Luděk Granát

O p-průmětu přímky na plochu

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 90 (1965), No. 2, 194--199

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108263`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 90 (1965), Praha

O p-PRŮMĚTU PŘÍMKY NA PLOCHU

LUDĚK GRANÁT, Praha

Došlo 2. dubna 1964

A. D. POSVJANSKIJ podal v [1] synteticky základ teorie p-průmětu přímky na plochu. V tomto článku chce autor ukázat na určitou cestu analytického vybudování této teorie a odvození některých dalších vztahů. Těchto vztahů je možno s výhodou užít i při grafických konstrukcích. Podrobnější rozpracování uvedeného se nachází v [2]. Studium p-průmětů přímek na plochy může posloužit při úlohách týkajících se obalových ploch poloh pohybující se dané plochy.

1. ZÁKLADNÍ VZTAHY PRO p-PRŮMĚTY PŘÍMKY NA PLOCHY

Definice. p-průmětem přímky $\boldsymbol{A}$ [1]) na danou plochu rozumíme množinu všech bodů plochy, v nichž sestrojené normály jsou přímkami lineárního přímkového komplexu $\boldsymbol{W}$, jehož osou je daná přímka $\boldsymbol{A}$ a parametrem je reálné číslo p. n-průmětem přímky $\boldsymbol{A}$ na danou plochu rozumíme p-průmět této přímky na danou plochu pro parametr $p = 0$.

Mějme dánu plochu $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}({}^1u, {}^2u)$. Pokud provádíme lokální úvahy, máme vždy na mysli její regulární oblast Ω. Normály této plochy jsou určeny duálními vektory $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{n} + \varepsilon(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{n})$, kde $\boldsymbol{n} = \partial\boldsymbol{r}/\partial^1u \times \partial\boldsymbol{r}/\partial^2u$. Aby tyto normály patřily komplexu $\boldsymbol{W}$, musí platit

$$Dual-(\boldsymbol{W} . \boldsymbol{N}) = 0 . \tag{1}$$

Vztah (1) je vztahem mezi parametry ${}^1u$, ${}^2u$. Označme

$$q({}^1u, {}^2u) \equiv Dual-(\boldsymbol{W} . \boldsymbol{N}) = 0.$$

Nechť tento vztah pro $({}^1u, {}^2u)$ z oblasti $\Omega^* \subset \Omega$ určuje na ploše $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}({}^1u, {}^2u)$

---

[1]) Přímka $\boldsymbol{A}$ je určena duálním vektorem $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a} + \varepsilon\bar{\boldsymbol{a}}$. Definice a vlastnosti duálních čísel a vektorů viz např. v [3]. Z této knihy převzata i symbolika, jen místo fraktury užito tučně psané latinky.

křivku. Směrové kosiny tečny této křivky v jejím nesingulárním bodě jsou úměrné složkám vektoru

$$\mathbf{t} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial^1 u}, & \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial^2 u} \\ \dfrac{\partial q}{\partial^1 u}, & \dfrac{\partial q}{\partial^2 u} \end{vmatrix} . \tag{2}$$

Nechť na ploše $\mathbf{r} = \mathbf{r}({}^1u, {}^2u)$ bod $\mathbf{r}({}^1u_0, {}^2u_0)$ je bodem p-průmětu přímky $\mathbf{A}$ na tuto plochu. Mějme další plochu $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'({}^1u, {}^2u)$ vztaženou ke stejným parametrům. Nechť tato plocha má bod $\mathbf{r}'({}^1u_0, {}^2u_0) = \mathbf{r}({}^1u_0, {}^2u_0)$ s plochou $\mathbf{r} = \mathbf{r}({}^1u, {}^2u)$ společný.

Mají-li obě plochy v bodě $\mathbf{r}({}^1u_0, {}^2u_0)$ touž tečnou rovinu, pak mají v něm i společnou normálu a tento bod je též bodem p-průmětu přímky $\mathbf{A}$ na plochu $\mathbf{r}'({}^1u, {}^2u)$.

Obráceně, je-li bod $\mathbf{r}({}^1u_0, {}^2u_0)$ též bodem p-průmětu přímky $\mathbf{A}$ na plochu $\mathbf{r}'({}^1u, {}^2u)$, nemusí mít dané plochy v bodě $\mathbf{r}({}^1u_0, {}^2u_0)$ společnou tečnou rovinu. Tečné roviny v bodě $\mathbf{r}({}^1u_0, {}^2u_0)$ k oběma plochám, pokud jsou různé, se protínají v kolmici na nulovou rovinu bodu $\mathbf{r}({}^1u_0, {}^2u_0)$ vzhledem k danému lineárnímu přímkovému komplexu o ose $\mathbf{A}$ a parametru p, protože jde o roviny kolmé na přímky tohoto komplexu.

Nechť mají plochy $\mathbf{r} = \mathbf{r}({}^1u, {}^2u)$ a $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'({}^1u, {}^2u)$ v bodě $\mathbf{r}({}^1u_0, {}^2u_0) = \mathbf{r}'({}^1u_0, {}^2u_0)$ styk alespoň druhého řádu, tj. nechť platí při vhodné parametrisaci

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial^i u}\right)_0 = \left(\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial^i u}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial^i u \partial^j u}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}'}{\partial^i u \partial^j u}\right)_0, \quad i, j = 1, 2 . \tag{3}$$

Je-li bod $\mathbf{r}({}^1u_0, {}^2u_0)$ bodem p-průmětů přímky $\mathbf{A}$ na tyto plochy, pak tečny k těmto p-průmětům v bodě $\mathbf{r}({}^1u_0, {}^2u_0)$ jsou určeny vztahy (2).

Ze vztahů

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial^i u} &= Dual-\left(\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial^i u} . \mathbf{N} + \mathbf{W} . \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial^i u}\right), \\ \frac{\partial q'}{\partial^i u} &= Dual-\left(\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial^i u} . \mathbf{N}' + \mathbf{W} . \frac{\partial \mathbf{N}'}{\partial^i u}\right), \end{aligned} \qquad i = 1, 2 \tag{4}$$

kde $\mathbf{N}$ značíme normálu plochy $\mathbf{r} = \mathbf{r}({}^1u, {}^2u)$, $\mathbf{N}'$ normálu plochy $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'({}^1u, {}^2u)$ a $q' = Dual-(\mathbf{W} . \mathbf{N}')$,

a ze vztahů (3) plyne, že k tomu, aby tečny splývaly, stačí, aby ještě

$$\left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial^i u}\right)_0 = \left(\frac{\partial \mathbf{N}'}{\partial^i u}\right)_0, \quad \text{pro} \quad i = 1, 2 . \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial^i u} &= \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial^1 u \partial^i u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial^2 u} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial^1 u} \times \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial^2 u \partial^i u}, \\ \frac{\partial \mathbf{n}'}{\partial^i u} &= \frac{\partial^2 \mathbf{r}'}{\partial^1 u \partial^i u} \times \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial^2 u} + \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial^1 u} \times \frac{\partial^2 \mathbf{r}'}{\partial^2 u \partial^i u}, \end{aligned} \qquad i = 1, 2 .$$

Na základě vztahů (3) a (4) platí:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial^i u}\right)_0 = \left(\frac{\partial \mathbf{n}'}{\partial^i u}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial^i u} \times \mathbf{n} + \mathbf{r} \times \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial^i u}\right)_0 = \left(\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial^i u} \times \mathbf{n}' + \mathbf{r}' \times \frac{\partial \mathbf{n}'}{\partial^i u}\right)_0, \quad i = 1, 2$$

a odtud i vztah (5).

Věta 1. *Mají-li plochy $\mathbf{r} = \mathbf{r}({}^1u, {}^2u)$ a $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'({}^1u, {}^2u)$ ve společném bodě $\mathbf{r}({}^1u_0, {}^2u_0) = \mathbf{r}'({}^1u_0, {}^2u_0)$, který je bodem p-průmětu přímky $\mathbf{A}$ na jednu plochu, styk aspoň druhého řádu, pak tímto bodem prochází též p-průmět přímky $\mathbf{A}$ na druhou plochu a oba p-průměty se v bodě $\mathbf{r}({}^1u_0, {}^2u_0)$ dotýkají.*

Mají-li p-průměty přímky $\mathbf{A}$ na plochy $\mathbf{r}({}^1u, {}^2u)$ a $\mathbf{r}'({}^1u, {}^2u)$ společný bod $\mathbf{r}({}^1u_0, {}^2u_0)$ a v něm společnou tečnu $\mathbf{T}$, pak pokud tato tečna nesplývá s kolmicí $\mathbf{M}$ na nulovou rovinu bodu $\mathbf{r}({}^1u_0, {}^2u_0)$ vzhledem ke komplexu o ose $\mathbf{A}$ a parametru p, mají dané plochy v bodě $\mathbf{r}({}^1u_0, {}^2u_0)$ společnou tečnou rovinu určenou přímkami $\mathbf{T}$ a $\mathbf{M}$.

Protože v dalším budeme potřebovat pracovat přímo se složkami duálních vektorů, tj. s Plückerovými souřadniceni určujícími přímky a lineární přímkové komplexy, stanovíme si příslušný způsob záznamu. $\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ představuje duální vektor, jehož reálná část je vektor daný složkami x_1, x_2, x_3 a duální část je vektor daný složkami x_4, x_5, x_6.

Příslušný zápis přímky $\mathbf{A}$ dané parametrickými rovnicemi $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u}$, tj.

$$x = x_0 + au, \quad y = y_0 + bu, \quad z = z_0 + cu$$

bude

$$\mathbf{A} = (a, b, c, cy_0 - bz_0, az_0 - cx_0, bx_0 - ay_0)$$

a komplexu o ose $\mathbf{A}$ a parametru p bude

$$\mathbf{W} = (a, b, c, cy_0 - bz_0 + ap, az_0 - cx_0 + bp, bx_0 - ay_0 + cp).$$

2. p-PRŮMĚT PŘÍMKY NA ALGEBRAICKOU PLOCHU

Mějme algebraickou plochu n-tého stupně

$$f(r_i) = u_n + u_{n-1} + \ldots + u_1 + u_0 = 0, \tag{6}$$

kde u_j jsou formy j-tého stupně v proměnných $x, y\ z$,.

Směrové kosiny normály této plochy v jejím bodě $\mathbf{r}'$ jsou úměrné parciálním derivacím $(\partial f/\partial r_i)_{r_i = r_i'}$, $i = 1, 2, 3$.

$$\frac{\partial f}{\partial r_i} = \frac{\partial u_n}{\partial r_i} + \frac{\partial u_{n-1}}{\partial r_i} + \ldots + \frac{\partial u_1}{\partial r_i}. \tag{7}$$

Stupeň výrazu (7) je nejvýše $n - 1$.

Normály plochy f v jejím bodě o souřadnicích x, y, z jsou dány duálním vektorem

$$\mathbf{N} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial z} y - \frac{\partial f}{\partial y} z, \frac{\partial f}{\partial x} z - \frac{\partial f}{\partial z} x, \frac{\partial f}{\partial y} x - \frac{\partial f}{\partial x} y\right).$$

Aby tyto normály patřily danému komplexu **W**, musí platit

$$Dual-(\mathbf{W}\,.\,\mathbf{N}) = 0\,,$$

tj.

$$(8) \qquad a\left(\frac{\partial f}{\partial z}y - \frac{\partial f}{\partial y}z\right) + b\left(\frac{\partial f}{\partial x}z - \frac{\partial f}{\partial z}x\right) + c\left(\frac{\partial f}{\partial y}x - \frac{\partial f}{\partial x}y\right) +$$

$$+ (y_0c - bz_0 + pa)\frac{\partial f}{\partial x} + (z_0a - cx_0 + pb)\frac{\partial f}{\partial y} + (x_0b - ay_0 + pc)\frac{\partial f}{\partial z} = 0\,.$$

Tato rovnice je stupně nejvýš n. Pokud představuje plochu, pak p-průmět přímky **A** na plochu f je průnikem plochy f a plochy dané rovnicí (8).

Věta 2. *p-průmět přímky **A** na algebraickou plochu stupně n, pokud je to křivka, je stupně nejvýše n^2.*

Přejdeme-li k homogenním souřadnicím, snadno zjistíme, že nevlastní útvar plochy dané rovnicí (8) nezávisí na parametru p a pokud se týká přímky **A**, závisí pouze na jejím nevlastním bodě.

3. p-PRŮMĚT PŘÍMKY NA ŠROUBOVÉ A ROTAČNÍ PLOCHY

Uvažujeme-li místo komplexu **W** o ose **A** a parametru p libovolný komplex $\tilde{\mathbf{W}}$ ze svazku $\tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{W} + k\,.\,\mathbf{W}'$, kde $\mathbf{W}'$ je komplex příslušný ke šroubovému pohybu vytvářejícímu danou šroubovou plochu a k je konstanta, pak pro normály **N** dané šroubové plochy platí

$$Dual-(\tilde{\mathbf{W}}\,.\,\mathbf{N}) = Dual-(\mathbf{W}\,.\,\mathbf{N}) + k\,.\,Dual-(\mathbf{W}'\,.\,\mathbf{N})\,.$$

Protože $Dual-(\mathbf{W}'\,.\,\mathbf{N}) \equiv 0$, je podmínka $Dual-(\tilde{\mathbf{W}}\,.\,\mathbf{N}) = 0$ ekvivalentní podmínce $Dual-(\mathbf{W}\,.\,\mathbf{N}) = 0$. V případě, že v uvedeném svazku je aspoň jeden speciální komplex s reálnou osou, pak p-průmět osy **A** komplexu **W** můžeme sestrojit jako n-průmět osy speciálního komplexu svazku $\mathbf{W} + k\,.\,\mathbf{W}'$ na danou šroubovou plochu.

Máme-li místo šroubové plochy plochu rotační, pak komplex $\mathbf{W}'$ je speciální. Je-li sdružená polára $\tilde{\mathbf{A}}$ k ose dané rotační plochy $\mathbf{A}'$ vzhledem ke komplexu **W** různá od $\mathbf{A}'$, pak ji můžeme uvažovat jako osu speciálního komplexu $\tilde{\mathbf{W}}$ a n-průmět přímky $\tilde{\mathbf{A}}$ je zároveň p-průmětem osy **A** komplexu **W** na danou rotační plochu (viz [1]).

V aplikacích [1]) jsou důležité právě konstrukce p-průmětu přímky na speciální plochy tohoto typu. Možnost převedení jejich na konstrukci n-průmětu daný úkol podstatně zjednodušuje.

---

[1]) např. při určování křivek, podél nichž se dotýká daný rotující obráběcí nástroj obráběné plochy.

Jako příklad uvedeme sestrojení n-průmětu přímky **A** na rotační kuželovou plochu, jejíž osa není s **A** rovnoběžná (ani s ní nesplývá).

Zvolme speciální souřadnicou soustavu. Osu rotační plochy zvolme za osu z souřadnicové soustavy. Osou z proložíme rovinu rovnoběžnou s přímkou **A** a označíme ji jako rovinu yz. Duální vektor určující přímku **A** pak můžeme psát bez újmy obecnosti

$$\mathbf{A} = (0, b, c, -bz_0, -cx_0, bx_0)\,.$$

Mějme rotační plochu kuželovou určenou rovnicí

$$k^2(x^2 + y^2) = z^2\,, \quad k \neq 0\,. \tag{9}$$

Normála **N** v bodě o souřadnicích x, y, z této plochy je určena duálním vektorem

$$\mathbf{N} = (k^2x, k^2y, -z, -(1 + k^2)\,yz, (1 + k^2)\,xz, 0)\,.$$

Aby tyto normály patřily speciálnímu komplexu o ose **A**, musí platit

$$-(1 + k^2)\,bxz + bk^2z_0x + ck^2x_0y + bx_0z = 0\,. \tag{10}$$

Tento vztah představuje rovnici hyperbolického paraboloidu, jehož jedna řídící rovina je kolmá na osu kuželové plochy a druhá je rovnoběžná s osou kuželové plochy a osou komplexu. Jedna řídící přímka je **A** a druhá je rovnoběžná s osou daného kužele a prochází bodem Q, který leží na spojnici vrcholu V kužele s průsečíkem M přímky **A** s rovinou kolmou na osu kužele a procházející vrcholem kužele, při čemž $\overrightarrow{VQ} = 1/(1 + k^2)\,\overrightarrow{VM}$.

Důkaz posledního tvrzení se provede dosazením rovnic řídící přímky

$$x = \frac{x_0}{1 + k^2}\,, \quad y = -\frac{z_0 b}{c(1 + k^2)}$$

do rovnic hyperbolického paraboloidu (10).

Literatura

[1] *А. Д. Посвянский:* Ортогональное проектирование на кривые поверхности и его приложения к вопросам геометрии пространственных зубчатых зацеплений. Сборник статей: Методы начертательной геометрии и ее приложения. Москва 1955, стр. 232—253.

[2] *L. Granát:* Základ teorie p-průmětů a jejich užití v teorii ozubení. Disertační práce.

[3] *W. Haack:* Differential-Geometrie, Teil II, Wolfenbüttel und Hannover 1948.

Резюме

О p-ПРОЕКЦИИ ПРЯМОЙ НА ПОВЕРХНОСТЬ

ЛУДЕК ГРАНАТ (Luděk Granát), Прага

Если определить: под p-проекцией прямой $\boldsymbol{A}$ на данную поверхность следует понимать совокупность всех точек поверхности, нормали в которых принадлежат линейному комплексу $\boldsymbol{W}$, имеющему своей центральной осью данную прямую $\boldsymbol{A}$ и параметром p, то искомую p-проекцию прямой $\boldsymbol{A}$ на поверхность $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(^1u, {}^2u)$ можно выразить формулой

$$Dual-(\boldsymbol{W}\,.\,\boldsymbol{N}) = 0\,,$$

где $\boldsymbol{W}$ — дуальный вектор, определяющий линейный комплекс с осью $\boldsymbol{A}$ и параметром p, и $\boldsymbol{N}$ — нормали данной поверхности.

В работе приведены отношения между касанием двух поверхностей и p-проекциами прямой на эти поверхности, теорема о порядке p-проекции прямой на алгебраическую поверхность и исследования p-проекции прямой на винтовые поверхности и поверхности вращения.

Zusammenfassung

ÜBER DIE p-PROJEKTION EINER GERADEN AUF EINE FLÄCHE

LUDĚK GRANÁT, Praha

Definiert man die p-Projektion einer Geraden $\boldsymbol{A}$ auf eine gegebene Fläche als die Menge aller Punkte der Fläche, in welchen die konstruierten Normalen einem linearen Komplex $\boldsymbol{W}$ angehören, dessen Achse die gegebene Gerade $\boldsymbol{A}$ mit dem Parameter p ist, dann läßt sich die gesuchte p-Projektion der Geraden $\boldsymbol{A}$ auf die Fläche $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(^1u, {}^2u)$ durch die Relation

$$Dual-(\boldsymbol{W}\,.\,\boldsymbol{N}) = 0\,,$$

ausdrücken, wo $\boldsymbol{W}$ der duale Vektor, der den Komplex mit der Achse $\boldsymbol{A}$ und dem Parameter p bestimmt und wo $\boldsymbol{N}$ die Normalen der Fläche sind.

In dieser Arbeit sind bestimmte Beziehungen zwischen der Berührung zweier Flächen und der p-Projektionen einer Geraden auf diese Flächen, ein Satz über die Stufe der p-Projektion der Geraden auf algebraische Fläche und die Untersuchungen der p-Projektion einer Geraden auf Schrauben- und Rotationsflächen angeführt.