Zbyněk Nádeník

Eine geometrische Anwendung eines Seitenstückes zur Ungleichung von Wirtinger

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 106 (1981), No. 1, 42--47

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108280

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 106 (1981), Praha

EINE GEOMETRISCHE ANWENDUNG EINES SEITENSTÜCKES ZUR UNGLEICHUNG VON WIRTINGER

Zbyněk Nádeník, Praha

(Eingegangen am 5. Mai 1978)

Als Verallgemeinerung einer Ungleichung von T. Bonnesen beweisen wir unter Zuhilfenahme eines Seitenstückes zur Ungleichung von Wirtinger diesen Satz:

I. *Es seien K und K^* zwei konvexe Rotationskörper* (im dreidimensionalen euklidischen Raum) *mit parallelen Rotationsachsen, mit den Äquatorradien a und a^*, mit den Integralen mittlerer Krümmung M und M^*, mit den Oberflächen O und O^* und mit der gemischten Oberfläche $\mathcal{O}$. Für diese Körper gilt die Ungleichung*

$$(1) \qquad -\frac{O}{M^2} + \frac{2\mathcal{O}}{MM^*} - \frac{O^*}{M^{*2}} \geqq 4\pi\left(\frac{a}{M} - \frac{a^*}{M^*}\right)^2 .$$

Um *die Gleichheitsbedingung* zu formulieren, denken wir uns eine Kugel Q und eine zu den Rotationsachsen parallele Strecke S, deren Länge das Zweifache des Radius von Q ist. Es sei $\mathcal{K}$ ein konvexer Körper, welcher aus einem Körper des Paares K, K^* durch die Minkowskische Addition*) [bzw. Minkowskische Subtraktion*)] von Q und durch die Minkowskische Subtraktion [bzw. Minkowskische Addition] von S hervorgeht. Das Gleichheitszeichen in (1) tritt dann und nur dann ein, wenn $\mathcal{K}$ und der restliche Körper des Paares K, K^* oder die Körper K, K^* selbst homothetisch*) sind.

Ist der Körper K^* die Einheitskugel, so ergibt sich aus diesem Satz die erwähnte Ungleichung von T. Bonnesen $-O + 2aM - 4\pi a^2 \geqq 0$, in der das Gleichheitszeichen die Kugel oder den Kugelzylinder kennzeichnet. (Vgl. dazu [11].)

Der im Abschn. 3 gegebene Beweis des Satzes I beruht auf einer im Abschn. 2 angeführten Verschärfung eines Spezialfalles dieses im Abschn. 1 bewiesenen Analogons zur Ungleichung von W. Wirtinger:

II. *Die auf $\langle -1, 1\rangle$ definierte Funktion $f(x)$ möge diese Eigenschaften haben:*

*) Im Sinne von [8], S. 13, 142 und 12.

1) *Sie ist absolut stetig auf* $\langle -1, 1\rangle$; 2) *ihre Ableitung* $f'(x)$ *ist im Lebesgueschen Sinne auf* $\langle -1, 1\rangle$ *quadratintegrierbar*; 3) *in einer Umgebung jeder der Wurzeln*

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n \tag{2}$$

des Polynoms von Legendre n-ten Grades $P_n(x)$ *ist die Funktion* $f(x)/P_n(x)$ *beschränkt.*

Dann besteht die Ungleichung

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2) f'^2(x)\,\mathrm{d}x - n(n + 1) \int_{-1}^{1} f^2(x)\,\mathrm{d}x \geqq 0 \tag{3}$$

mit der Gleichheit nur im Falle, dass

$$\begin{aligned} f(x) &= c_0 P_n(x) \quad \textit{für} \quad x \in \langle -1, x_1\rangle\,, && c_0 = \textit{konst.}\,; \\ f(x) &= c_k P_n(x) \quad \textit{für} \quad x \in \langle x_k, x_{k+1}\rangle\,, && c_k = \textit{konst.} \quad (k = 1, 2, \ldots, n - 1); \\ f(x) &= c_n P_n(x) \quad \textit{für} \quad x \in \langle x_n, 1\rangle\,, && c_n = \textit{konst.} \end{aligned} \tag{4}$$

Die letzten Abschn. 4 und 5 enthalten die Verallgemeinerungen des Satzes I.

Für die Seitenstücke zur Ungleichung von W. Wirtinger siehe [1], [9] und [10]. Einfach und unter recht allgemeinen Voraussetzungen ist diese Ungleichung in [3] beweisen.

Es folgen die Beweise.

1. Wir beginnen mit dem Beweis des Hilfssatzes II.

In jedem in $\langle -1, 1\rangle$ liegenden Intervall, welches keine der Wurzeln (2) von $P_n(x)$ enthält, ist für fast alle x

$$(1 - x^2) f'^2 - n(n + 1) f^2 = (1 - x^2)\left(P_n' \frac{f}{P_n} - f'\right)^2 + \left[(1 - x^2) P_n' \frac{f}{P_n} f\right]'.$$

Die Integration führt zu (3).

Dabei erhalten wir auch die Gleichheitsbedingung, nämlich $(P_n'/P_n) f - f' = 0$ fast überall auf $\langle -1, 1\rangle$. Daraus ergibt sich (4).

2. Für $n = 1$ kann man aus dem Hilfssatz II diese Verschärfung herleiten:

Es sei $f(x)$ eine auf $\langle -1, 1\rangle$ definierte Funktion mit diesen Eigenschaften: 1) Sie ist absolut stetig auf $\langle -1, 1\rangle$; 2) ihre Ableitung $f'(x) \in L^2\langle -1, 1\rangle$; 3) die Funktion $[f(x) - f(0)] : x$ ist in einer Umgebung des Punktes $x = 0$ beschränkt; 4) das Mittelwert von $f(x)$ auf $\langle -1, 1\rangle$ verschwindet.

Dann ist

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2) f'^2(x)\,\mathrm{d}x - 2 \int_{-1}^{1} f^2(x)\,\mathrm{d}x \geqq 4 f^2(0) \tag{2,1}$$

und das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn

$$f(x) = cx + C(1 - 2|x|)\,; \quad c, C = \text{konst.} \tag{2,2}$$

Um dieses zu beweisen, setzen wir für die Funktion $f(x)$ aus dem Hilfssatz II

$$\varphi(x) = f(x) - f(0)\,. \tag{2,3}$$

Nach der Voraussetzung 3) ist der Quotient der Funktion (2,3) und des Legendreschen Polynoms $P_1(x)$ in der Umgebung des Punktes $x = 0$ beschränkt. Man kann folglich auf die Funktion (2,3) den Hilfssatz II für $n = 1$ anwenden. Somit bekommen wir

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, \varphi'^2(x)\, \mathrm{d}x - 2 \int_{-1}^{1} \varphi^2(x)\, \mathrm{d}x \geqq 0 \tag{2,4}$$

mit der Gleichheit dann und nur dann, wenn

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= c_0 x \quad \text{für} \quad x \in \langle -1, 0 \rangle\,, \\ \varphi(x) &= c_1 x \quad \text{für} \quad x \in \langle 0, 1 \rangle\,. \end{aligned} \tag{2,5}$$

Aus (2,4) ergibt sich hinsichltich der Voraussetzung 4) sofort die Ungleichung (2,1). Statt (2,5) kann man schreiben

$$f(x) = \tfrac{1}{2}(c_0 + c_1)\, x + \tfrac{1}{2}(-c_0 + c_1)\, |x| + f(0)\,; \tag{2,6}$$

infolge der Annahme 4) ist hier $\frac{1}{2}(-c_0 + c_1) + 2f(0) = 0$ und (2,6) liefert unmittelbar (2,2).

3. Jetzt wenden wir uns zum Beweis des geometrischen Satzes I.

Wir können voraussetzen, dass die Rotationsachsen der Körper K und K^* zusammenfallen. Auf der Achse wählen wir den Nullpunkt P und bezeichnen mit $h(\varphi)$, $h^*(\varphi)$, $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$ die Stützfunktionen in bezug auf P der Meridiane der Körper K, K^* in einer Meridianhalbebene. Für das Integral der mittleren Krümmung M und für die Oberfläche O des Körpers K gelten die bekannten Formeln

$$M = 2\pi \int_0^\pi h(\varphi) \sin \varphi\, \mathrm{d}\varphi\,, \quad O = \pi \int_0^\pi [2h^2(\varphi) - h^{\cdot 2}(\varphi)] \sin \varphi\, \mathrm{d}\varphi\,,$$

wo $(\ )^{\cdot} = \mathrm{d}(\ )/\mathrm{d}\varphi$. Mit

$$x = -\cos \varphi \tag{3,1}$$

bekommen wir

$$M = 2\pi \int_{-1}^{1} h\, \mathrm{d}x\,, \quad O = \pi \int_{-1}^{1} [2h^2 - (1 - x^2)\, h'^2]\, \mathrm{d}x\,. \tag{3,2}$$

Dieselben Formeln – mit h^* statt h – gelten für M^* und O^*. Die gemischte Oberfläche ist

$$\mathcal{O} = \pi \int_{-1}^{1} [2hh^* - (1 - x^2)\, h' h^{*\prime}]\, \mathrm{d}x\,. \tag{3,3}$$

Die Funktion

$$f(x) = h(x)/M - h^*(x)/M^* \tag{3,4}$$

erfüllt die Voraussetzungen 1), 2) und 4) des Hilfssatzes aus dem Abschn. 2. Sie hat aber auch die Eigenschaft 3), wie aus dem Analogon zum Mittelwertsatz von W. Blaschke (siehe auch [12], S. 222) mit der symmetrischen Ableitung der Stützfunktion folgt.

Aus der Ungleichung (2,1) mit der Funktion $f(x)$ aus (3,4) ergibt sich nach (3,2) und (3,3) sofort die Beziehung (1), wenn wir noch beachten, dass $h|_{x=0} = h|_{\varphi=\pi/2} = a$, $h^*|_{x=0} = a^*$.

Aus der Gleichheitsbedingung (2,2) folgt nach (3,4) und (3,1), dass in (1) das Gleichheitszeichen genau dann vorkommen kann, wenn

$$h^*(\varphi) = \text{konst.}\ h(\varphi) + \text{konst.}\ (1 - 2|\cos\varphi|) + \text{konst.}\cos\varphi\,.$$

Daraus ergibt sich die im Satz I angeführte und die Gleichheit in (1) kennzeichnende gegenseitige Form der Körper K und K^*.

4. Der Satz I für konvexe Rotationskörper mit parallelen Drehachsen lässt sich verallgemeinern, und zwar für konvexe Körper K und K^*, denen in einer Richtung die Rotationszylinderflächen umbeschrieben werden können. Wir beschränken uns im folgenden auf den Fall, dass K und K^* stückweise stetig differenzierbare Stützfunktionen besitzen. Die nachstehenden Ergebnisse gelten auch ohne diese Beschränkung; indem man von der Arbeit von A. Dinghas [4] ausgeht (namentlich von den Behauptungen in den Anfängen der Abschn. 2 und 5, S. 307 und 313–314), kann man diese Ergebnisse auch ohne die erwähnte Differenzierbarkeitsvoraussetzung herleiten.

Auf der Einheitskugelfläche ω mit den geographischen Koordinaten $\lambda \in \langle 0, 2\pi)$, $\varphi \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$ sei eine stetige und stückweise stetig differenzierbare Funktion $F(\lambda, \varphi)$ erklärt, welche auf dem Äquator verschwindet:

$$F(\lambda, 0) = 0\,. \tag{4,1}$$

Es sei Δ der erste Beltramische Differentialoperator in bezug auf ω. Dann ist

$$\int_\omega [\Delta(F) - 2F^2]\,\mathrm{d}\omega \geqq 0\,. \tag{4,2}$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur im Fall, dass

$$F(\lambda, \varphi) = C_0 \sin\varphi + C_1|\sin\varphi| \tag{4,3}$$

mit beliebigen Konstanten C_0, C_1 gilt.

Um dieses zu beweisen, benutzen wir zuerst die Transformation

$$\sin\varphi = x \in \langle -1, 1 \rangle\,, \tag{4,4}$$

welche für die linke Seite in (4,2) diese Umformung liefert:

$$(4,5) \qquad \int_\omega [\Delta(F) - 2F^2]\, d\omega = \int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{\partial F}{\partial\lambda}\right)^2 d\varphi\, d\lambda + $$
$$+ \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\left[(1-x^2)\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 - 2F^2\right] dx\, d\lambda\,.$$

Die Ungleichung (4,2) folgt daraus, dass beide zweifachen Integrale in (4,5) nichtnegativ sind. In der Tat ergibt sich aus (4,1) die Beschränktheit des Quotienten $F(\lambda, \varphi)/\varphi$ in der Nähe des Äquators; nach (4,4) bedeutet das auch die Beschränktheit von $F(\lambda, x)/P_1(x)$ für alle λ in einer Umgebung von $x = 0$. Man kann also den Hilfssatz II mit $n = 1$ anwenden, was für alle λ zur Nichtnegativität des inneren Integrals in der zweiten Zeile von (4,5) führt.

Die Gleichheitsbedingung (4,3) folgt aus der Gleichheitsbedingung im Hilfssatz II zusammen mit $\partial F/\partial\lambda = 0$, d. h. mit der Bedingung für das Verschwinden des ersten Integrals rechts in (4,5); denn (4,3) ist nur eine andere Schreibweise für

$$F(\lambda, \varphi) = \begin{cases} c_0 \sin\varphi\,; & \varphi \in \langle -\pi/2, 0\rangle\,, \quad c_0 = \text{konst.} \\ c_1 \sin\varphi\,; & \varphi \in \langle 0, \pi/2\rangle\,, \quad c_1 = \text{konst.}\end{cases}$$

[Statt (4,1) kann man die Beschränktheit von $F(\lambda, \varphi)/P_1(\sin\varphi)$ voraussetzen. Allgemeiner, aus der Beschränktheit des Quotienten der Funktion $F(\lambda, \varphi)$ und der zonalen Kugelflächenfunktion $P_n(\sin\varphi)$ lässt sich – auf eine dem obigen ähnliche Weise – die Ungleichung $\int_\omega[\Delta(F) - n(n+1)F^2]\, d\omega \geqq 0$ herleiten.]

Wir kehren zu den konvexen Körpern K, K^* zurück, denen in einer Richtung die Rotationszylinderflächen mit den Radien r, r^* umbeschrieben werden können. Es seien $h(\lambda, \varphi)$, $h^*(\lambda, \varphi)$ die Stützfunktionen von K, K^*, wobei $\varphi = \pm\pi/2$ die zu den Rotationsachsen der Zylinder parallele Richtungen sind. Dann ist $h(\lambda, 0) = r$, $h^*(\lambda, 0) = r^*$.

Die Funktion

$$(4,6) \qquad F(\lambda, \varphi) = h(\lambda, \varphi)/r - h^*(\lambda, \varphi)/r^*$$

erfüllt die Voraussetzungen des obigen Hilfssatzes aus diesem Abschn. Ihre Einsetzung in (4,2) führt zur Ungleichung

$$(4,7) \qquad -O/r^2 + 2\mathcal{O}/rr^* - O^*/r^{*2} \geqq 0$$

und (4,3) liefert die Gleichheitsbedingung: Einer der Körper K, K^* entsteht aus dem anderen durch eine Homothetie und eine teleskopische Transformation (im Sinne aus [2], S. 94).

5. Wir erhalten eine Verschärfung von (4,7), indem wir statt (4,6) die den Voraussetzungen des Hilfssatzes aus dem Abschn. 4 auch genügende Funktion

$$F(\lambda, \varphi) = [h(\lambda, \varphi) - r] : M - [h^*(\lambda, \varphi) - r^*] : M^*$$

benutzen. Das zum Abschn. 4 ähnliche Verfahren führt dann zur Ungleichung (1) einschliesslich der Gleichheitsbedingung; statt der Richtung der Rotationsachsen tritt jetzt die gemeinsame Richtung der Achsen der umbeschriebenen Rotationszylinderflächen ein.

Der Hilfssatz aus dem Abschn. 4 ist eine Modifikation des räumlichen Seitenstückes von W. Blaschke zur Ungleichung von W. Wirtinger. Vgl. dazu auch A. Dinghas [5], S. 20–22 und [7], S. 3–4. Zum Hilfssatz II aus der Einleitung und zum Hilfssatz aus dem Abschn. 2 vgl. A. Dinghas [6], S. 7.

Literaturverzeichnis

[1] *E. F. Beckenbach - R. Bellman:* Inequalities. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1961, 2. Aufl. 1965 (russische Übersetzung Moskau 1965).

[2] *T. Bonnesen - W. Fenchel:* Theorie der konvexen Körper. Berlin 1934, New York 1948, Berlin 1951, Berlin—New York 1974.

[3] *A. Dinghas:* Neuer Beweis einer isoperimetrischen Ungleichung von Bol. Math. Z. *51* (1949), 469—473.

[4] *A. Dinghas:* Neuer Beweis einer verschärften Minkowskischen Ungleichung für konvexe Körper. Math. Z. *51* (1949), 306—316.

[5] *A. Dinghas:* Zur Theorie der konvexen Körper im n-dimensionalen Raum. Abh. preuss. Akad. Wiss., Math.-naturwiss. Kl. 1939, Nr. *4*, 1—30.

[6] *A. Dinghas:* Elementarer Beweis einer Ungleichung für konvexe Körper. Ebenda, Nr. 9, 1—20.

[7] *A. Dinghas:* Beweis einer Ungleichung für konvexe Körper. Ebenda, Nr. *11*, 1—13.

[8] *H. Hadwiger:* Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1957 (russische Übersetzung Moskau 1966).

[9] *D. S. Mitrinović:* Analytic Inequalities. Berlin 1970.

[10] *D. S. Mitrinović - P. M. Vasić:* An integral inequality ascribed to Wirtinger, and its variations and generalizations. Publ. Fac. Electrotechn. Univ. Belgrad, Série Math. et Phys., 1969, No. 272, 157—170.

[11] *Z. Nádeník:* Die Ungleichungen für die Oberfläche, das Integral der mittleren Krümmung und die Breite der konvexen Körper. Čas. pěst. mat. *92* (1967), 133—145.

[12] *Z. Nádeník:* Die Verschärfung einer Ungleichung von Frobenius für den gemischten Flächeninhalt der konvexen ebenen Bereiche. Čas. pěst. mat. *90* (1965), 220—225.

Anschrift des Verfassers: 166 29 Praha 6 - Dejvice, Thákurova 7 (Stavební fakulta ČVUT).