Časopis pro pěstování matematiky

Ivo Vrkoč

O integrální stabilitě

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 83 (1958), No. 3, 358–362

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108289

Pak byly vysloveny některé postačující podmínky pro stabilitu oblasti. Uvedeme zde jen tu nejjednodušší:

Věta 1. *Každá hvězdicová oblast je stabilní oblastí pro každý lineární, samoadjungovaný, positivně definitní operátor.*

V další části přednášky byly naznačeny některé vlastnosti stabilních resp. nestabilních oblastí. Např. platí tyto věty:

Věta 2. *Oblast Ω je stabilní vůči obecnému eliptickému operátoru tehdy a jen tehdy, je-li stabilní vůči polyharmonickému operátoru stejného řádu.*[2])

Věta 3. *K polyharmonickému operátoru stupně p existuje v E_n vždy nestabilní oblast, je-li n dostatečně veliké.*

V závěru přednášky byla pak ještě vyslovena některá tvrzení o stabilitě jedné oblasti vůči operátorům různého řádu a byly naznačeny některé nejdůležitější otevřené a neřešené problémy.

Ivo Babuška, Praha

JEDNOZNAČNOST NĚKTERÝCH OKRAJOVÝCH ÚLOH PRO ROVNICE PARABOLICKÉHO TYPU

(Přednáška R. VÝBORNÉHO se konala v matematické obci pražské dne 2. prosince 1957)

Přednášející po krátkém historickém úvodu referoval o svých výsledcích, které jsou otištěny v DAH CCCP *117* (1957), 4, 563—565.

Rudolf Výborný, Praha

O INTEGRÁLNÍ STABILITĚ

(Referát o přednášce Ivo VRKOČE konané ve schůzi matematické obce pražské dne 6. ledna 1958.)

Aby vynikl význam nově zavedených pojmů stability, je třeba uvésti některé již dobře známé definice stability v chronologickém pořadí a jejich základní vztahy.

Nejdříve uvedu Ljapunovovu definici stability (v literatuře se často užívá názvu stejnoměrná stabilita). Budeme přitom uvažovat systém n diferenciálních rovnic, který zapíšeme vektorově

$$x = [x_1, \dots x_n]\,, \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = X(t, x)\,, \quad X(t, 0) \equiv 0\,. \tag{1}$$

Z počátku budeme předpokládat, že pravé strany $X_i(t, x)$ jsou spojité v oblasti

$$t \geqq 0\,, \quad \|x\| \leqq a\,, \qquad a > 0\,. \tag{2}$$

²) Pojem obecného eliptického operátoru nebudeme zde přesně definovat.

Definice 1. *Řešení* $x \equiv 0$ *rovnice* (1) *je stabilní, jestliže k libovolnému číslu* $\varepsilon > 0$ *existuje číslo* $\delta > 0$ *(nezávislé na* t_0*) tak, že platí* $\|x(t)\| < \varepsilon$ *pro* $t \geqq t_0$ *pro všechna řešení* $x(t)$ *rovnice* (1), *které splňují vztah* $\|x(t_0)\| < \delta$.

Jestliže vyšetřujeme stabilitu nějakého řešení $x = f(t)$, je vidět, že jej můžeme jednoduchou transformací proměnných převésti na $x \equiv 0$.

Definice 2. *Řešení* $x \equiv 0$ *rovnice* (1) *je asymptoticky stabilní, jestliže:* 1. *je stabilní,* 2. *platí* $\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$ *pro všechna řešení* $x(t)$ *rovnice* (1), *které splňují nerovnost* $\|x(t_0)\| < b \leqq a$.

V teorii stability jsou pro určení stability a asymptotické stability velmi obecná kriteria, tzv. Ljapunovovy věty. Pro nás má význam pouze:

2. Ljapunovova věta. *Jestliže pro systém* (1) *lze nalézti funkci* $V(t, x)$, *která je definována v oblasti* $t \geqq 0$, $\|x\| \leqq b \leqq a$, *kde má spojité parciální derivace a splňuje následující podmínky:*

1. $V(t, x)$ *je positivně definitní,*
2. $V(t, x)$ *je stejnoměrně malá, tj. existuje spojitá funkce* $U(x)$ *taková, že* $U(0) = 0$ *a* $V(t, x) \leqq U(x)$,
3. $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}(t, x) = \dfrac{\partial V}{\partial t} + \sum \dfrac{\partial V}{\partial x_i} X_i(t, x)$ *je negativně definitní,*

pak $x \equiv 0$ *je asymptoticky stabilní.*

Vznikla otázka, existuje-li funkce $V(t, x)$ požadovaných vlastností, je-li $x \equiv 0$ asymptoticky stabilní, tj. zda existence funkce $V(t, x)$ s požadovanými vlastnostmi je nutnou a postačující podmínkou pro asymptotickou stabilitu řešení $x \equiv 0$. Ukázalo se, že v 2. Ljapunovově větě můžeme o $x \equiv 0$ tvrdit více, a to že $x \equiv 0$ jest silně stabilní.

Definice 3. *Řešení* $x \equiv 0$ *nazveme silně stabilní jestliže:*

1. *je stabilní,*

2. *k libovolné dvojici čísel* $\delta > 0$, $\eta > 0$ *můžeme najít číslo* $T(\delta, \eta) > 0$ *(nezávislé na* t_0*) tak, že platí* $\|x(t)\| < \eta$ *pro* $t \geqq t_0 + T(\delta, \eta)$, *jestliže řešení* $x(t)$ *splňuje vztah* $\|x(t_0)\| < \delta$.

Nyní již platí, že existence funkce $V(t, x)$, která splňuje podmínky 2. Ljapunovovy věty, je nutná a postačující podmínka, aby řešení $x \equiv 0$ bylo silně stabilní. J. Kurzweil dokonce sestrojil tuto funkci tak, že má spojité parciální derivace všech řádů.

Nevýhodou těchto pojmů stability je, že připouštíme jen takové poruchy, které vzniknou nesprávným nastavením počáteční polohy. Na každou mechanickou nebo elektrickou soustavu však působí vnější prostředí neustále rušivými silami. Proto soustava je vyjádřena diferenciální rovnicí

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = X(t, x) + R(t, x)\,, \tag{3}$$

kde o členech $R(t, x)$ víme pouze, že jsou malé. Aby se odstranil tento nedostatek, byl v literatuře zaveden pojem poruchové stability.

Definice 4. *Řešení* $x \equiv 0$ *rovnice* (1) *je poruchově stabilní, jestliže k libovolnému číslu* $\varepsilon > 0$ *existují čísla* $\eta_1 > 0$, $\eta_2 > 0$ *taková, že pro řešení* $x(t)$ *rovnice* (3) *platí* $\|x(t)\| < \varepsilon$ *pro* $t \geqq t_0$, *jestliže* $\|x(t)\| < \eta_1$ *a jestliže* $\|R(t, x\| < \eta_2$ *pro* $t \geqq t_0$, $\|x\| \leqq \varepsilon$.

Všimněme si, že velikost poruch $R(t, x)$ přitom měříme výrazem

$$\sup_{t \geqq t_0} \big(\sup_{\|x\| \leqq \varepsilon} \|R(t, x)\| \big)\,.$$

Toto pojetí má dvě nevýhody:

1. $\|R(t, x)\|$ musí být stále malé — nepřipouští se možnost lehkého nárazu, při kterém $\|R(t, x)\|$ může býti velké na malém intervalu.

2. Je známa postačující podmínka pro to, aby řešení $x \equiv 0$ bylo poruchově stabilní, ale není známa nutná a postačující podmínka.

Oba tyto nedostatky odstraníme, jestliže velikost poruch $R(t, x)$ budeme měřit pomocí výrazu $\int_{t_0}^{\infty} \sup_{\|x\| \leqq \varepsilon} \|R(t, x)\| \, \mathrm{d}t$; tím obdržíme nově zavedené pojmy integrální a asymptotické integrální stability.

Definice 5. *Řešení $x \equiv 0$ rovnice (1) nazveme integrálně stabilní, jestliže k libovolnému číslu $\varepsilon > 0$ můžeme najít číslo $\delta > 0$ (nezávisle na t_0) tak, že pro řešení $x(t)$ rovnice (3) platí $\|x(t)\| < \varepsilon$ pro $t \geqq t_0$, jestliže*

$$\|x(t_0)\| < \delta, \quad \int_{t_0}^{\infty} \sup_{\|x\| \leqq \varepsilon} \|R(t, x)\| \, \mathrm{d}t < \delta .$$

Definice 6. *Řešení $x \equiv 0$ rovnice (1) nazveme asymptoticky integrálně stabilní, jestliže*

1. *je integrálně stabilní,*

2. *k libovolné dvojici čísel $\delta > 0$, $\eta > 0$ lze nalézti dvojici čísel $T(\delta, \eta) > 0$, $\gamma(\delta, \eta) > 0$, (které nezávisí na t_0) tak, že pro řešení $x(t)$ rovnice (3) platí $\|x(t)\| < \eta$ pro $t \geqq t_0 + T(\delta, \eta)$, jestliže $\|x(t_0)\| < \delta$, $\int_{t_0}^{\infty} \sup_{\|x\| \leqq \varepsilon} \|R(t, x)\| \, \mathrm{d}t < \gamma(\delta, \eta)$.*

Integrální stabilitu můžeme charakterisovat následující větou:

Věta 1. *Jestliže pro rovnici (1) můžeme nalézt spojitou funkci $V(t, x)$ definovanou v oblasti $t \geqq 0$, $\|x\| \leqq b$ $(0 < b < a)$, která splňuje podmínky:*

1. *$V(t, x)$ je positivně definitní,*
2. *$|V(t, x) - V(t, y)| \leqq K \|x - y\|$ (K nezávisí na t),*
3. *$D^+V(t, x(t)) \leqq 0$,*

pak $x \equiv 0$ je integrálně stabilní. Naopak jestliže řešení $x \equiv 0$ je integrálně stabilní, potom existuje funkce $V(t, x)$, která má spojité parciální derivace všech řádů a splňuje podmínky 1, 2, 3.

Podmínku 3 nyní můžeme napsat ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum \frac{\partial v}{\partial x_i} X_i \leqq 0 .$$

Pro asymptotickou integrální stabilitu platí obdobná věta.

Věta 2. *Jestliže pro rovnici (1) můžeme nalézt spojitou funkci $V(t, x)$ definovanou v oblasti $t \geqq 0$, $\|x\| \leqq b \leqq a$, která splňuje podmínku 1 a 2 z věty 1 a podmínku*

3'. $D^+V(t, x(t)) \leqq - U(x(t))$ kde $U(x)$ je spojitá funkce, $U(x) > 0$ pro $x \neq 0$, pak $x \equiv 0$ je asymptoticky integrálně stabilní.

Naopak, jestliže $x \equiv 0$ je asymptoticky integrálně stabilní, potom existuje funkce $V(t, x)$, která má spojité parciální derivace všech řádů a splňuje podmínky 1, 2, a 3'.

Podmínku 3' můžeme nyní vyjádřit tak, že

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i$$

je negativně definitní.

Jestliže o pravých stranách $X_i(t, x)$ systému diferenciálních rovnic (1) (který je vyjádřen vektorově) nebudeme předpokládat, že to jsou spojité funkce, ale pouze, že $X_i(t, x)$ splňují Carathéodoryho podmínky, nelze sestrojit funkci $V(t, x)$, která by splňovala podmínky 1, 2, a 3 z věty 1 a přitom měla spojité parciální derivace všech řádů v případě, že $x \equiv 0$ je integrálně stabilní. V tomto případě platí věty:

Věta 3. *Řešení $x \equiv 0$ rovnice (1), která nyní splňuje Carathéodovyho podmínky, je integrálně stabilní tehdy a jen tehdy, existuje-li spojitá funkce $V(t, x)$ definovaná v oblasti $t \geqq 0$, $\|x\| \leqq b \leqq a$, kde splňuje podmínky 1, 2, 3 z věty 1.*

Věta 4. *Řešení $x \equiv 0$ rovnice (1), která nyní splňuje Carathéodoryho podmínky, je asymptoticky integrálně stabilní tehdy a jen tehdy, jestliže existuje spojitá funkce $V(t, x)$ definovaná v oblasti $t \geqq 0$, $\|x\| \leqq b \leqq a$, kde splňuje podmínky 1, 2, 3′ z věty 2.*

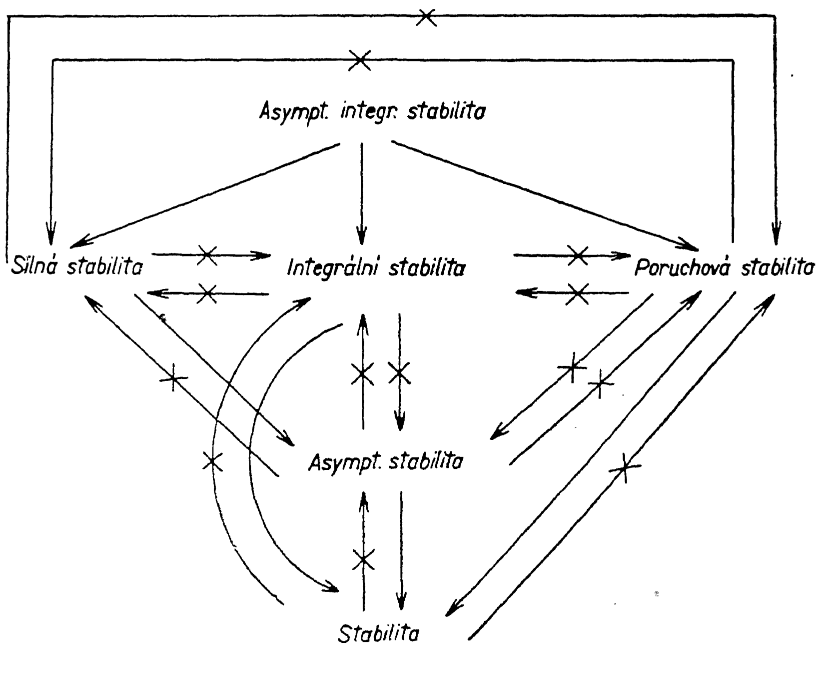
Velmi důležité je vyšetřování stability v autonomním případě. Při něm pravé strany diferenciálních rovnic nezávisí explicitně na čase t:

$$\frac{dx}{dt} = X(x), \quad X(0) = 0 . \tag{4}$$

V tomto případě se snažíme charakterisovat stabilitu řešení $x \equiv 0$ funkcemi $V(x)$, které také nezávisí na t. Tento problém nelze redukovat na předchozí, kdy funkce X_i závisely na t, ale také V mohlo záviset na t.

Pro integrální a asymptotickou integrální stabilitu platí zde věty úplně obdobné větám 3 a 4, jedině s výjimkou, že funkce V nezávisí na t.

Závěrem jsem provedl srovnání mezi jednotlivými druhy stability zde uvedenými: (Šipka znamená implikaci, škrtnutá šipka znamená, že implikace ve směru šipky neplatí)



V autonomním případě se vztahy mezi jednotlivými druhy stability změní. Je:

$$
\begin{array}{rcl}
\text{Asymptotická st.} \rightleftarrows \text{Silná st.} \rightleftarrows & \text{Asympt. integrální stabilita} & \\
& \not\uparrow \downarrow & \\
& \text{Poruchová stabilita} & \\
& \not\uparrow \downarrow & \\
& \text{Integrální stabilita} & \\
& \not\uparrow \downarrow & \\
& \text{Stabilita} &
\end{array}
$$

Ivo Vrkoč, Praha

O DIRACOVĚ FUNKCI V NELINEÁRNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNICÍCH

(Referát o přednášce dr. JAROSLAVA KURZWEILA konané ve schůzi matematické obce pražské dne 13. ledna 1958.)

Naším cílem je popsat průběh řešení diferenciální rovnice

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) + g(x) \cdot \varphi_k(t) , \tag{1}$$

jestliže posloupnost $\varphi_k(t)$ se blíží k Diracově funkci. Předpokládáme, že x je vektor z n-dimensionálního Euklidova prostoru E_n, že funkce $f(x, t)$ a $g(x)$ jsou spojité pro $x \in \bar{D}$, $t \in \langle -T_1, T_1 \rangle$, kde $\bar{D}$ je uzávěr omezené otevřené množiny $D \subset E_n$, a nabývají hodnot z E_n; nechť reálné funkce $\varphi_k(t)$ jsou spojité pro $t \in \langle - T_1, T_1 \rangle$.

Říkáme, že posloupnost $\varphi_k(t)$ konverguje k Diracově funkci, jestliže

$$\limsup_{k\to\infty} \int_{-T_1}^{T_1} |\varphi_k(t)| \, dt = L < \infty ,$$

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{-T_1}^{-\xi} |\varphi_k(t)| \, dt + \int_{\xi}^{T_1} |\varphi_k(t)| \, dt = 0$$

pro každé $\xi > 0$ a $\lim\limits_{k\to\infty} \int_{-T_1}^{t} \varphi_k(\tau) \, d\tau = 0$ resp. 1 pro $- T_1 \leqq t < 0$ resp. $0 < t \leqq T_1$. Posloupnost $\varphi_k(t)$ konverguje k Diracově funkci positivně, konverguje-li k Diracově funkci a je-li $\varphi_k(t) \geqq 0$ pro $t \in \langle -T_0, T_0 \rangle$, $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Věta 1. *Nechť posloupnost $\varphi_k(t)$ konverguje k Diracově funkci a nechť funkce $g(x)$ splňuje podmínku*

$$\|g(x_1) - g(x_2)\| \leqq \chi_1(\|x_1 - x_2\|), \; x_1, x_2 \in D ,$$

kde $\chi(\eta)$ je spojitá rostoucí pro $\eta \geqq 0$, $x(0) = 0$, $\int_0^1 \frac{d\eta}{\chi(\eta)} = \infty$. Nechť $y_k \to y \in D$, $0 < T_0 < T_1$. Předpokládejme, že řešení $u(t)$, $t \in \langle - T_0, 0 \rangle$, rovnice

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \tag{2}$$