Vlastimil Dlab
Systémy generátorů Abelových grup

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 83 (1958), No. 3, 363–365

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108286

je jednoznačně určeno počáteční podmínkou $u(-T_0) = y$, *že řešení* $v(t)$ *rovnice*

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = g(x)\,, \tag{3}$$

$v\left(-\frac{1}{2}\right) = u(0)$, *je definováno na intervalu* $\left\langle -\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right\rangle$ *(toto řešení je jednoznačně určeno podle Osgoodovy věty) a že řešení* $w(t)$, $t \in \langle 0, T_0\rangle$, *rovnice* (2) *je jednoznačně určeno počáteční podmínkou* $w(0) = v(\frac{1}{2})$.

Potom pro dosti velká k *existuje řešení* $x_k(t)$, $t \in \langle -T_0, T_0\rangle$, *rovnice* (1), $x_k(-T_0) = y_k$ *a platí* $x_k(t) \to u(t)$ *resp.* $w(t)$ *pro* $k \to \infty$, $t \in \langle -T_0, 0)$ *resp.* $(0, T_0\rangle$. *Posloupnost* $x_k(t)$ *konverguje stejnoměrně na každém uzavřeném intervalu, který neobsahuje bod* 0.

Věta 2. *Nechť posloupnost* $\varphi_k(t)$ *konverguje k Diracově funkci positivně. Nechť* $y_k \to y \in D$, $0 < T_0 < T_1$. *Předpokládejme, že řešení* $u(t)$, $t \in \langle -T_0, 0\rangle$, *rovnice* (2) *je jednoznačně určeno počáteční podmínkou* $u(-T_0) = y$, *že řešení* $v(t)$, $t \in \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$, *rovnice* (3) *je jednoznačně určeno počáteční podmínkou* $v(-\frac{1}{2}) = u(0)$ *a že řešení* $w(t)$, $t \in \langle 0, T_0\rangle$, *rovnice* (2) *je jednoznačně určeno počáteční podmínkou* $w(0) = u(\frac{1}{2})$.

Potom pro dosti velká k *existuje řešení* $x_k(t)$, $t \in \langle -T_0, T_0\rangle$, *rovnice* (1), $x_k(-T_0) = y_k$ *a platí:* $x_k(t) \to u(t)$ *resp.* $w(t)$ *pro* $k \to \infty$, $t \in \langle -T_0, 0)$ *resp.* $t \in (0, T_0\rangle$. *Posloupnost* $x_k(t)$ *konverguje stejnoměrně na každém uzavřeném intervalu, který neobsahuje bod* 0.

Jaroslav Kurzweil, Praha

SYSTÉMY GENERÁTORŮ ABELOVÝCH GRUP

(Referát o přednášce VLASTIMILA DLABA přednesené v Matematické obci pražské dne 17. února 1958.)

V úvodu připomněl přednášející některé definice a základní výsledky teorie grup;[1]) používal při tom terminologie, kterou navrhuje akademik V. KOŘÍNEK: Grupu, jejíž každý nenulový prvek má konečný (resp. nekonečný) řád, nazveme *periodickou* (resp. *aperiodickou*). Podgrupu všech prvků konečného řádu dané grupy nazveme *periodickou částí* této grupy. Řekneme, že grupa G je *divisibilní*, jestliže každá rovnice $n \,.\, x = g$, kde n je celé nenulové číslo, $g \in G$, má v G aspoň jedno řešení; G je tedy divisibilní právě tehdy, když pro každé nenulové celé n platí $nG = G$.

Budiž $\mathfrak{M}$ neprázdná množina prvků grupy G; symbolem $\{\mathfrak{M}\}$ označme nejmenší podgrupu grupy G, obsahující všechny prvky množiny $\mathfrak{M}$. Řekneme, že $\mathfrak{G}$ je *systém generátorů* grupy G jestliže $\{\mathfrak{G}\} = G$, tj. jestliže každý prvek grupy G je možno vyjádřit jako lineární kombinaci prvků z $\mathfrak{G}$.

Vlastním obsahem přednášky bylo pak vyšetřování systémů generátorů. Přednášející ukázal nejprve na příkladech těžkosti, s nimiž se při tomto vyšetřování setkáváme. Tyto těžkosti jsou typické pro grupy, jež nemají konečný systém generátorů. Zdůrazňují to i výsledky H. PRÜFERA, *Untersuchungen über die Zerlegbarkeit der abzählbaren primären Abelschen Gruppen*, Math. Zeit., *17* (1923), 35—61, kterých dosahuje pomocí pojmu „hodnosti" grupy, založeném na pojmu systému generátorů.

Literatura, týkající se studia systémů generátorů Abelových grup, je velmi chudá; jsou to jen dvě práce polských matematiků: J. ŁOŚ, E. SĄSIADA and Z. SŁOMIŃSKI,

[1]) Grupou rozumí se vždy aditivně psaná Abelova grupa.

On groups with hereditarily generating systems, Publ. Math. Debrecen, *4* (1956), 351—356 a J. Łoś, *On the torsion-free abelian groups with hereditarily generating sequences*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III., *4* (1956), 169—171. Autoři zde studují grupy, jež mají tzv. dědičné posloupnosti generátorů. Přednášející podrobně rozebral a kriticky zhodnotil výsledky obou prací (které jsou pouze částečné a dosti složité). Hlavním nedostatkem je to, že autoři nechápou systém generátorů jako množinu (tentýž prvek se může i nekonečněkráte opakovat).

Přednášející pak přistoupil k vlastním výsledkům; zavedl nejprve následující definice:

Definice 1. Soustavu generátorů $\mathfrak{G}$ grupy G nazveme *ireducibilní*, jestliže pro každý prvek $g \in G$ platí $\{\mathfrak{G} \setminus (g)\} \neq G$;[2]) v opačném případě mluvíme o *reducibilní* soustavě generátorů. Soustavu generátorů $\mathfrak{G}$ nazveme *silně reducibilní*, jestliže pro každý prvek $g \in \mathfrak{G}$ je $\{\mathfrak{G} \setminus (g)\} = G$. Jestliže $\mathfrak{G}$ je reducibilní systém generátorů grupy G s vlastností, že každá jeho podmnožina, která je systémem generátorů grupy G, je též reducibilní, řekneme, že $\mathfrak{G}$ je *dědičně reducibilní*. Ve stejném smyslu mluvíme o *dědičně silně reducibilním* systému generátorů.

Definice 2. Řekneme, že grupa G je *dostižitelná,* jestliže existuje vlastní podgrupa $H \subset G$ a prvek $g \in G$ tak, že $\{H, g\} = G$.

Potom platí:

Věta 1. *Budiž G divisibilní. Potom G není dostižitelná.*

Věta 2. *Nechť $G \neq 0$ není dostižitelná. Potom každý systém generátorů grupy G je silně reducibilní.*

Věta 3. *Nechť každý systém generátorů grupy G je silně reducibilní. Potom G je divisibilní.*

Odtud tedy mimo jiné dostáváme další dvě charakterisace divisibilních grup:

1. *$G \neq 0$ je divisibilní $\Leftrightarrow$[3]) každý systém generátorů grupy G je silně reducibilní $\Leftrightarrow$ každý systém generátorů grupy G je dědičně silně reducibilní.*

2. *G je divisibilní $\Leftrightarrow$ G není dostižitelná.*

Na příkladě grupy $G_1 = G(p^\infty) + G(p)$ bylo ukázáno,[4]) že k tomu, aby G byla divisibilní, nestačí, aby každý systém generátorů byl dědičně reducibilní. Podle definice 1 je logicky možných šest typů systémů generátorů:

(I) reducibilní systém generátorů, který není silně reducibilní ani dědičně reducibilní;

(II) silně reducibilní systém generátorů, který není dědičně reducibilní (a tedy ani dědičně silně reducibilní);

(III) dědičně reducibilní systém generátorů, který není silně reducibilní;

(IV) dědičně reducibilní systém generátorů, který je zároveň silně reducibilní a není dědičně silně reducibilní;

(V) dědičně silně reducibilní systém generátorů;

(VI) ireducibilní systém generátorů.

Příklad grupy $G_2 = \sum_{i=1}^{\infty} G_i(p) + \sum_{i=1}^{\infty} G_i(p)$ ukazuje, že grupa může mít všechny zavedené typy generátorů.

---

[2]) Symbol $\mathfrak{M} \setminus \mathfrak{N}$ značí rozdíl množin $\mathfrak{M}$ a $\mathfrak{N}$.

[3]) $\Leftrightarrow$ značí logickou ekvivalenci.

[4]) $G(p^\infty)$ značí Prüferovu grupu typu p^∞, $G(p)$ cyklickou grupu řádu p (p je prvočíslo).

Přednášející postavil pak obrácenou otázku:

Budiž dána grupa G; jaké kombinace zavedených typů systémů generátorů mohou v grupě G nastat?

Odpověď na tuto otázku usnadňují následující věty, jejichž důkazy jsou na rozdíl od důkazů vět 1, 2 a 3 složitější (s výjimkou věty 5).

Věta 4. *Dostižitelná grupa, která má systém generátorů typu* (V), *má též systém generátorů typu* (III).

Věta 5. *Grupa, mající systém generátorů typu* (IV), *má též systém generátorů typu* (III).

Věta 6. *Má-li grupa systém generátorů typu* (III), *má též systém generátorů typu* (IV).

Důkaz věty 6 se opírá o dvě důležitá lemmata:

Lemma 1. *Budiž $\mathfrak{G}$ dědičně reducibilní systém grupy G, $\mathfrak{G}_0 \subseteq G \setminus \mathfrak{G}$ konečná podmnožina. Potom též $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_0)$ je dědičně reducibilní systém generátorů grupy G.*

Lemma 2. *Budiž $\mathfrak{G}$ ireducibilní systém generátorů grupy G; budiž dále $\mathfrak{G}_0 \subseteq G \setminus \mathfrak{G}$ konečná podmnožina taková, že platí: Existuje $\bar{g} \in \mathfrak{G}$ tak, že*

$$\bar{g} \in \{\mathfrak{G} \setminus (\bar{g}), \mathfrak{G}_0\} \quad a \quad \bar{g} \operatorname{non} \in \{\mathfrak{G} \setminus (\bar{g}), \mathfrak{G}_0'\}, \; kde \; \mathfrak{G}_0' \subsetneqq \mathfrak{G}_0 .$$

Potom existuje ireducibilní systém generátorů $\overline{\mathfrak{G}}$ grupy G s vlastnostmi

$$\overline{\mathfrak{G}} \subset (\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_0), \quad \overline{\mathfrak{G}} \supseteq \mathfrak{G}_0, \quad \bar{g} \operatorname{non} \in \overline{\mathfrak{G}} .$$

Z těchto výsledků pak snadno usoudíme na tyto možnosti kombinací: Grupa G má systémy generátorů

1. pouze typu (VI) ($\Leftrightarrow G = 0$);
2. typů (VI) a (I) ($\Leftrightarrow G = G(2)$);
3. typů (VI), (I) a (II) (např. každá nenulová grupa $G \neq G(2)$ s konečným počtem generátorů);
4. typů (VI), (I), (II), (III) a (IV) (např. grupa $G_3 = G(p^\infty) + \sum_{i=1}^{\infty} G_i(p)$);
5. typů (VI), (I), (II), (III), (IV) a (V) (např. grupa G_2);
6. typů (III), (IV) a (V) (např. grupa G_1);
7. pouze typu (V) ($\Leftrightarrow G \neq 0$ divisibilní).

Jedinou další možnou kombinací by mohla být:

8. Grupa G má systémy generátorů typu (III) a (IV).

Odpověď na otázku, zda tato možnost může nastat (tj. zda taková grupa G existuje) nebo ekvivalentně: zda existuje grupa, jež nemá systém generátorů typu (V) ani typu (VI), zůstává zatím otevřeným problémem.

První část práce je otištěna v časopise Чех. мат. журнал, *8* (1958), 54—61.

Vlastimil Dlab, Praha

TRANSFORMACE VÍCEROZMĚRNÝCH INTEGRÁLŮ

(Vlastní referát Josefa Krále o přednášce proslovené na schůzi matematické obce pražské dne 24. února 1958.)

Buď G otevřená množina v E_m a nechť Φ je „hladké" zobrazení množiny G do E_m. Označme symbolem $D_\Phi(t)$ jakobián transformace Φ v bodě t a předpokládejme, že