky nejsou ještě zdaleka úplné, a proto naším úkolem bude vyřešit nekonečný klín za prakticky nejobecnějších okrajových podmínek. Omezíme se na klíny, jejichž vrcholový úhel je $\omega < \pi$. Klademe-li $\omega = \pi$, dostáváme polorovinu, pro niž biharmonický problém byl již vyřešen v dostatečné obecnosti např. mimo jiné v knize od I. BABUŠKY, K. REKTORYSE, F. VYČICHLA [5]. Nás budou především zajímat konvexní oblasti, a proto klíny s vrcholovými úhly většími než π nebudeme vyšetřovat.

2. Zavedení konvergence v prostoru Mellinových obrazů

Jak jsme se již zmínili v úvodu, bude našim základním aparátem Mellinova transformace. Uvedeme nejdříve běžnou definici Mellinovy transformace.

Definice 1. *Nechť $h(r)$ je měřitelná funkce definovaná skoro všude na intervalu $(0, \infty)$ a integrabilní na každém konečném intervalu z $(0, \infty)$. Nechť pro komplexní $n = x + iy$, pro něž $\mu < \operatorname{Re} n < \nu$, existuje konečná limita*

$$\lim_{\substack{a \to 0 \\ A \to \infty}} \int_a^A r^{n-1} h(r) \, \mathrm{d}r = H(n) \,. \tag{1}$$

Integrál (1) nazýváme Mellinovým obrazem originálu $h(r)$. Zobrazení, které přiřazuje originálu $h(r)$ obraz $H(n)$, nazýváme Mellinovou transformací.

O Mellinově transformaci platí následující dobře známá věta, jejíž důkaz čtenář nalezne na příklad v knize G. DOETSCHE [6]:

Věta 1. *Mellinův obraz je holomorfní funkce v pásu $\mu < \operatorname{Re} n < \nu$. Nechť pro $\mu < x < \nu$ je*

$$\int_0^\infty r^{x-1} |h(r)| \, \mathrm{d}r < \infty \,. \tag{2}$$

Potom v těch bodech $r \in (0, \infty)$, kde $h(r)$ je spojitá a v jejichž okolí má konečnou variaci, platí

$$h(r) = \lim_{\omega \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\omega}^{x+i\omega} H(n) \, r^{-n} \, \mathrm{d}n \,, \tag{3}$$

kde se integruje po přímce $\operatorname{Re} n = x$.

Jestliže integrál (2) je konvergentní pro x, pro něž $\mu < \mu' \leqq x \leqq \nu' < \nu$, potom v (3) můžeme vzít libovolné x z intervalu $\langle \mu', \nu' \rangle$. Dále platí: $\lim_{|y| \to \infty} H(x + iy) = 0$, $x \in \langle \mu', \nu' \rangle$, a to stejnoměrně vzhledem k x.

Při řešení okrajových úloh u parciálních diferenciálních rovnic metodou transformací bývá problémem, zda nalezená transformáta předpokládaného řešení, kterou se podaří obyčejně poměrně lehce získat, má za originál vskutku řešení, tj. funkci vyhovující dané rovnici a okrajovým podmínkám. My rozřešíme tuto úlohu tím způsobem, že převrátíme jisté lineály Mellinových obrazů v Banachovy prostory.

Budeme se podstatně opírat o některé známé věty z teorie Fourier-Plancherelovy transformace.

Věta 2. *Buď* $g(x)$ *v* $L^2(-\infty, \infty)$ (*tj.* $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 \, dx < \infty$). *Potom existuje ke* $g(x)$ *funkce* $G(y) \in L^2(-\infty, \infty)$, *pro niž platí* $\lim_{\omega\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |G_\omega(y) - G(y)|^2 \, dy = 0$, *kde* $G_\omega(y) = \int_{-\omega}^{\omega} e^{-iyx} g(x) \, dx$. *Zobrazení* $F(g) = G$ *se nazývá Fourier-Plancherelova transformace. Toto zobrazení je prosté a* $F(L^2(-\infty, \infty)) = L^2(-\infty, \infty)$. *Platí inversní formule*

$$g(x) = \underset{\omega\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega}^{\omega} e^{ixy} G(y) \, dy = \underset{\omega\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}} \, g_\omega(x) ,$$

což znamená, že

$$\lim_{\omega\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |g(x) - g_\omega(x)|^2 \, dx = 0 .$$

Důkaz viz [6] str. 421.

Věta 3. *Platí Parsevalova rovnost*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(y)|^2 \, dy .$$

Definice 2. $h(r) \in h_{\mu,\nu}$, *kde* $\mu < \nu$, *jestliže platí*

$$\sup_{x \in \langle\mu,\nu\rangle} \int_0^{\infty} |h(r)|^2 \, r^{2x-1} \, dr < \infty .$$

Věta 4. *Je-li* $h(r) \in h_{\mu,\nu}$, *potom pro* x, *pro něž platí* $\mu < x < \nu$, *je*

$$\int_0^{\infty} |h(r)| \, r^{x-1} \, dr < \infty .$$

Důkaz. Je

$$\int_0^{\infty} |h(r)| \, r^{x-1} \, dr = \int_0^1 |h(r)| \, r^{\mu-\frac{1}{2}} \, r^{x-\mu-\frac{1}{2}} \, dr + \int_1^{\infty} |h(r)| r^{\nu-\frac{1}{2}} \, r^{x-\nu-\frac{1}{2}} \, dr .$$

Podle Schwarzovy nerovnosti je

$$\Big[\int_0^1 |h(r)| \, r^{\mu-\frac{1}{2}} \, r^{x-\mu-\frac{1}{2}} \, dr\Big]^2 \leqq \int_0^1 |h(r)|^2 \, r^{2\mu-1} \, dr \, . \int_0^1 r^{2(x-\mu)-1} \, dr < \infty ,$$

protože $x - \mu > 0$, a

$$\Big[\int_1^{\infty} |h(r)| \, r^{\nu-\frac{1}{2}} \, r^{x-\nu-\frac{1}{2}} \, dr\Big]^2 \leqq \int_1^{\infty} |h(r)|^2 \, r^{2\nu-1} \, dr \, . \int_1^{\infty} r^{2(x-\nu)-1} \, dr < \infty ,$$

protože $x - \nu < 0$. Tím je důkaz věty 4 proveden.

Můžeme tedy funkci $h(r)$ z $h_{\mu\nu}$ přiřadit Mellinův obraz $H(n)$. (Budeme nadále psát $H(n) \in H_{\mu\nu}$.)

Věta 5. *Je-li $H(n)$ v $H_{\mu\nu}$, potom platí:*

1. *$H(n)$ je holomorfní v pásu $\mu < \operatorname{Re} n < \nu$,*
2. $\lim\limits_{|y|\to\infty} H(n) = 0$ *stejnoměrně pro x, pro něž $\mu < \mu' \leqq x \leqq \nu' < \nu$,*
3. $\displaystyle\int_0^\infty |h(r)|^2 r^{2x-1} \, dr = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(x+iy)|^2 \, dy$, $\mu < x < \nu$,
4. $\displaystyle\sup_{\mu<x<\nu} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(x+iy)|^2 \, dy < \infty$.

Důkaz. Body 1 a 2 jsou obsaženy ve větě 1. Dokažme bod 3. V integrálu $\int_0^\infty |h(r)|^2 r^{2x-1} \, dr$ proveďme substituci $r = e^{-t}$. Dostaneme

$$\int_0^\infty |h(r)|^2 r^{2x-1} \, dr = \int_{-\infty}^{\infty} |h(e^{-t})|^2 e^{-2tx} \, dt < \infty$$

pro $\mu \leqq x \leqq \nu$. Položíme-li $g(t) = h(e^{-t}) e^{-tx}$, je $g(t) \in L^2(-\infty, \infty)$. Fourier-Plancherelův obraz funkce $g(t)$ je

$$G(u) = \underset{\omega\to\infty}{\text{l. i. m}} \int_{-\omega}^{\omega} e^{-iut} g(t) \, dt .$$

Vrátíme-li se k původní funkci $h(r)$, dostaneme

$$G(u) = \underset{\varepsilon\to 0}{\text{l. i. m}} \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} h(r) \, r^{x+i\omega-1} \, dr . \tag{4}$$

Podle věty 4 je však $\int_0^\infty |h(r)| \, r^{x-1} \, dr < \infty$, a tedy limita (4) existuje v normálním smyslu a rovná se $H(x + iu)$. Podle známé věty z integrálního počtu lze vybrat posloupnost čísel ε_k jdoucích k nule tak, že skoro pro všechna u z $(-\infty, \infty)$ je

$$G(u) = \lim_{k\to\infty} \int_{\varepsilon_k}^{\frac{1}{\varepsilon_k}} h(r) \, r^{x+i\omega-1} \, dr .$$

Tedy $G(u) = H(x + iu)$. Podle věty 3 je

$$\int_0^\infty |h(r)|^2 r^{2x-1} \, dr = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(u)|^2 \, du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(x+iy)|^2 \, dy .$$

Tím je bod 3 dokázán a zároveň věta 5, neboť bod 4 téže věty je jednoduchým důsledkem bodu 3 a vlastnosti $h \in h_{\mu\nu}$ podle definice 2.

Množina $H_{\mu\nu}$ je lineární prostor. Zaveďme normu v $H_{\mu\nu}$ takto:

Definice 3. *Je-li* $H(n) \in H_{\mu\nu}$, *potom*

$$\|H\| = \sup_{\mu<x<\nu} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |H(x + iy)|^2 \, dy \right]^{\frac{1}{2}} . \tag{5}$$

Dokážeme nyní větu základní důležitosti:

Věta 6. *Je-li v* $H_{\mu\nu}$ *zavedena norma podle definice* 3, *potom* $H_{\mu\nu}$ *je Banachův prostor.*

Dříve než přistoupíme k důkazu této věty, vyslovíme dobře známou větu, jejíž důkaz nalezne čtenář např. v knize A. I. MARKUŠEVIČE [7] na str. 431.

Věta 7. *Nechť* Ω *je libovolná ohraničená oblast. Buď* P *množina holomorfních funkcí na této oblasti takových, že platí*

$$F \in P \Rightarrow \int_{\Omega} |F(p)|^2 \, d\Omega < \infty .$$

Položíme-li

$$\|F\| = \left[\int_{\Omega} |F(p)|^2 \, d\Omega\right]^{\frac{1}{2}} ,$$

potom s takto zavedenou normou je P *Banachův prostor. Z konvergence v průměru plyne lokálně stejnoměrná konvergence všech derivací.*

Vraťme se nyní k důkazu věty 6. Axiomy normy jsou v $H_{\mu\nu}$ zřejmě splněny. Dokážeme tedy úplnost prostoru $H_{\mu\nu}$. Nechť tedy $H_k(n)$ tvoří Cauchyovskou posloupnost. To tedy znamená: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje N tak, že je-li $k, l \geqq N$, pak

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H_k(x + iy) - H_l(x + iy)|^2 \, dy \leqq \varepsilon^2$$

pro $x \in (\mu, \nu)$. Pro pevné x podle věty Fischer-Rieszovy existuje funkce $H(x + iy)$ z $L^2(-\infty, \infty)$ (v y) taková, že platí

$$k \geqq N \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |H(x + iy) - H_k(x + iy)|^2 \, dy \leqq \varepsilon^2 . \tag{6}$$

Tedy

$$\|H\| < \infty , \tag{7}$$

$$\lim_{k\to\infty} \|H_k - H\| = 0 . \tag{8}$$

Z podmínky 6 dále plyne, že

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mu}^{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} |H(x + iy) - H_k(x + iy)|^2 \, dy \, dx = 0 . \tag{9}$$

Odtud zřejmě je

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mu}^{\nu} \int_{a}^{b} |H(x + iy) - H_k(x + iy)|^2 \, dy \, dx = 0 . \tag{10}$$

Zde a, b jsou libovolná konečná čísla $a \leqq b$. Z (10) a věty 7 plyne, že $H(n)$ je holomorfní funkce v pásu $\mu < \operatorname{Re} n < \nu$ (vlastnost 11).

Dokážeme však také toto pomocné tvrzení: $\lim\limits_{|y|\to\infty} H(n) = 0$ stejnoměrně pro x, pro něž je $\mu < \mu' \leqq x \leqq \nu' < \nu$ (vlastnost 12).

Uvažme obdélníky $\Omega_k = \mathcal{E}(x, y, \mu' < x < \nu', k < y < k + \frac{1}{2})$ a obdélníky $\Omega'_k = \mathcal{E}(x, y, \mu'' < x < \nu'', k - \frac{1}{4} < y < k + \frac{3}{4})$, kde $\mu < \mu'' < \mu' \leqq \nu' < \nu'' < \nu$. Zřejmě $\bar{\Omega}_k \subset \Omega'_k$ a

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{\Omega}'_k = \mathcal{E}(x, y, \mu'' \leqq x \leqq \nu'', -\infty < y < \infty) .$$

Dále

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{\Omega_k'} |H(x + iy)|^2 \, dy \, dx < \infty , \tag{11}$$

a tedy nutně

$$\lim_{k\to\pm\infty} \int_{\Omega_k'} |H(x + iy)|^2 \, dy \, dx = 0 . \tag{12}$$

Uvažme nejdříve $k \geqq 0$. Položme $H_k(p) = H(n)$ pro $p \in \Omega'_0$, $n \in \Omega'_k$, $p = n - ik$. Podle věty 7 platí: $\lim\limits_{k\to\infty} H_k(p) = 0$ stejnoměrně v $\bar{\Omega}_0$. To tedy znamená, že $\lim\limits_{y\to\infty} H(n) = 0$ stejnoměrně, pokud $n \in \sum\limits_{k=0}^{\infty} \bar{\Omega}_k$. Je evidentní, že jednoduchou úpravou předešlých úvah dokážeme úplně pomocné tvrzení (12).

Ukažme nyní, že z 7, (11), (12) plyne, že $H(n) \in H_{\mu\nu}$. Pro každé $x \in (\mu, \nu)$ je podle (7) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |H(x + iy)|^2 \, dy < \infty$, a proto podle věty 2 existuje $h_x(r)$ tak, že

$$\int_0^{\infty} |h_x(r)|^2 r^{2x-1} \, dr < \infty \ \text{ a } \ h_x(r) \, r^x = \operatorname*{l.\,i.\,m}_{\omega\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega}^{\omega} r^{-iy} H(x + iy) \, dy . \tag{13}$$

Dokážeme, že $h_x(r)$ nezávisí na x. Vskutku buď $x_1 > x_2$, $x_1, x_2, \in (\mu, \nu)$. Obvyklým postupem usoudíme z (13), že existují $\omega_k \to \infty$, když $k \to \infty$ tak, že pro skoro všechna r v $(0, \infty)$ je

$$h_{x_j}(r) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_k}^{\omega_k} r^{-x_j-iy} H(x_j + iy) \, dy , \ j = 1, 2 .$$

Užitím Cauchyho věty dostáváme

$$h_{x_1}(r) - h_{x_2}(r) = \lim_{k\to\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} r^{-n} H(n) \, dn - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{-k}} r^{-n} H(n) \, dn \right] .$$

Zde C_k je úsečka $\operatorname{Im} n = \omega_k$, $x_2 \leqq \operatorname{Re} n \leqq x_1$ a C_{-k} je úsečka $\operatorname{Im} n = \omega_{-k}$, $x_2 \leqq \operatorname{Re} n \leqq x_1$. Z (12) je patrno, že

$$\lim_{k\to\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{C_k} r^{-n} H(n)\,\mathrm{d}n - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{-k}} r^{-n} H(n)\,\mathrm{d}n\right] = 0\,,$$

a tedy $h_{x_1}(r) = h_{x_2}(r)$. Položme $h(r) = h_x(r)$. Zřejmě $h(r) \in h_{\mu\nu}$. Úvahami, kterých jsme již několikrát použili, dostaneme, že

$$\int_0^\infty h(r)\, r^{n-1}\,\mathrm{d}r = \operatorname*{l.\,i.\,m}_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon}} h(r)\, r^{n-1}\,\mathrm{d}r = H(n)\,.$$

Tím je důkaz věty 6 ukončen.

Poznamenejme, že jsme zároveň dokázali, že prostor $H_{\mu\nu}$ je charakterisován těmito dvěma vlastnostmi:

F je v $H_{\mu\nu}$ tehdy a jenom tehdy, platí-li:

1. $\sup\limits_{\mu<x<\nu} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x+iy)|^2\,\mathrm{d}y < \infty$,
2. *$F(n)$ je holomorfní funkce v pásu $\mu < \operatorname{Re} n < \nu$.*

3. Definice biharmonického problému pro nekonečný klín, existence řešení a jeho unicita

Budeme nejdříve vyšetřovat vlastnosti některých biharmonických funkcí definovaných na nekonečném klínu.

Definice 4. *Budeme říkat, že $u(r, \Theta)$ patří do A, jestliže:*

1. *$u(r, \Theta)$ je reálná funkce, definovaná na klínu K, což je množina bodů o průvodiči $r \in (0, \infty)$ a amplitudě $\Theta \in \left(-\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2}\right)$, $0 < \omega < \pi$,*

2. *$u(r, \Theta)$ má v oblasti K spojité derivace 1. až 4. řádu a platí*

$$\Delta^2 u = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\Theta^2}\right)^2 u = 0\,,$$

3. *$u(r, \Theta)$ a $\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\Theta}(r, \Theta)$ jsou spojité na $\overline{K}$ nejvýše s výjimkou vrcholu,*

4. *pro $r \in (0, 1\rangle$, $\Theta \in \left\langle -\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2}\right\rangle$, resp. $r \in \langle 1, \infty)$, $\Theta \in \left\langle -\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2}\right\rangle$ platí $\left|\frac{1}{r^{k-l}}\frac{\partial^k u}{\partial\Theta^m\,\partial r^l}\right| \leq M r^{-\gamma-k}$, resp. $\left|\frac{1}{r^{k-l}}\frac{\partial^k u}{\partial\Theta^m\,\partial r^l}\right| \leq M r^{-\delta-k}$, kde $m + l = k$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$, M je pevná konstanta, $-\lambda_1(\omega) - 1 < \gamma < \delta < \lambda_1(\omega) - 1$. Zde $\lambda_1(\omega) = \operatorname{Re} p_1(\omega)$, při čemž p_1 je kořen s nejmenší kladnou reálnou částí a s nezápornou imaginární částí transcendentní rovnice $p \sin\omega + \sin p\omega = 0$. Kořeny této rovnice nazýváme Papkovičovými čísly.*

Množina A obsahuje kromě nuly i jiné prvky. Tak na příklad funkce $e^{-nx} \cos ny(A + Bx + Cy)$, kde $n > 0$, A, B, C jsou reálné konstanty, $x = r \cos \Theta$, $y = r \sin \Theta$, leží v této množině.

Vypočítáme-li Mellinův obraz funkce $u(r, \Theta)$ z A, dostaneme výsledky, které jsou shrnuty ve větě 8.

Věta 8. *Nechť* $u(r, \Theta) \in A$. *Označme* $U(n, \Theta) = \int_0^\infty u(r, \Theta)\, r^{n-1}\, \mathrm{d}r$. *Potom*

$$U(n, \Theta) = A(n) \sin n\Theta + B(n) \cos n\Theta + C(n) \sin (n + 2)\, \Theta + D(n) \cos (n + 2)\, \Theta\,, \tag{14}$$

$$A(n) = \frac{\mathrm{A}}{2\,[(n + 1) \sin \omega - \sin (n + 1)\, \omega]}\,,$$

$$\mathrm{A} = [G_1(n + 1) - G_2(n + 1)] \sin (n + 2) \frac{\omega}{2} - [F_1(n) - F_2(n)]\, (n + 2) \cos (n + 2) \frac{\omega}{2}\,, \tag{15a}$$

$$B(n) = \frac{\mathrm{B}}{2\,[(n + 1) \sin \omega + \sin (n + 1)\, \omega]}\,,$$

$$\mathrm{B} = [G_1(n + 1) + G_2(n + 1)] \cos (n + 2) \frac{\omega}{2} + [F_1(n) + F_2(n)]\, (n + 2) \sin (n + 2) \frac{\omega}{2}\,, \tag{15b}$$

$$C(n) = \frac{-\,[G_1(n + 1) - G_2(n + 1)] \sin n \frac{\omega}{2} + [F_1(n) - F_2(n)]\, n \cos n \frac{\omega}{2}}{2[(n + 1) \sin \omega - \sin (n + 1)\, \omega]}\,, \tag{15c}$$

$$D(n) = \frac{-\,[G_1(n + 1) + G_2(n + 1)] \cos n \frac{\omega}{2} - [F_1(n) + F_2(n)]\, n \sin n \frac{\omega}{2}}{2[(n + 1) \sin \omega + \sin (n + 1)\, \omega]}\,. \tag{15d}$$

Zde

$$f_1(r) = u\left(r, \frac{\omega}{2}\right), \quad f_2(r) = u\left(r, -\frac{\omega}{2}\right), \quad g_1(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \Theta} u\left(r, \frac{\omega}{2}\right),$$

$$g_2(r) = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \Theta} u\left(r, -\frac{\omega}{2}\right), \quad F_i(n) = \int_0^\infty f_i(r) r^{n-1}\, \mathrm{d}r, \quad G_i(n + 1) = \int_0^\infty g_i(r)\, r^n\, \mathrm{d}r, \quad i = 1, 2\,.$$

Důkaz. Rozepíšeme podmínku 2 definice 4:

$$\left(\frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2}\right)^2 u = \frac{\partial^4 u}{\partial r^4} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^4 u}{\partial r^2\, \partial \Theta^2} + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 u}{\partial \Theta^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 u}{\partial r^3} -$$

$$-\frac{2}{r^3}\frac{\partial^3 u}{\partial r\,\partial\Theta^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{4}{r^4}\frac{\partial^2 u}{\partial\Theta^2}+\frac{1}{r^3}\frac{\partial u}{\partial r}=0\,. \tag{16}$$

Vynásobme rovnici (16) výrazem r^{n+3}, kde $\gamma < \operatorname{Re} n < \delta$, a integrujme od nuly do nekonečna. Pro prvý člen z (16) např. dostaneme:

$$\int_0^\infty \frac{\partial^4 u}{\partial r^4}\, r^{n+3}\,\mathrm{d}r = \frac{\partial^3 u}{\partial r^3}\, r^{n+3}\Big]_0^\infty - (n+3)\int_0^\infty \frac{\partial^3 u}{\partial r^3}\, r^{n+2}\,\mathrm{d}r =$$

$$= -(n+3)\int_0^\infty \frac{\partial^3 u}{\partial r^3}\, r^{n+2}\,\mathrm{d}r\,,$$

protože podle vlastnosti 4 definice 4 je $\frac{\partial^3 u}{\partial r^3}\, r^{n+3}\Big]_0^\infty = 0$. Tímto postupem dostaneme obyčejnou diferenciální rovnici pro obraz funkce $u(r, \Theta)$

$$\frac{\mathrm{d}^4 U(n,\Theta)}{\mathrm{d}\Theta^4} + [(n+2)^2 + n^2]\,\frac{\mathrm{d}^2 U(n,\Theta)}{\mathrm{d}\Theta^2} + n^2(n+2)^2\, U(n,\Theta) = 0\,. \tag{17}$$

(Převedení parciální diferenciální rovnice (16) na obyčejnou diferenciální rovnici — to je hlavní důvod užití Mellinovy transformace.)

Obecné řešení rovnice (17) lehce najdeme ve tvaru

$$U(n,\Theta) = A(n)\sin n\Theta + B(n)\cos n\,\Theta + C(n)\sin(n+2)\,\Theta + $$
$$+ D(n)\cos(n+2)\,\Theta\,. \tag{18}$$

Z vlastnosti 4 a 3 definice 4 plyne

$$\lim_{\Theta\to\frac{\omega}{2}} U(n,\Theta) = F_1(n)\,,\quad \lim_{\Theta\to-\frac{\omega}{2}} U(n,\Theta) = F_2(n)\,,$$

$$\lim_{\Theta\to\frac{\omega}{2}} \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\Theta}(n,\Theta) = G_1(n+1),\ \lim_{\Theta\to-\frac{\omega}{2}} \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\Theta}(n,\Theta) = -\,G_2(n+1)\,. \tag{19}$$

Podmínky (19) určí jednoznačně koeficienty v obecném řešení (18). Dostáváme tak formule 15 a tím je důkaz věty 8 skončen.

Z formulí (15) je vidět, že na chování obrazu a tím i originálu má zásadní vliv šířka pásu, v němž $A(n)$, $B(n)$, $C(n)$, $D(n)$ jsou holomorfní. Ta je jednak určena funkcemi $F_i(n)$, $G_i(n+1)$, jednak jmenovateli ve zlomcích (15). Dokážeme proto následující pomocnou větou:

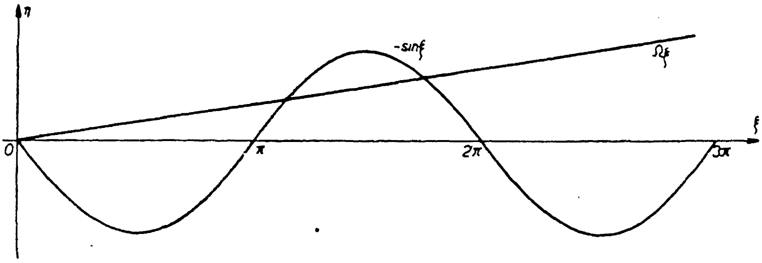
Věta 9. *Buďte p_1 a $q_1 \neq 1$ kořeny s nejmenší kladnou reálnou částí a s nezápornou imaginární částí transcendentních rovnic*

$$p\sin\omega + \sin p\omega = 0\,, \tag{20}$$

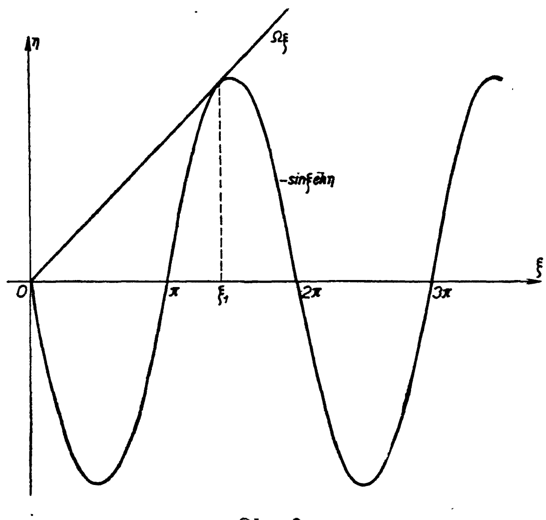
$$q\sin\omega - \sin q\omega = 0\,. \tag{21}$$

Zde je $0 < \omega \leqq \pi$. *Buď* ω_1 *prvý kladný kořen rovnice* $\omega = \operatorname{tg} \omega$ *a* ω_0 *takové číslo mezi* 0 *a* π, *že* $\dfrac{\sin \omega_0}{\omega_0} = -\dfrac{\sin \omega_1}{\omega_1}$. *Potom platí:*

1. $0 < \omega < \omega_0 \Rightarrow \operatorname{Im} p_1 > 0$; 2. $\omega_0 \leqq \omega \leqq \pi \Rightarrow \operatorname{Im} p_1 = 0$; 3. *funkce* $\lambda_1(\omega) = \operatorname{Re} p_1(\omega)$ *je spojitá v intervalu* $(0, \pi\rangle$; 4. $0 < \omega < \pi \Rightarrow \operatorname{Re} p_1 > 1$; 5. $\operatorname{Re} p_1(\pi) = 1$; 6. $p_1(\frac{1}{2}\pi) \doteq 2{,}740 + i\,1{,}106$; 7. $0 < \omega \leqq \pi \Rightarrow \operatorname{Re} p_1 < \operatorname{Re} q_1$.



Obr. 1.



Obr. 2.

Důkaz. Označme $z = p\omega$, resp. $q\omega$, $z = \xi + i\eta$, $\dfrac{\sin \omega}{\omega} = \Omega$. Rovnice (20) a (21) přejdou v rovnice

$$\Omega\xi \pm \sin \xi \operatorname{ch} \eta = 0\,, \tag{22}$$

$$\Omega\eta \pm \cos \xi \operatorname{sh} \eta = 0\,. \tag{23}$$

Zde horní znaménko odpovídá rovnici (20) a dolní rovnici (21). Na η se dívejme jako na parametr. Určeme to Ω_0, pro něž přímka $\Omega_0\xi$ se dotýká křivky $-\sin \xi$. (Viz obr. 1.) Dostáváme v bodě dotyku: $\Omega_0 = -\cos \xi_1$, $\Omega_0\xi_1 = -\sin \xi_1$. Je tedy předně $\xi_1 = \omega_1$ a odtud plyne, že $\Omega_0 = \dfrac{\sin \omega_0}{\omega_0}$. Jestliže tedy $\omega \geqq \omega_0$, potom

$\Omega \leqq \Omega_0$, a tedy průsečík přímky $\Omega\xi$ s křivkou $-\sin\xi$ je v bodě ξ', $\pi \leqq \xi' \leqq \leqq \omega_1$. Klademe-li $\eta = 0$, vyhovuje ξ' rovnici (22).

Pokud nebude řečeno jinak, budeme v dalším brát rovnice (22) a (23) s horním znaménkem. V tomto případě je (23) identicky splněna. Kořenů s menší reálnou částí rovnice (20) nemá. To plyne z (23). Předpokládejme, že rovnicím (22) a (23) hoví ξ, η, $\eta > 0$. Pro $\eta > 0$ je

$$\Omega \frac{\eta}{\operatorname{sh}\eta} = -\cos\xi < \Omega \leqq -\frac{\sin\omega_1}{\omega_1} = -\cos\omega_1 .$$

Protože $\cos\xi > \cos\omega_1$, je $\omega_1 < \xi$. Tím jsme dokázali bod 2. Bod 5 je zřejmý. Zřejmě funkce $\operatorname{Re} p_1(\omega)$ je spojitá pro $\omega \in \langle\omega_0, \pi\rangle$. Buď dále $\omega < \omega_0$. Aby mohla být splněna rovnice (22), je nutné, aby bylo $\eta > 0$. Najděme takové η_1, pro něž přímka $\xi\Omega$ se dotýká křivky $-\sin\xi \operatorname{ch}\eta$. (Viz obr. 2.) Dostáváme v bodě dotyku

$$\Omega = -\cos\xi_1 \operatorname{ch}\eta_1 , \quad \Omega\xi_1 = -\sin\xi_1 \operatorname{ch}\eta_1 .$$

Odtud plyne, že $\xi_1 = \omega_1$. Buď ξ_2 úsečka druhého průsečíku přímky $-\Omega \dfrac{\eta_1}{\operatorname{sh}\eta_1}$ s křivkou $\cos\xi$. Je $\xi_2 < \xi_1$. Vskutku je

$$\cos\xi_2 = -\Omega \frac{\eta_1}{\operatorname{sh}\eta_1} < -\Omega \frac{1}{\operatorname{ch}\eta_1} = \cos\xi_1 .$$

Při růstu parametru η úsečka prvního průsečíku přímky $\Omega\xi$ s křivkou $-\sin\xi \operatorname{ch}\eta$ klesá, kdežto úsečka druhého průsečíku přímky $-\Omega \dfrac{\eta}{\operatorname{sh}\eta}$ s křivkou $\cos\xi$ stoupá. Odtud již lehce plyne, že $\xi_2 < \operatorname{Re} p_1 < \xi_1$, tedy bod 1, 3 a 4. Bod 6 plyne z přímého výpočtu.

Uvažme nyní rovnice (22) a (23) tentokrát se znaménkem $-$. Jestliže $\eta = 0$, potom $\dfrac{\sin\omega}{\omega} = \dfrac{\sin\xi}{\xi}$. První řešení $\omega = \xi$ této rovnice vynecháváme, druhé řešení, existuje-li, leží v intervalu $\langle 2\pi, 3\pi\rangle$. Je-li $\eta > 0$, potom pro ξ, jež vyhovuje současně rovnicím (22) a (23) a je v $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right\rangle$, dostáváme:

$$\frac{\sin\xi}{\xi} > \cos\xi \Rightarrow \frac{\eta}{\operatorname{sh}\eta} > \frac{1}{\operatorname{ch}\eta},$$

což je nemožné. ξ tedy musí být větší než 2π. Tím je podán důkaz bodu 7 a tedy dokončen důkaz věty 9.

Podáme nyní definici biharmonického problému pro nekonečný klín o vrcholovém úhlu $0 < \omega < \pi$.

Definice 5. *Buďte funkce $f_1(r)$, $f_2(r)$ reálné, absolutně spojité na každém konečném intervalu z $(0, \infty)$ a takové, že pro nějaká μ, ν, pro něž platí $-\lambda_1(\omega) - 1 < < \mu, \nu < \lambda_1(\omega) - 1$, je:*

1. $\int\limits_0^1 [f_i'(r)]^2 r^{2\mu+1} \mathrm{d}r < \infty$, $\int\limits_1^\infty [f_i'(r)]^2 r^{2\nu+1} \mathrm{d}r < \infty$, $i = 1, 2$; dále $g_1(r)$, $g_2(r)$

buďte takové reálné funkce, že

2. $\int_0^1 [g_i(r)]^2\, r^{2\mu+1}\, \mathrm{d}r < \infty$, $\int_1^\infty [g_i(r)]^2\, r^{2\nu+1}\, \mathrm{d}r < \infty$, $i = 1, 2$ *(přitom nemusí být* $\mu < \nu$*).*

Biharmonickým problémem nazýváme úlohu stanovit takovou reálnou funkci $u(r, \Theta)$, *že pro ni platí:*

3. *body* 1 *a* 2 *definice* 4,

$$
4.\quad \left.\begin{aligned}
&\lim_{\Theta \to \frac{\omega}{2}} \int_0^1 [f_1(r) - u(r, \Theta)]^2\, r^{2\gamma-1}\, \mathrm{d}r = 0\,,\\
&\lim_{\Theta \to -\frac{\omega}{2}} \int_0^1 [f_2(r) - u(r, \Theta)]^2\, r^{2\gamma-1}\, \mathrm{d}r = 0\,,\\
&\lim_{\Theta \to \frac{\omega}{2}} \int_1^\infty [f_1(2) - u(r, \Theta)]^2\, r^{2\delta-1}\, \mathrm{d}r = 0\,,\\
&\lim_{\Theta \to -\frac{\omega}{2}} \int_1^\infty [f_2(r) - u(r, \Theta)]^2\, r^{2\delta-1}\, \mathrm{d}r = 0\,,
\end{aligned}\right\} \quad \text{(a)}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\lim_{\Theta \to \frac{\omega}{2}} \int_0^1 \left[f_1'(r) - \frac{\partial u}{\partial r}(r, \Theta)\right]^2 r^{2\gamma+1}\, \mathrm{d}r = 0\,,\\
&\lim_{\Theta \to -\frac{\omega}{2}} \int_0^1 \left[f_2'(r) - \frac{\partial u}{\partial r}(r, \Theta)\right]^2 r^{2\gamma+1}\, \mathrm{d}r = 0\,,\\
&\lim_{\Theta \to \frac{\omega}{2}} \int_1^\infty \left[f_1'(r) - \frac{\partial u}{\partial r}(r, \Theta)\right]^2 r^{2\delta+1}\, \mathrm{d}r = 0\,,\\
&\lim_{\Theta \to -\frac{\omega}{2}} \int_1^\infty \left[f_2'(r) - \frac{\partial u}{\partial r}(r, \Theta)\right]^2 r^{2\delta+1}\, \mathrm{d}r = 0\,,
\end{aligned}\right\} \quad \text{(b)}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\lim_{\Theta \to \frac{\omega}{2}} \int_0^1 \left[g_1(r) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \Theta} u(r, \Theta)\right]^2 r^{2\gamma+1}\, \mathrm{d}r = 0\,,\\
&\lim_{\Theta \to -\frac{\omega}{2}} \int_0^1 \left[g_2(r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \Theta} u(r, \Theta)\right]^2 r^{2\gamma+1}\, \mathrm{d}r = 0\,,\\
&\lim_{\Theta \to \frac{\omega}{2}} \int_1^\infty \left[g_1(r) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \Theta} u(r, \Theta)\right]^2 r^{2\delta+1}\, \mathrm{d}r = 0\,,\\
&\lim_{\Theta \to -\frac{\omega}{2}} \int_1^\infty \left[g_2(r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \Theta} u(r, \Theta)\right]^2 r^{2\delta+1}\, \mathrm{d}r = 0
\end{aligned}\right\} \quad \text{(c)}
$$

(*zde* γ, δ *jsou reálná čísla, pro něž platí:* $-\lambda_1(\omega) - 1 < \gamma, \delta < \lambda_1(\omega) - 1$).

5. *Ke každému* $0 \leqq \varphi < \frac{\omega}{2}$ *existuje konstanta* $M(\varphi)$ *tak, že pro* $0 < r \leqq 1$ *je*

$$|\Theta| \leqq \varphi \Rightarrow \left|\frac{\partial u}{\partial r}\right| \leqq Mr^{-\gamma-1}\,, \quad \left|\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \Theta}\right| \leqq Mr^{-\gamma-1}$$

a pro $1 \leqq r < \infty$ *je*

$$|\Theta| \leqq \varphi \Rightarrow \left|\frac{\partial u}{\partial r}\right| \leqq Mr^{-\delta-1}\,, \quad \left|\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \Theta}\right| \leqq Mr^{-\delta-1}\,.$$

(Množinu funkcí, které splňují podmínky 3, 4, 5, budeme značit B.)

Nyní dokážeme existenci řešení.

Věta 10. *Jestliže* $f_i(r)$ a $g_i(r)$ *vyhovují podmínkám definice 5, potom existuje řešení příslušné k těmto funkcím, vyhovující podmínkám definice 5. Navíc platí* $\gamma = \text{Max}\,(\varepsilon, \mu)$, $\delta = \text{Min}\,(-\varepsilon, \nu)$, *kde je* $\varepsilon > 0$ *a libovolně malé.*

Důkaz. Rozdělme nejdříve okrajové podmínky na dvě části:

$$f_1(r) = f_{11}(r) + f_{12}(r),\ f_2(r) = f_{21}(r) + f_{22}(r),\ g_1(r) = g_{11}(r) + g_{12}(r),$$
$$g_2(r) = g_{21}(r) + g_{22}(r)\,,$$

při čemž platí, že $f_{ij}(r)$ jsou funkce absolutně spojité na každém konečném intervalu $z(0, \infty)$, $f_{i1}(r) = 0$ pro $r \geqq 2$, $f_{i2}(r) = 0$ pro $r \leqq 1$, $i = 1, 2$;

$$\int_0^1 [f'_{i1}(r)]^2\, r^{2\mu+1}\, dr < \infty\,, \quad \int_1^\infty [f'_{i1}(r)]^2\, r^{2\nu'+1}\, dr < \infty\,,$$

kde ν' je libovolné reálné číslo;

$$\int_0^1 [f'_{i2}(r)]^2\, r^{2\mu'+1}\, dr < \infty\,, \quad \int_1^\infty [f'_{i2}(r)]^2\, r^{2\nu+1}\, dr < \infty\,,$$

kde μ' je libovolné reálné číslo, $i = 1, 2$; podobně $g_{i1}(r) = 0$ pro $r \geqq 2$, $g_{i2}(r) = 0$ pro $r \leqq 1$, $i = 1, 2$;

$$\int_0^1 [g_{i1}(r)]^2\, r^{2\mu+1}\, dr < \infty\,, \quad \int_1^\infty [g_{i1}(r)]^2\, r^{2\nu'+1}\, dr < \infty\,,$$
$$\int_0^1 [g_{i2}(r)]^2\, r^{2\mu'+1}\, dr < \infty\,, \quad \int_1^\infty [g_{i2}(r)]^2\, r^{2\nu+1}\, dr < \infty\,.$$

Stanovíme nejdříve řešení biharmonického problému pro klín, příslušné funkcím $f_{i1}(r)$ a $g_{i1}(r)$.

Zvolme $\mu < \nu' < \lambda_1(\omega) - 1$. Zřejmě je $f'_{i1}(r)\, r \in h_{\mu\nu'}$, $i = 1, 2$, $g_{i1}(r)\,.\,r \in h_{\mu\nu'}$, $i = 1, 2$.

Dokažme nyní toto pomocné tvrzení:

Je-li $\mu > 0$, *potom z* $f'_{i1}(r)\, r \in h_{\mu,\nu'}$ *vyplývá*

$$f_{i1}(r) \in h_{\mu\nu'}\,. \tag{24}$$

Dokažme nejdříve, že $f_{i1}(r) \in h_{\mu_1\nu_1'}$, kde $\mu < \mu_1 < \nu_1' < \nu'$. Vskutku pro x, pro něž $\mu_1 \leqq x \leqq \nu_1'$, je

$$\int_0^\infty [f_{i1}(r)]^2 r^{2x-1} \, dr = \int_0^3 [\int_r^3 f_{i1}'(s) \, ds]^2 \, . \, r^{2x-1} \, dr =$$

$$= \int_0^3 [\int_r^3 f_{i1}'(s) \, s^{\mu+\frac{1}{2}} \, . \, s^{-\mu-\frac{1}{2}} \, ds]^2 \, r^{2x-1} \, dr \leqq$$

$$\leqq \int_0^\infty [f_{i1}'(s)]^2 \, s^{2\mu+1} \, ds \int_0^3 \frac{1}{2\mu} [r^{-2\mu} - 3^{-2\mu}] \, r^{2x-1} \, dr \, .$$

Dále je pro n, pro něž $\mu_1 < \operatorname{Re} n < \nu_1'$,

$$\int_0^\infty f_{i1}(r) \, r^{n-1} \, dr = \frac{1}{n} \, r^n f_{i1}(r) \Big]_0^\infty - \frac{1}{n} \int_0^\infty r^n f_{i1}'(r) \, dr \, . \tag{25}$$

Z věty 4 plyne, že je $\frac{1}{n} \, r^n f_{i1}(r) \Big]_0^\infty = 0$. Z (25) tedy plyne, že $F_{i1}(n) \in H_{\mu\nu'}$, a tedy např. z rovnice (3) věty 5 plyne tvrzení 24.

Dosaďme nyní do (15) $F_{i1}(n)$, $G_{i1}(n+1)$ pro $i = 1, 2$. Dostaneme $U_1(n, \Theta)$. Dokážeme, že originál k (14) řeší biharmonický problém příslušný funkcím $f_{i1}(r)$ a $g_{i1}(r)$. Ukážeme nejdříve, že $U_1(n, \Theta) \in H_{\mu\nu'}$. Předpokládáme $\mu > 0$. K tomu účelu poněkud upravíme vzorec pro $U_1(n, \Theta)$, který dostaneme z (15). Platí

$$\begin{aligned}
U_1(n, \Theta) = {} & \frac{(n+2) \sin (n+2) \frac{\omega}{2} \cos n\Theta - n \sin n \frac{\omega}{2} \cos (n+2) \Theta}{(n+1) \sin \omega + \sin (n+1) \omega} \frac{1}{2} \, . \\
& . \, [F_{11}(n) + F_{21}(n)] + \\
& + \frac{-(n+2) \cos (n+2) \frac{\omega}{2} \sin n\Theta + n \cos n \frac{\omega}{2} \sin (n+2) \Theta}{(n+1) \sin \omega - \sin (n+1) \omega} \frac{1}{2} \, . \\
& . \, [F_{11}(n) - F_{21}(n)] + \\
& + \frac{\cos (n+2) \frac{\omega}{2} \cos n\Theta - \cos n \frac{\omega}{2} \cos (n+2) \Theta}{(n+1) \sin \omega + \sin (n+1) \omega} \frac{1}{2} \, . \, [G_{11}(n+1) + G_{21}(n+1)] + \\
& + \frac{\sin (n+2) \frac{\omega}{2} \sin n\Theta - \sin n \frac{\omega}{2} \sin (n+2) \Theta}{(n+1) \sin \omega - \sin (n+1) \omega} \frac{1}{2} \, . \, [G_{11}(n+1) - G_{21}(n+1)] \, .
\end{aligned} \tag{26}$$

Z (25) plyne, že $nF_{i1}(n) \in H_{\mu\nu'}$. Dále zřejmě je $G_{i1}(n+1) \in H_{\mu\nu'}$. Protože platí

$$\lim_{|v| \to \infty} \frac{|\sin n\varphi|}{e^{v\varphi}} = \frac{1}{2} \tag{27}$$

stejnoměrně vzhledem k x v konečném intervalu, dostáváme např.

$$\left|\frac{\sin(n+2)\frac{\omega}{2}\cos n\Theta}{(n+1)\sin\omega+\sin(n+1)\omega}\right| \leqq Me^{-|y|\left(\frac{\omega}{2}-|\Theta|\right)} \tag{28}$$

stejnoměrně pro $x \in \langle \mu, \nu' \rangle$. Zde M je konstanta (jmenovatel se neanuluje v bodech, pro něž $0 < \mu \leqq \operatorname{Re} n \leqq \nu' < \lambda(\omega) - 1$). Provedeme-li tedy všechny příslušné odhady analogické odhadu (28), dostáváme, že $U_1(n, \Theta) \in H_{\mu\nu'}$.

Na základě inversní formule pro Fourier-Planchelerův integrál lehce dokážeme, že originál $u_1(r, \Theta)$ k $U_1(n, \Theta)$ se vypočítá takto:

$$u_1(r, \Theta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} U_1(n, \Theta)\, r^{-n}\, \mathrm{d}n\,. \tag{29}$$

Zde se integruje po přímce $\operatorname{Re} n = x$, $\mu < x < \nu'$. Integrál absolutně konverguje, neboť analogicky s (28) a využitím toho, že $nF_{i1}(n)$ a $G_{i1}(n+1)$ konvergují k nule, když $|y| \to \infty$, dostáváme

$$|U_1(n, \Theta)| \leqq Me^{-|y|\left(\frac{\omega}{2}-|\Theta|\right)}$$

stejnoměrně pro $x \in \langle \mu + \varepsilon, \nu' - \varepsilon \rangle$, $\varepsilon > 0$. Integrál (29) můžeme derivovat za integračním znaménkem. To plyne z toho, že i pro derivace $U_1(n, \Theta)$ podle Θ dostáváme odhady

$$\left|\frac{\mathrm{d}^k U_1(n, \Theta)}{\mathrm{d}\Theta^k}\right| \leqq M\,|y|^k\, e^{-|y|\left(\frac{\omega}{2}-|\Theta|\right)}, \quad |y| \geqq 1\,,$$

stejnoměrně pro $x \in \langle \mu + \varepsilon, \nu' - \varepsilon \rangle$, kde $\varepsilon > 0$ a dosti malé. Protože integrand je zřejmě biharmonická funkce, dostáváme, že $u_1(r, \Theta)$ splňuje podmínku 3 definice 5.

Dokážeme nyní bod 4 definice 5. Dříve než se pustíme přímo do důkazu, dokážeme toto pomocné tvrzení:

Lemma 1. *Jestliže $H(n)$ je v $H_{\mu\nu}$, potom integrály $\int_{-\infty}^{\infty} |H(x + iy)|^2 \, \mathrm{d}y$ konvergují stejnoměrně vzhledem k x z intervalu (μ, ν).*

Důkaz. Jestliže $H(n)$ je v $H_{\mu\nu}$, potom existuje $H(\mu + iy) \in L^2(-\infty, \infty)$ a $H(\nu + iy) \in L^2(-\infty, \infty)$, kde $H(\mu + iy)$ je Fourier-Plancherelův obraz funkce $h(e^{-t})\, e^{-t\mu}$ a $H(\nu + iy)$ Fourier-Plancherelův obraz funkce $h(e^{-t})\, e^{-t\nu}$.

Platí

$$\lim_{x \to x_0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |H(x + iy) - H(x_0 + iy)|^2 \, \mathrm{d}y = 0 \tag{29'}$$

pro $x \in \langle \mu, \nu \rangle$, $x_0 \in \langle \mu, \nu \rangle$. Vskutku z Parsevalovy rovnosti 3 a věty 5 plyne, že (29′) platí, je-li

$$\lim_{x \to x_0} \int_0^\infty |h(r)|^2 \, [r^x - r^{x_0}]^2 \, r^{-1} \, \mathrm{d}r = 0 \, .$$

Avšak

$$\lim_{x \to x_0} \int_0^1 |h(r)|^2 \, [r^x - r^{x_0}]^2 \, r^{-1} \, \mathrm{d}r = 0 \, ,$$

protože $4 \, |h(r)|^2 \, r^{2\mu - 1}$ je integrabilní majoranta funkcí $|h(r)|^2 \, [r^x - r^{x_0}]^2 \, r^{-1}$. Zřejmě skoro všude v $\langle 0, 1 \rangle$ je

$$\lim_{x \to x_0} |h(r)|^2 \, [r^x - r^{x_0}]^2 \, r^{-1} = 0 \, .$$

Předpokládejme, že

$$\lim_{A \to \infty} \sup_{x \in (\mu, \nu)} \int_A^\infty |F(x + iy)|^2 \, \mathrm{d}y = \varepsilon > 0 \, .$$

Budou tedy existovat čísla $x_n \to x_0$, když $n \to \infty$, $x_n, x_0 \in \langle \mu, \nu \rangle$ taková, že $\int_n^\infty |F(x_n + iy)|^2 \, \mathrm{d}y \geqq \frac{\varepsilon}{2}$. Protože je

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^\infty |F(x_0 + iy) - F(x_n + iy)|^2 \, \mathrm{d}y = 0 \, ,$$

je pro $n \geqq N$, kde N je dosti velké číslo, $\int_n^\infty |F(x_0 + iy)|^2 \, \mathrm{d}y \geqq \frac{\varepsilon}{4}$, což není možné. Tím je lemma dokázána. (Vyšetřování integrálu $\int_{-\infty}^{-n} |F(x + iy)|^2 \, \mathrm{d}y$ přenecháváme čtenáři.)

Vraťme se tedy k důkazu bodu 4 definice 5.

(a) Buď $\varepsilon > 0$, libovolné. Buď $A > 1$ tak velké číslo, že

$$\sup_{x \in (\mu, \nu')} \int_A^\infty |nF_{i1}(x + iy)|^2 \, \mathrm{d}y < \varepsilon^2, \qquad \sup_{x \in (\mu, \nu')} \int_{-\infty}^{-A} |nF_{i1}(x + iy)|^2 \, \mathrm{d}y < \varepsilon^2 \, ,$$

$$\sup_{x \in (\mu, \nu')} \int_A^\infty |G_{i1}(x + 1 + iy)|^2 \, \mathrm{d}y < \varepsilon^2, \quad \sup_{x \in (\mu, \nu')} \int_{-\infty}^{-A} |G_{i1}(x + 1 + iy)|^2 \, \mathrm{d}y < \varepsilon^2, \; i = 1, 2 \, .$$

Podle (26) je

$$U_1(n, \Theta) = K(n, \Theta) \, \tfrac{1}{2}[nF_{11}(n) + nF_{21}(n)] + L(n, \Theta) \, \tfrac{1}{2}[nF_{11}(n) - nF_{21}(n)] + \\ + M(n, \Theta) \, \tfrac{1}{2}[G_{11}(n + 1) + G_{21}(n + 1)] + N(n, \Theta) \, \tfrac{1}{2}[G_{11}(n + 1) - G_{21}(n + 1)] \, .$$

Z (27) snadno dostaneme, že stejnoměrně vzhledem k $x \in (\mu, \nu)$, $y \in (-\infty, \infty)$, $\Theta \in \left\langle -\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2} \right\rangle$ je $|K(n, \Theta)| \leqq M$, $|L(n, \Theta)| \leqq M$, $|M(n, \Theta)| \leqq M$, $|N(n, \Theta)| \leqq \leqq M$, kde M je nějaká konstanta. Tedy

$$\sup_{x \in (\mu, \nu)} \int_A^\infty |U_1(x + iy, \Theta)|^2 \, \mathrm{d}y < 16M^2 \varepsilon^2 \, , \quad \sup_{x \in (\mu, \nu)} \int_{-\infty}^{-A} |U_1(x + iy)|^2 \, \mathrm{d}y < 16M^2 \, \varepsilon^2 \, .$$

Buď nyní K taková konstanta, že $\|F_i(n)\|^2 < K^2$, $\|G_{i1}(n+1)\|^2 < K^2$, $i = 1, 2$. Lehce se přesvědčíme, že

$$\lim_{\Theta \to \frac{\omega}{2}} K(n, \Theta)\, n = 1\,, \quad \lim_{\Theta \to \frac{\omega}{2}} L(n, \Theta)\, n = 1\,,$$

$$\lim_{\Theta \to \frac{\omega}{2}} M(n, \Theta) = 0\,, \quad \lim_{\Theta \to \frac{\omega}{2}} N(n, \Theta) = 0\,,$$

a to stejnoměrně pro $x \in \langle \mu, \nu' \rangle$, $y \in \langle -A, A \rangle$. Např.

$$\lim_{\Theta \to \frac{\omega}{2}} nK(n, \Theta) = \frac{(n+2) \sin (n+2) \frac{\omega}{2} \cos n \frac{\omega}{2} - n \sin n \frac{\omega}{2} \cos (n+2) \frac{\omega}{2}}{(n+1) \sin \omega + \sin (n+1)\, \omega} =$$

$$= \frac{\mathrm{A}}{(n+1) \sin \omega + \sin (n+1)\, \omega} = 1\,.$$

$$\mathrm{A} = (n+1) \left[\sin (n+2) \frac{\omega}{2} \cos n \frac{\omega}{2} - \sin n \frac{\omega}{2} \cos (n+2) \frac{\omega}{2} \right] +$$

$$+ \sin(n+2) \frac{\omega}{2} \cos n \frac{\omega}{2} + \sin n \frac{\omega}{2} \cos (n+2) \frac{\omega}{2}.$$

Jestliže je $\Theta \geqq \varphi_0$, pak platí

$$|K(n, \Theta)\, n - 1|^2 < \varepsilon^2\,,$$

$$|L(n, \Theta)\, n - 1|^2 < \varepsilon^2, \ |M(n, \Theta)|^2 < \varepsilon^2, \ |N(n, \Theta)|^2 < \varepsilon^2\,,$$

a tedy

$$\|U_1(n, \Theta) - F_{11}(n)\| < [4K + 2 + 8M]\, \varepsilon\,,$$

je-li $\Theta \geqq \varphi_0$. Případ, kdy $\Theta \to -\frac{\omega}{2}$ se dokáže stejně. Tím je důkaz bodu a) dokončen a navíc platí $\gamma = \mu$, $\delta = \nu'$.

(b) Předně z (29) dostáváme, že $r \frac{\partial u_1}{\partial r} (r, \Theta)$ je originál k $-nU_1(n, \Theta)$. Dokažme, že $-nU_1(n, \Theta) \in H_{\mu\nu'}$ pro $\Theta \in \left\langle -\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2} \right\rangle$. V dalším nevystačíme pouze s odhady typu (28). Proto odvodíme odhad silnější. Uvažme tedy např., jak se bude chovat v pásu $\mu < \operatorname{Re} n < \nu'$ zlomek

$$\frac{(n+2) \sin (n+2) \frac{\omega}{2} \cos n\Theta - n \sin n \frac{\omega}{2} \cos (n+2)\, \Theta}{(n+1) \sin \omega + \sin (n+1)\, \omega}. \tag{30}$$

Dokážeme, že tento zlomek je v tomto pásu omezený stejnoměrně a nezávisle na $\Theta \in \left\langle -\frac{\omega}{2} - \frac{\omega}{2} \right\rangle$. Uvažme např. chování zlomku (30), když $y = \operatorname{Re} n \to \infty$.

Čitatel zlomku pišme ve tvaru

$$(n + 2) \sin (n + 2) \frac{\omega}{2} \cos n\Theta - n \sin n \frac{\omega}{2} \cos (n + 2) \Theta =$$

$$= (n + 1) \left[\sin (n + 2) \frac{\omega}{2} \cos n\Theta - \sin n \frac{\omega}{2} \cos (n + 2) \Theta \right] +$$

$$+ \sin (n + 2) \frac{\omega}{2} \cos n\Theta + \sin n \frac{\omega}{2} \cos (n + 2) \Theta .$$

Vyjádříme-li goniometrické funkce pomocí exponenciel a budeme-li uvažovat pouze ty z nich, jež charakterisují růst výrazu

$$(n + 1) \left[\sin (n + 2) \frac{\omega}{2} \cos n\Theta - \sin n \frac{\omega}{2} \cos (n + 2) \Theta \right],$$

pro $y \to \infty$ dostaneme

$$\cdot \frac{e^{y\omega - ix\frac{\omega}{2} - ix\Theta}}{4} \cdot \frac{e^{-i2\Theta} - e^{i2\frac{\omega}{2}}}{\frac{\omega}{2} - \Theta} \cdot e^{-y\left(\frac{\omega}{2} - \Theta\right)} y\left(\frac{\omega}{2} - \Theta\right) . \tag{31}$$

Poslední výraz má zřejmě majorantu $Me^{y\omega}$, kde M je konstanta. Odtud a na základě odhadů typu (28) plyne již stejnoměrná omezenost zlomku (30) pro $0 \leqq \Theta \leqq \frac{\omega}{2}$ nějakou konstantou K. Vyšetřování případu $y \to -\infty$ se děje analogicky. Stejný odhad bychom dostali i pro $-\frac{\omega}{2} < \Theta \leqq 0$. Stejné odhady platí i pro druhý, třetí a čtvrtý zlomek z (26), když jej znásobíme číslem n. Protože

$$nF_{i1}(n) \in H_{\mu\nu'}, \quad G_{i1}(n + 1) \in H_{\mu\nu'}, \quad i = 1, 2 ,$$

dostáváme odtud, že $-nU_1(n, \Theta) \in H_{\mu\nu'}$ pro $\Theta \in \left\langle -\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2} \right\rangle$. Nyní bude již další postup stejný jako při důkaze bodu (a). Z (25) dostaneme tak bod (b). Rovněž i bod (c) dokážeme stejným způsobem.

Dokážeme nyní (stále pro funkci $u_1(r, \Theta)$) poslední bod 5. Podle (29) a odhadu typu (28), např. pro $\frac{\partial u_1}{\partial r}(r, \Theta)$, dostáváme

$$\frac{\partial u_1}{\partial r}(r, \Theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x - i\infty}^{x + i\infty} -nU_1(n, \Theta)\, r^{-n-1}\, \mathrm{d}n, \ \mu < x < \nu' .$$

Nyní z (26) pro $|\Theta| \leqq \varphi$ plyne:

$$\left| \frac{\partial u_1}{\partial r}(r, \Theta) \right| \leqq r^{-x-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left[Ky^2 e^{-|y|\left(\frac{\omega}{2} - \varphi\right)} + L\,|y|\, e^{-|y|\left(\frac{\omega}{2} - \varphi\right)} + Me^{-|y|\left(\frac{\omega}{2} - \varphi\right)} \right] .$$

$$\cdot\, [|F_{11}(x+iy)| + |F_{21}(x+iy)| + |G_{11}(x+1+iy)| + |G_{21}(x+1+iy)|]\, \mathrm{d}y \leqq$$

$$\leqq r^{-x-1} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left[K y^2 e^{-|y|\left(\frac{\omega}{2}-\varphi\right)} + L\,|y|\, e^{-|y|\left(\frac{\omega}{2}-\varphi\right)} + M e^{-|y|\left(\frac{\omega}{2}-\varphi\right)} \right]^2 \mathrm{d}y \right\}^{\frac{1}{2}} .$$

$$\cdot \{ [\int_{-\infty}^{\infty} |F_{11}(x+iy)|^2 \,\mathrm{d}y]^{\frac{1}{2}} + [\int_{-\infty}^{\infty} |F_{21}(x+iy)|^2 \,\mathrm{d}y]^{\frac{1}{2}} + [\int_{-\infty}^{\infty} |G_{11}(x+1+iy)|^2 \,\mathrm{d}y]^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ [\int_{-\infty}^{\infty} |G_{21}(x+1+iy)^2 \,\mathrm{d}y]^{\frac{1}{2}} \} .$$

Zde K, L, M jsou konstanty. Vzhledem k platnosti (29) je možno vzít za x číslo μ nebo ν'. Zcela stejně bychom postupovali i v ostatních případech, takže můžeme tím považovat bod 5 za dokázaný.

Celý výše naznačený postup lze nyní užít na řešení biharmonického problému příslušného funkcím $f_{i2}(r)$, $g_{i2}(r)$, $i = 1, 2$. Předpokládáme-li, že $\nu < 0$, potom v tom druhém případě dostaneme $\gamma = \mu'$, $\delta = \nu$.

Není těžké se přesvědčit, že jak $u_1(r, \Theta)$, tak $u_2(r, \Theta)$ jsou reálné funkce. To plyne snadno z 29 a z toho, že $U_i(\bar{n}, \bar{\Theta}) = \overline{U_i(n, \Theta)}$, $i = 1, 2$. Neméně snadné je přesvědčit se, že $u(r, \Theta) = u_1(r, \Theta) + u_2(r, \Theta)$ je řešením našeho problému s konstantami $\gamma = \mathrm{Max}\,(\varepsilon, \mu)$, $\delta = \mathrm{Min}\,(-\varepsilon, \nu)$, kde $\varepsilon > 0$ a libovolně malé. Vskutku bod 3 definice 5 je zřejmě splněn.

D ů k a z b o d u 4: Pro $u_1(r, \Theta)$ jsme ukázali, že

$$\lim_{\Theta \to \frac{\omega}{2}} \int_0^1 [f_{11}(r) - u_1(r, \Theta)]^2\, r^{2\gamma-1} \,\mathrm{d}r = 0 , \tag{32}$$

$$\lim_{\Theta \to \frac{\omega}{2}} \int_1^\infty [f_{11}(r) - u_1(r, \Theta)]^2\, r^{2\nu'-1} \,\mathrm{d}r = 0 ; \tag{33}$$

pro $u_2(r, \Theta)$ podobně platí

$$\lim_{\Theta \to \frac{\omega}{2}} \int_0^1 [f_{12}(r) - u_2(r, \Theta)]^2\, r^{2\mu'-1} \,\mathrm{d}r = 0 , \tag{34}$$

$$\lim_{\Theta \to \frac{\omega}{2}} \int_1^\infty [f_{12}(r) - u_2(r, \Theta)]^2\, r^{2\delta-1} \,\mathrm{d}r = 0 . \tag{35}$$

Protože $\mu' < \delta < 0$ a $\gamma > 0$, plyne z (34)

$$\lim_{\Theta \to \frac{\omega}{2}} \int_0^1 [f_{12}(r) - u_2(r, \Theta)]^2\, r^{2\gamma-1} \,\mathrm{d}r = 0 . \tag{36}$$

Podobně z (33) dostáváme

$$\lim_{\Theta \to \frac{\omega}{2}} \int_1^\infty [f_{11}(r) - u_1(r, \Theta)]^2\, r^{2\delta-1} \,\mathrm{d}r = 0 . \tag{37}$$

Z (32), (36) a z trojúhelníkové nerovnosti nyní dostáváme

$$\lim_{\Theta \to \frac{\omega}{2}} \int_0^1 [f_1(r) - u(r, \Theta)]^2 r^{2\gamma-1} \, dr = 0 \, .$$

Podobně z (35), (37) a z trojúhelníkové nerovnosti dostáváme

$$\lim_{\Theta \to \frac{\omega}{2}} \int_1^\infty [f_1(r) - u(r, \Theta)]^2 r^{2\delta-1} \, dr = 0 \, .$$

Podobně bychom ukázali, že platí ostatní body sub 4.

Bod 5 pro $u(r, \Theta)$ se dokáže úplně stejnou úvahou.

Věta 10 dává odpověď na otázku po existenci biharmonického řešení pro nekonečný klín.

Ukážeme nyní na jiné, jednoduché vyjádření řešení našeho problému pomocí Greenových funkcí. Nejdříve budeme tyto Greenovy funkce definovat:

Definice 6. *Greenovy funkce pro biharmonický problém na nekonečném klínu jsou:*

$$G_1(r, \Theta, \omega) = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{(n+2)\sin(n+2)\frac{\omega}{2}\cos n\Theta - n\sin n\frac{\omega}{2}\cos(n+2)\Theta}{(n+1)\sin\omega + \sin(n+1)\omega} r^{-n} \, dn \, , \tag{38}$$

$$G_2(r, \Theta, \omega) = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{-(n+2)\cos(n+2)\frac{\omega}{2}\sin\Theta + n\cos n\frac{\omega}{2}\sin(n+2)\Theta}{(n+1)\sin\omega - \sin(n+1)\omega} r^{-n} \, dn \, , \tag{39}$$

$$G_3(r, \Theta, \omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{\cos(n+2)\frac{\omega}{2}\cos n\Theta - \cos n\frac{\omega}{2}\cos(n+2)\Theta}{(n+1)\sin\omega + \sin(n+1)\omega} r^{-n} \, dn \, , \tag{40}$$

$$G_4(r, \Theta, \omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{\sin(n+2)\frac{\omega}{2}\sin n\Theta - \sin n\frac{\omega}{2}\sin(n+2)\Theta}{(n+1)\sin\omega - \sin(n+1)\omega} r^{-n} \, dn \, . \tag{41}$$

Greenovy funkce jsou zřejmě nezávislé na x, pokud $-\lambda_1 - 1 < x < \lambda_1 - 1$. Pomocí odhadů již vícekrát prováděných dostaneme:

Věta 11. $|G_i(r, \Theta, \omega)| \leqq M(\varphi, x)\, r^{-x}$ *pro* $r \in (0, \infty)$, $\Theta \in \langle -\varphi, \varphi \rangle$, $0 \leqq \varphi < \frac{\omega_0}{2}$ *a* $-\lambda_1(\omega_0) - 1 < x < \lambda_1(\omega_0) - 1$, *pokud* ω *je dosti blízké k* ω_0.

Dokažme nyní

větu 12. *Nechť* $u(r, \Theta)$ *je řešení biharmonického problému příslušné funkcím* $f_i(r)$, $g_i(r)$, $i = 1, 2$, *a nechť* $u(r, \Theta) = u_1(r, \Theta) + u_2(r, \Theta)$ *a* $u_i(r, \Theta)$ *jsou originály obrazů* $U_i(u, \Theta)$ *z* (26). *Potom*

$$u(r, \Theta) = \int_0^\infty G_1\left(\frac{r}{s}, \Theta, \omega\right) \frac{1}{2s} [f_1(s) + f_2(s)]\, ds +$$

$$+ \int_0^\infty G_2\left(\frac{r}{s}, \Theta, \omega\right) \frac{1}{2s} [f_1(s) - f_2(s)]\, ds + \int_0^\infty G_3\left(\frac{r}{s}, \Theta, \omega\right) \frac{1}{2} [g_1(s) + g_2(s)]\, ds +$$

$$+ \int_0^\infty G_4\left(\frac{r}{s}, \Theta, \omega\right) \frac{1}{2} [g_1(s) - g_2(s)]\, ds\,. \tag{42}$$

Důkaz. Ukážeme, že (42) platí pro $u_1(r, \Theta)$, když z $f_i(r)$, $g_i(r)$ dosadíme $f_{i1}(r)$, $g_{i1}(r)$. Podle (29) je

$$u_1(r, \Theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} U_1(n, \Theta)\, r^{-n}\, dn, \; \mu < x < \nu'.$$

(Ponecháváme označení z důkazu věty 10.) Pro $x \in (\mu, \nu')$ platí

$$\int_0^\infty |f_i(r)|\, r^{x-1}\, dr < \infty, \int_0^\infty |g_i(r)|\, r^x\, dr < \infty, \quad \text{kde} \quad i = 1, 2\,. \tag{43}$$

Pišme v (26) obrazy $F_{i1}(n)$, $G_{i1}(n + 1)$ pomocí originálů. (Pro jednoduchost to provedeme pro případ $f_{11}(r) = f_{21}(r) = f(r)$, $g_{11}(r) = g_{21}(r) = 0$.) Dostaneme

$$u_1(r, \Theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{(n+2) \sin (n+2) \frac{\omega}{2} \cos n\Theta - n \sin n \frac{\omega}{2} \cos (n+2)\, \Theta}{(n+1) \sin \omega + \sin (n+1)\, \omega}\, r^{-n} \,.$$

$$. \left[\int_0^\infty s^{n-1} f(s)\, ds\right] dn\,.$$

Vzhledem k (43) a odhadům typu (28) můžeme vyměnit integrační pořadí. Dostaneme tak

$$u_1(r, \Theta) = \int_0^\infty G_1\left(\frac{r}{s}, \Theta, \omega\right) \frac{f(s)}{s}\, ds\,.$$

Tab. 1. Hodnoty $G_1\left(r, \Theta, \frac{\pi}{2}\right)$

r	$\Theta = 0$ u	$\Theta = \frac{\pi}{20}$ u	$\Theta = \frac{\pi}{10}$ u	$\Theta = \frac{\pi}{5}$ u	$\Theta = \frac{\pi}{4}$ u
0,00	0	0	0	0	0
0,25	0,003	−0,003	−0,002	−0,001	0
0,50	0,105	0,095	0,066	0,005	0
$0,6\dot{6}$	0,386	0,373	0,321	0,051	0
0,75	0,582	0,586	0,572	0,166	0
1,00	1,067	1,139	1,396	4,036	∞
$1,3\dot{3}$	1,035	1,042	1,017	0,295	0
1,50	0,869	0,839	0,722	0,114	0
2,00	0,420	0,380	0,264	0,020	0
4,00	−0,042	−0,041	−0,036	−0,009	0

Tab. 2. Hodnoty $G_2\left(r, \Theta, \frac{\pi}{2}\right)$

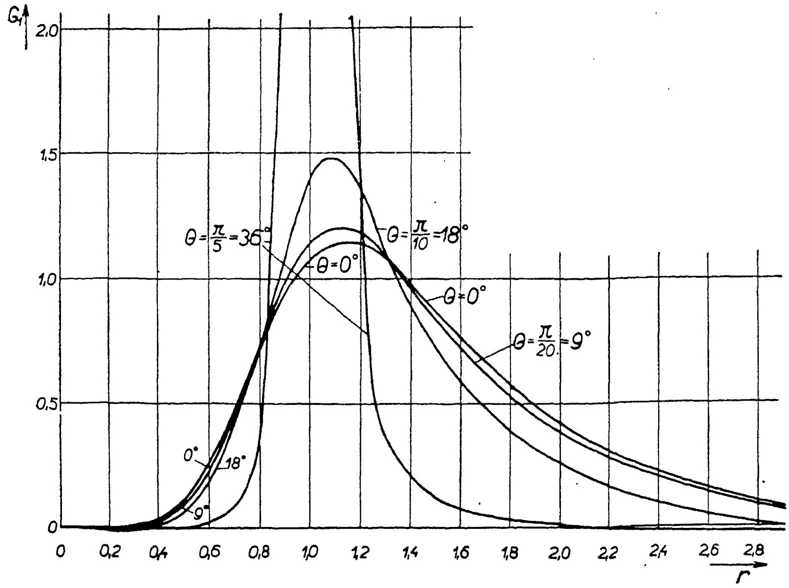
r	$\Theta = 0$ u	$\Theta = \frac{\pi}{20}$ u	$\Theta = \frac{\pi}{10}$ u	$\Theta = \frac{\pi}{5}$ u	$\Theta = \frac{\pi}{4}$ u
0,00	0	0	0	0	0
0,25	0	−0,0004	−0,001	0	0
0,50	0	0,0092	0,010	−0,002	0
$0,6\dot{6}$	0	0,0962	0,151	0,029	0
0,75	0	0,1879	0,334	0,137	0
1,00	0	0,4570	1,002	3,988	∞
$1,3\dot{3}$	0	0,3337	0,594	0,244	0
1,50	0	0,2165	0,340	0,066	0
2,00	0	0,0368	0,040	0,008	0
4,00	0	−0,0070	−0,010	−0,003	0

Tab. 3. Hodnoty $G_3\left(r, \Theta, \frac{\pi}{2}\right)$

r	$\Theta = 0$ u	$\Theta = \frac{\pi}{20}$ u	$\Theta = \frac{\pi}{10}$ u	$\Theta = \frac{\pi}{5}$ u	$\Theta = \frac{\pi}{4}$ u
0,00	0	0	0	0	0
0,25	−0,004	−0,004	−0,003	−0,0003	0
0,50	−0,064	−0,059	−0,045	−0,0075	0
$0,6\dot{6}$	−0,156	−0,148	−0,125	−0,0290	0
0,75	−0,209	−0,203	−0,181	−0,0568	0
1,00	−0,336	−0,337	−0,333	−0,3211	−0,3183
$1,3\dot{3}$	−0,372	−0,361	−0,322	−0,1010	0
1,50	−0,350	−0,333	−0,281	−0,0652	0
2,00	−0,256	−0,236	−0,180	−0,0300	0
4,00	−0,065	−0,057	−0,041	−0,0055	0

Tab. 4. Hodnoty $G_4\left(r, \Theta, \frac{\pi}{2}\right)$

r	$\Theta = 0$ u	$\Theta = \frac{\pi}{20}$ u	$\Theta = \frac{\pi}{10}$ u	$\Theta = \frac{\pi}{5}$ u	$\Theta = \frac{\pi}{4}$ u
0	0	0	0	0	0
0,25	0	−0,0001	−0,0001	0	0
0,50	0	−0,0068	−0,0098	−0,0025	0
0,6$\dot{6}$	0	−0,0292	−0,0472	−0,0180	0
0,75	0	−0,0469	−0,0809	−0,0429	0
1,00	0	−0,0931	−0,1791	−0,2998	−0,3183
1,3$\dot{3}$	0	−0,0834	−0,1438	−0,0763	0
1,50	0	−0,0657	−0,1061	−0,0406	0
2,00	0	−0,0272	−0,0392	−0,0100	0
4,00	0	−0,0010	−0,0012	−0,0001	0



Obr. 3.

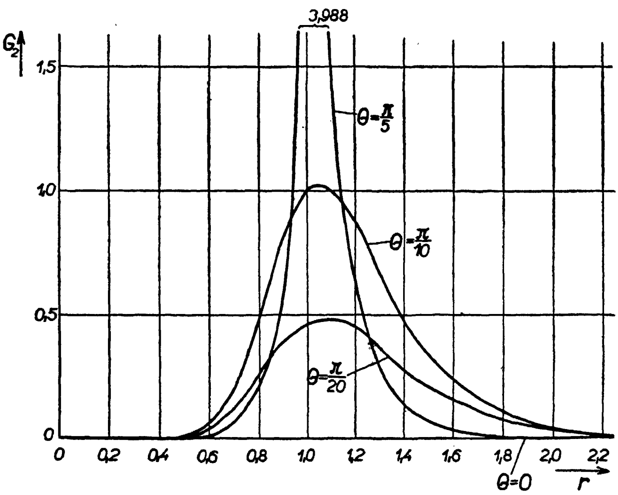
Superposicí jednotlivých případů a výsledků pro $u_1(r, \Theta)$ a $u_2(r, \Theta)$ tvrzení dokážeme.

Poznámka. Z věty 11 snadno plyne, že (42) má smysl, když pro nějaká $\mu, \nu \in (-\lambda_1(\omega) - 1, \lambda_1(\omega) - 1)$ je

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^1 |f_i(r)|\, r^{\mu-1}\, \mathrm{d}r < \infty\,, \quad \int_1^\infty |f_i(r)|\, r^{\nu-1}\, \mathrm{d}r < \infty\,, \quad i = 1, 2\,, \\ &\int_0^1 |g_i(r)|\, r^{\mu}\, \mathrm{d}r < \infty\,, \quad \int_1^\infty |g_i(r)|\, r^{\nu}\, \mathrm{d}r < \infty\,, \quad i = 1, 2\,. \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

To jsou slabší podmínky, než jaké byly kladeny na okrajové hodnoty v definici 5.

Vzorec (42) má jednak cenu praktickou — dá se pomocí něho vskutku vypočítat hledaná biharmonická funkce — jednak cenu teoretickou, jak uvidíme v dalším. Numerické hodnoty $G_i\left(r, \Theta, \frac{\pi}{2}\right)$ jsou uvedeny v tabulkách 1, 2, 3, 4 a grafy těchto funkcí na obr. 3, 4, 5, 6, 7. Vzorec (42) je vlastně konvoluce pro Mellinovu transformaci. (Podrobnější informace o funkcích $G_i\left(r, \Theta, \frac{\pi}{2}\right)$ nalezne čtenář v [8].)



Obr. 4.

Dokážeme nyní další větu základní důležitosti, a to větu o unicitě.

Věta 13. *Nechť $u(r, \Theta)$ je v B a přísluší funkcím $f_i(r) = 0$, $g_i(r) = 0$, $i = 1, 2$. Potom $u(r, \Theta) \equiv 0$.*

Dříve, než přistoupíme k důkazu této věty, dokážeme:

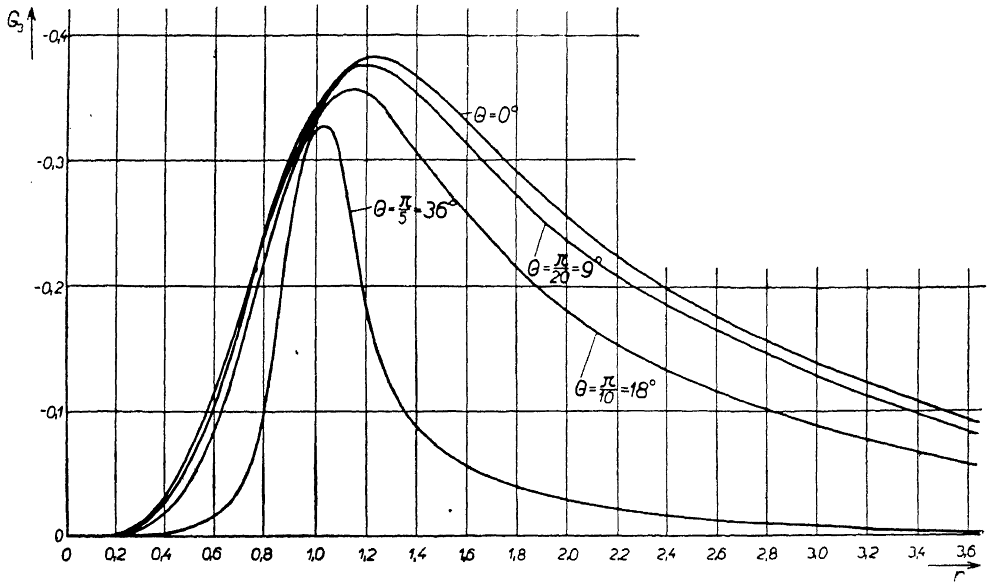
Lemma 2. *Nechť $u(r, \Theta) \in B$ a nechť jí přísluší konstanty γ* a δ. *Nechť $0 \leqq \varphi < \frac{\omega}{2}$. Potom pro $\Theta < r \leqq 1$, $|\Theta| \leqq \varphi$ platí $\left|\frac{\partial^k u}{\partial r^m \partial \Theta^n}\right| \leqq M(\varphi)\, r^{-\gamma-m}$ a pro $1 \leqq r < \infty$, $|\Theta| \leqq \varphi$, $\left|\frac{\partial^k u}{\partial r^m \partial \Theta^n}\right| \leqq M(\varphi)\, r^{-\delta-m}$, kde $k = 1, 2, 3, 4$, $m + n = k$.*

Důkaz. Kolem bodu o souřadnicích $[\Theta_0, r_0] = z_0 = [x_0, y_0]$ opišme kružnici K poloměru $R = \frac{r_0}{2} \sin\left(\frac{\omega}{2} - \varphi\right)$. Funkci $u(r, \Theta)$ vyjádřeme v Goursatově tvaru

$$u(r, \Theta) = v(x, y) = \operatorname{Re}\,(\chi(z - z_0) + \overline{(z - z_0)}\,\varphi(z - z_0))$$

pro $z \in K$. Buď $x = r\cos\Theta$, $y = r\sin\Theta$. Označme

$$g(z) = \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) + i\,\frac{\partial v}{\partial y}(x, y), \quad f(t) = g(z_0 + t)\,.$$



Obr. 5.

Potom platí

$$\varphi(z - z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{f(Rt)}{t - \dfrac{z - z_0}{R}}\,\mathrm{d}t - \frac{z - z_0}{R}\,\frac{1}{4\pi i}\int_{C_0}\frac{f(Rt)}{t^2}\,\mathrm{d}t + \alpha\,,$$

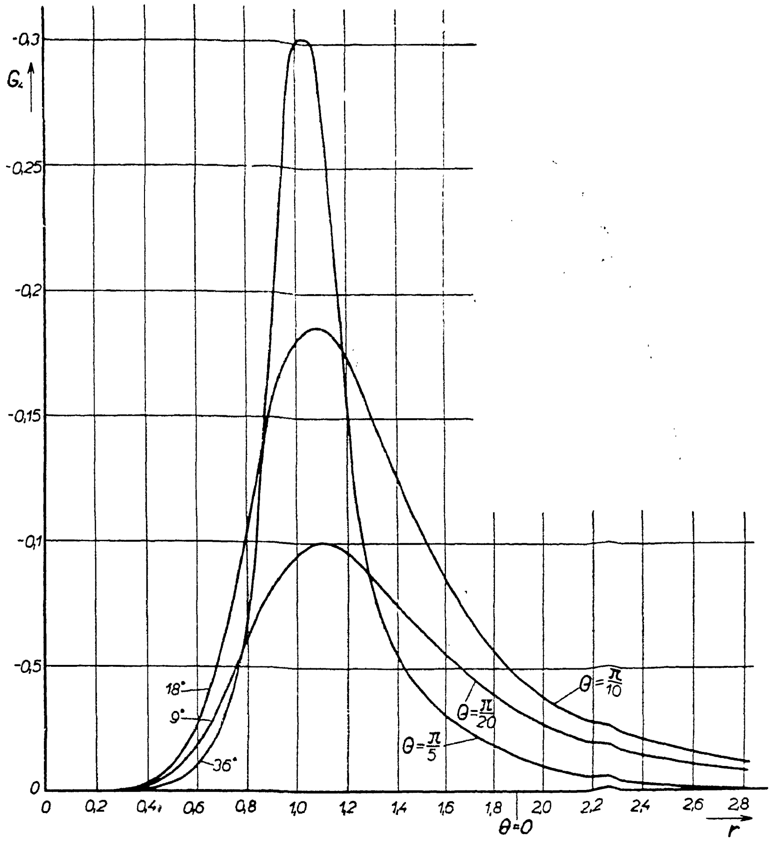
$$\psi(z - z_0) = \chi'(z - z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\overline{f(Rt)}}{t - \dfrac{z - z_0}{R}}\,\mathrm{d}t -$$

$$- \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} f(Rt)\,\frac{2t - \dfrac{z - z_0}{R}}{\left(t - \dfrac{z - z_0}{R}\right)^2 t^2}\,\mathrm{d}t + \beta\,,$$

kde C_0 je jednotková kružnice a α a β konstanty. (Důkaz nalezne čtenář v [5].) Derivace $\dfrac{\partial^k v}{\partial x^m\,\partial y^n}$, kde $k = 2, 3, 4$, $m + n = k$, se dají lehce odhadnout.

Odhadněme kupř. $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_0, y_0)$ v okolí nekonečna. Předně máme

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \operatorname{Re}\left(\psi'(0) + 2\varphi'(0)\right).$$



Obr. 6.

Jestliže použijeme (45), dostaneme

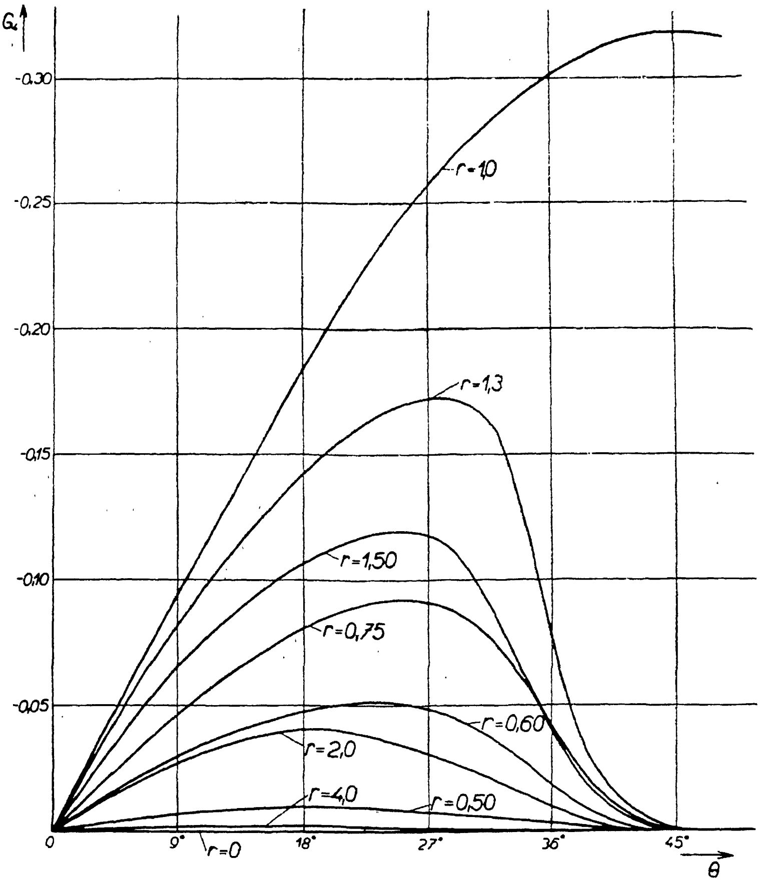
$$\left|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_0, y_0)\right| \leqq \frac{K}{P} \operatorname*{Max}_{t \in C_0} |f(Rt)|,$$

kde K je konstanta. Dále $\operatorname*{Max}_{t \in C_0} |f(\mathrm{R}t)| \leqq L(r_0 + R)^{-\delta-1}$, je-li $-\delta - 1 \geqq 0$,

$$\operatorname*{Max}_{t \in C_0} |f(Rt)| \leqq L(r_0 - R)^{-\delta-1},$$

je-li $-\delta - 1 < 0$.

Zde L je konstanta. Odtud již dostáváme, že pro $r \geqq 1$ je $\left|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_0, y_0)\right| \leqq M r_0^{-\delta-2}$, kde M je konstanta. Protože druhá derivace funkce u v polárních souřadnicích je lineární kombinací výrazů $\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial y}$ a druhých derivací v souřadnicích kartézských, při čemž součinitelé u těchto funkcí jsou $\pm \cos\Theta$, $\pm \sin\Theta$, dostáváme odtud naše tvrzení. Ostatní případy se dokáží analogicky.



Obr. 7.

Důkaz věty 13. Do klínu K, na němž je definována funkce $u(r, \Theta)$, vsuňme klín K_a, jehož symetrála leží na symetrále klínu K a jehož vrchol je vzdálen o a od vrcholu klínu K. Vrcholový úhel klínu K_a buď $0 < \omega' < \omega$. Nejbližším naším cílem bude ukázat, že v K_a se dá $u(r, \Theta)$ psát pomocí vzorce (42).

Opišme kolem vrcholu klínu K_a kružnici o dosti malém poloměru. Uvnitř této kružnice je

$$u(r, \Theta) = u(x, y) = \operatorname{Re}\,(\chi(z) + \bar{z}(\varphi(z)) \,.$$

Střed této kružnice buď počátkem systému souřadnic, osa x nechť je totožná se symetrálou klínu K. Nyní ke každému celému $m \geqq 0$ můžeme najít konstanty $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m$ a $B_1, B_2, \ldots, B_m$ tak, že

$$\chi^{(i-1)}(0) = \mu^{(i-1)}(0), \; i = 1, 2, \ldots, m \,, \quad \varphi^{(i-1)}(0) = \nu^{(i-1)}(0) \,, \; i = 1, 2, \ldots, m \,,$$

při čemž

$$\mu(z) = A_1 e^{-z} + A_2 e^{-2z} + \ldots + A_m e^{-mz} \,, \quad \nu(z) = B_1 e^{-z} + B_2 e^{-2z} + \ldots + B_m e^{-mz} \,.$$

Pro konstanty A_i resp. B_i dostaneme totiž soustavu lineárních rovnic. Pro její determinant platí

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ -1 & -2 & -3 & \ldots\ldots & -m \\ 1 & 2^2 & 3^2 & \ldots\ldots & m^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \pm 1 & \pm 2^{m-1} & \pm 3^{m-1} & \ldots\ldots & \pm m^{m-1} \end{vmatrix} \neq 0 \,,$$

neboť je to wronskián funkcí $e^{-t}, \ldots, e^{-mt}$, jež jsou fundamentálním systémem nějaké obyčejné diferenciální rovnice, a to s konstantními koeficienty. Biharmonická funkce

$$w(x, y) = \operatorname{Re} \left(\chi(z) - \mu(z) + \bar{z}(\varphi(z) - \nu(z))\right) \tag{45}$$

leží v množině A (uvažovaná na klínu K_a), pokud m je dosti velké. Jsou-li totiž $\gamma > 0$, $\delta < 0$ konstanty příslušné funkci $u(r, \Theta)$ na klínu K, potom podle lemmatu 2 je pro $w(x, y) = w(\varrho, \vartheta)$, kde $x = \varrho \cos \vartheta$, $y = \varrho \sin \vartheta$, bod 4 definice 4 splněn s konstantami γ', δ, přičemž je $\gamma' < \delta$. Přitom ovšem předpokládáme, že platí $-\lambda_1(\omega') - 1 < \delta$, což je pravdivé, pokud ω' je dosti blízké k ω. Funkce $w(\varrho, \vartheta)$ je tedy řešením našeho biharmonického problému pro klín K_a a její obraz se dá psát ve tvaru (26). Proto $w(\varrho, \vartheta)$ se dá psát pomocí (42). Funkce $\operatorname{Re} (\mu(z) + \bar{z}\nu(z))$ zřejmě leží v A a tedy i ona se dá psát pomocí vzorce (42). Z toho plyne, že

$$u(r, \Theta) = u(\varrho, \vartheta) = \int_0^\infty G_1\left(\frac{\varrho}{\sigma}, \vartheta, \omega'\right) \frac{1}{2\sigma} \left[u_a\left(\sigma, \frac{\omega'}{2}\right) + u_a\left(\sigma, -\frac{\omega'}{2}\right)\right] \mathrm{d}\sigma + \ldots \,. \tag{46}$$

Přejděme nyní v (46) k limitě, když $a \to 0$. Symbol $u_a\left(\sigma, \frac{\omega'}{2}\right)$ znamená, že bereme hodnotu funkce u na ramenu klínu K_a atd. Nyní zřejmě pro $\sigma \in (0, \infty)$ platí

$$\lim_{a \to 0} u_a \left(\sigma, \frac{\omega'}{2}\right) = u \left(\sigma, \frac{\omega'}{2}\right) \quad \text{atd.}$$

$$\lim_{a \to 0} G_i \left(\frac{\varrho_a}{\sigma}, \vartheta_a, \omega'\right) = G_i \left(\frac{r}{\sigma}, \Theta, \omega'\right), \quad i = 1, 2, 3, 4 \,.$$

Integrály (46) mají však integrabilní majorantu nezávislou na a (pokud ω' je dostatečně blízké k ω). Vskutku např. pro $0 < \sigma \leqq 1$ platí podle věty 11

$$\left|G_1\left(\frac{\varrho}{\sigma}, \vartheta, \omega'\right)\right| \leqq M\sigma^x, \quad -\lambda_1(\omega') - 1 < x < \lambda_1(\omega') - 1\,,$$

kde M je konstanta nezávislá na α. Dále podle vlastnosti 5 definice 5 je

$$\left|u_a\left(\sigma, \frac{\omega'}{2}\right)\right| = |u(\tau(\sigma), \Theta(\sigma))| \leqq N\tau^{-\gamma^*}$$

pro $0 < \tau \leqq 1$, kde $0 < \gamma^* < \lambda_1(\omega') - 1$. Protože je $\sigma < \tau$, je $\left|u_a\left(\sigma, \frac{\omega'}{2}\right)\right| \leqq N\sigma^{-\gamma^*}$.
Jestliže nyní je $\gamma^* < x < \lambda_1(\omega') - 1$, potom

$$\left|G_1\left(\frac{\varrho}{\sigma}, \vartheta, \omega'\right) u_a\left(\sigma, \frac{\omega'}{2}\right) \frac{1}{\sigma}\right| \leqq K\sigma^{x-\gamma^*-1},$$

kde je K konstanta.

Je vidět, že jenom s nepatrnými změnami postupu dostaneme integrabilní majoranty pro všechny integrandy z (46). Můžeme tedy přejít k limitě pod integračním znaménkem. Je

$$u(r, \Theta) = \int_0^\infty G_1\left(\frac{r}{s}, \Theta, \omega'\right) \frac{1}{2s}\left[u\left(s, \frac{\omega'}{2}\right) + u\left(s, \frac{\omega'}{2}\right)\right] \mathrm{d}s + \dots\,. \tag{47}$$

Nyní přejdeme v (47) k limitě, když $\omega' \to \omega$. Podle bodu 4 definice 5 je

$$\begin{aligned}|u(r, \Theta)| &\leqq \int_0^1 |G_1| \frac{1}{2s}\left[\left|u\left(s, \frac{\omega'}{2}\right)\right| + \left|u\left(s, -\frac{\omega'}{2}\right)\right|\right] \mathrm{d}s + \dots + \\ &+ \int_1^\infty |G_1| \frac{1}{2s}\left[\left|u\left(s, \frac{\omega'}{2}\right)\right| + \left|u\left(s, -\frac{\omega'}{2}\right)\right|\right] \mathrm{d}s + \dots \leqq \\ &\leqq \frac{1}{2}\left\{\left[\int_0^1 [G_1]^2\, s^{-2\gamma-1}\, \mathrm{d}s\right]^{\frac{1}{2}} . \left[\int_0^1 \left[u\left(s, \frac{\omega'}{2}\right)\right]^2 s^{2\gamma-1}\, \mathrm{d}s\right]^{\frac{1}{2}} + \dots + \right. \\ &\left. + \left[\int_1^\infty [G_1]^2\, s^{-2\delta-1}\, \mathrm{d}s\right]^{\frac{1}{2}} . \left[\int_1^\infty \left[u\left(s, -\frac{\omega'}{2}\right)\right]^2 s^{2\delta-1}\, \mathrm{d}s\right]^{\frac{1}{2}} + \dots\right\}.\end{aligned}$$

Podle věty 11 je $[G_1]^2 \leqq K(x)\, s^{2x}$. Platí, že $\int_0^1 [G_1]^2 s^{-2\gamma-1}\, \mathrm{d}s < \infty$, protože x můžeme volit větší než γ, a podobně $\int_1^\infty [G_1]^2\, s^{-2\delta-1}\, \mathrm{d}s < \infty$, protože x můžeme volit menší než δ. Podle bodu 4 definice 5 je

$$\lim_{\omega' \to \omega} \int_0^1 \left[u\left(s, \frac{\omega'}{2}\right)\right]^2 s^{2\gamma-1}\, \mathrm{d}s = 0$$

a podobně

$$\lim_{\omega' \to \omega} \int_1^\infty \left[u\left(s, \frac{\omega'}{2}\right) \right]^2 s^{2\delta - 1} \, ds = 0 \, .$$

Podobně lze vyšetřit i ostatní integrály (47). Nakonec dostaneme, že je $u(r, \Theta) = 0$, což bylo dokázat.

Poznámka. Je dlužno vyzdvihnout tu skutečnost, že Papkovičovo číslo $p_1(\omega)$ dává horní hranici růstu okrajových podmínek v počátku a v nekonečnu, pokud chceme mít zaručenu unicitu řešení. Např. tzv. Papkovičova funkce

$$r^{\pm p_1 - 1} \left[\cos\,(p_1 + 1) \frac{\omega}{2} \cos\,(p_1 - 1)\, \Theta - \cos\,(p_1 - 1) \frac{\omega}{2} \cos\,(p_1 + 1)\, \Theta \right]$$

je biharmonická funkce na nekonečném klínu o vrcholovém úhlu ω a na ramenech klínu se rovná nule spolu se svou normální derivací.

(Pokračování)