Zbyněk Nádeník

Obere und untere Schranken für das isoperimetrische Defizit bei kantiger Enveloppe von achsensymmetrischen konvexen Zylinderflächen

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 90 (1965), No. 2, 226--229

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108262`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 90 (1965), Praha

OBERE UND UNTERE SCHRANKEN FÜR DAS ISOPERIMETRISCHE DEFIZIT BEI KANTIGER ENVELOPPE VON ACHSENSYMMETRISCHEN KONVEXEN ZYLINDERFLÄCHEN

ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha

(Eingelangt am 9. Juni 1964)

Wir wählen drei nicht auf einer Gerade liegende Punkte A_j, A_{j+1}, A_{j+2} und zwei achsensymmetrische konvexe Zylinder K_j und K_{j+1} mit den Grenzen S_j und S_{j+1}, aus denen die Achse des ersten A_jA_{j+1} [1]) und die Achse des zweiten $A_{j+1}A_{j+2}$ enthält und beide gemeinsame Stützebenen τ' und τ'' besitzen. Es sei $S'_l = S_l \cap \tau'$, $S''_l = S_l \cap \tau''$ $(l = j, j + 1)$. Den Halbraum, welcher durch die Ebene, in der die Verbindungslinie der Punkte A_j, A_{j+1} (bzw. A_{j+1}, A_{j+2}) und beliebige Gerade aus S'_j (bzw. S'_{j+1}) liegen, bestimmt ist und welcher den Punkt A_{j+2} (bzw. A_j) enthält, bezeichnen wir mit π_j (bzw. π_{j+1}). Weiter sei $S^*_l = (S_l \cap \pi_l) - S'_l - S''_l$ und $S^{**}_l = S_l - S^*_l - S'_l - S''_l$ $(l = j, j + 1)$.

Jetzt definieren wir folgendermassen die geschlossene Linie Γ_{j+1}: Ist S'_j oder S'_{j+1} eine Gerade, so ist $\Gamma_{j+1} = (S'_j \cap S'_{j+1}) \cup (S^*_j \cap S^*_{j+1}) \cup (S''_j \cap S''_{j+1}) \cup (S^{**}_j \cap S^{**}_{j+1})$. Sind dagegen S'_j und S'_{j+1} ebene Streife, dann entsteht Γ_{j+1} so, dass man $(S^*_j \cap S^*_{j+1}) \cup (S^{**}_j \cap S^{**}_{j+1})$ mit geeigneten Diagonalen in den Rhomboiden $S'_j \cap S'_{j+1}$ und $S''_j \cap S''_{j+1}$ vereinigt. Die Linie Γ_{j+1} und auch die Kegelfläche $\Pi_{j+1} = \{A_{j+1}X;\ X \in \Gamma_{j+1}\}$ sind freilich symmetrisch bezüglich des Punktes A_{j+1}.

Wir wählen einen weiteren nicht auf der Verbindungslinie der Punkte A_{j+1}, A_{j+2} liegenden Punkt A_{j+3} und einen weiteren achsensymmetrischen konvexen Zylinder K_{j+2} mit der Grenze S_{j+2}, dessen Achse $A_{j+2}A_{j+3}$ enthält und der mit dem Zylinder K_{j+1} gemeinsame Stützebenen hat. Wir konstruieren noch die Linie Γ_{j+2} und die zugehörige Kegelfläche Π_{j+2}. Es sei $\Pi_{j+1} \cap \Pi_{j+2} = \Gamma_{j+1} \cap \Gamma_{j+2}$. Den zwischen Π_{j+1} und Π_{j+2} (bzw. zwischen Γ_{j+1} und Γ_{j+2}) liegenden Teil des Zylinders K_{j+1} (bzw. der Zylinderfläche S_{j+1}) bezeichnen wir mit $\mathscr{K}_{j+1}$ (bzw. mit $\mathscr{S}_{j+1}$). Für den Rauminhalt V_{j+1} des Körpers $\mathscr{K}_{j+1}$ und für die Oberfläche O_{j+1} der Fläche $\mathscr{S}_{j+1}$ gilt

$$V_{j+1} = \overline{A_{j+1}A_{j+2}} \cdot F_{j+1}\,, \quad O_{j+1} = \overline{A_{j+1}A_{j+2}} \cdot L_{j+1}\,,$$

[1]) YZ bedeutet überall die Strecke mit den Endpunkten Y, Z und $\overline{YZ}$ die Länge von YZ.

wo F_{j+1} (bzw. L_{j+1}) den Flächeninhalt (bzw. die Länge) des Normalschnittes des Zylinders K_{j+1} (bzw. der Zylinderfläche S_{j+1}) bedeutet.

Endlich wählen wir $n \geqq 3$ verschiedene Punkte $A_1, A_2, \ldots, A_n$, aus denen keine drei unmittelbar nachfolgende auf einer Gerade liegen (A_1 folgt nach A_n). Zu jeder Verbindungslinie der Punkte A_i, A_{i+1} (überall $i = 1, 2, \ldots, n$; die Indizes nimmt man mod n) wählen wir auf solche Weise einen konvexen Zylinder, der in ihr die Symmetrieachse hat, dass jede zwei Zylinder K_i und K_{i+1} gemeinsame Stützebenen besitzen, dass $\Pi_{i+1} \cap \Pi_{i+2} = \Gamma_{i+1} \cap \Gamma_{i+2}$ für jedes i ist und dass endlich für jede zwei nichtbenachbarte Körper $\mathscr{K}_i$ und $\mathscr{K}_j$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) $\mathscr{K}_i \cap \mathscr{K}_j = 0$ ist. Das Volumen V und die Oberfläche O des Körpers $\mathscr{K} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathscr{K}_i$ sind infolgedessen durch diese Formeln ausgedrückt:

$$V = \sum_{i=1}^{n} \overline{A_iA_{i+1}} \cdot F_i\,, \quad O = \sum_{i=1}^{n} \overline{A_iA_{i+1}} \cdot L_i\,. \tag{1}$$

Wir nehmen an, dass die Zylinder K_i gemeinsame Breite $2d$ besitzen[2]) *und wir setzen $l = \sum_{i=1}^{n} A_iA_{i+1}$. Alsdann ist*

$$O^2 - 4\pi l V \geqq 0 \tag{2}$$

und das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn alle Zylinder K_i die Rotationszylinder sind.

Beweis. Für die Normalschnitte der Zylinder K_i gilt $F_i - dL_i + \pi d^2 \leqq 0$ (s. [3], S. 89, 95). Multipliziert man die i-te von diesen Ungleichungen mit $\overline{A_iA_{i+1}}$ und addiert man dann alle, so erhält man nach (1), dass

$$O^2 - 4\pi l V \geqq (O - 2\pi l d)^2\,. \tag{3}$$

Das Gleichheitszeichen gilt in (3) dann und nur dann, wenn $F_i - dL_i + \pi d^2 = 0$, d.h. (s. wieder [3], S. 90) wenn der Normalschnitt jedes Zylinders K_i entweder ein Kreis mit dem Durchmesser $2d$ oder solcher konvexe Bereich ist, welcher dadurch entsteht, dass man zu den Gegenseiten eines Rechteckes mit den Längen $2d$ zwei Halbkreise beifügt, welche diese Seiten für die Durchmesser haben. Gilt in (2) das Gleichheitszeichen, so gilt es freilich auch in (3) und noch $O = 2\pi l d$. Diese letzte Relation ist aber in der Klasse der durch das Gleichheitszeichen in (3) charakterisierten Körper $\mathscr{K}$ nur dann erfüllt, wenn alle Zylinder K_i die Rotationszylinder sind.

Ohne der Voraussetzung über die gemeinsame Breite der Zylinder K_i gilt der Satz im allgemeinen nicht.

Die Stützfunktion des Normalschnittes des Zylinders K_i – in der Ebene dieses Schnittes und mit dem Nullpunkte in dem Durchschnitte dieser Ebene mit der

---

[2]) D.h., ist Δ_i bzw. δ_i die grösste bzw. die kleinste Breite des Zylinders K_i, dann $\delta_i \leqq 2d \leqq \Delta_i$. Diese Forderung ist erfüllt, wenn das Polygon $A_1A_2 \ldots A_n$ eben ist.

Achse des Zylinders K_i – bezeichnen wir mit $h_i(\varphi)$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$. Im Folgenden setzen wir voraus, dass der Normalschnitt der Begrenzung des Zylinders K_i mit stetiger Krümmung $r_i^{-1}(\varphi)$ versehen ist.

Wir nehmen von neuem an, dass die Zylinder K_i gemeinsame Breite besitzen und wir setzen wieder $l = \sum_{i=1}^{n} A_iA_{i+1}$ und noch $\varrho = \min r_i(\varphi)$, $P = \max r_i(\varphi)$ (wo allerdings $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ und $i = 1, 2, \ldots, n$). *Dann ist*

$$(4) \qquad O^2 - 4\pi l V \leqq \pi^2 l^2 (P - \varrho)^2 \,, \quad O^2 - 4\pi l V \leqq V^2 \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{P}\right)^2$$

und das Gleichheitszeichen gilt in beiden Relationen dann und nur dann, wenn alle Zylinder K_i die Rotationszylinder sind.

Beweis. Wir modifizieren das Verfahren aus [1], S. 203–206; der Ausgangspunkt ist wieder folgender Hilfssatz: Wir setzen $f(x) = ax^2 + 2bx + c$ mit $a > 0$, $b^2 - ac \geqq 0$ und für $\alpha \leqq A$ sei $f(\alpha) \geqq 0$, $f(A) \geqq 0$, $f'(\alpha) \leqq 0$, $f'(A) \geqq 0$; stets $f' = \mathrm{d}f/\mathrm{d}x$. Dann ist $b^2 - ac \leqq \frac{1}{4}a^2(A - \alpha)^2$ und das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn $f(\alpha) = f(A) = 0$.

Nach (1) ist $V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \overline{A_iA_{i+1}} \,.\, \int_0^{2\pi} h_i(\varphi)\, r_i(\varphi)\, \mathrm{d}\varphi$ und $O = \sum_{i=1}^{n} \overline{A_iA_{i+1}} \,.\, \int_0^{2\pi} h_i(\varphi)\, \mathrm{d}\varphi$; also bei $f(x) = \pi l x^2 + Ox + V$ ist

$$(5) \qquad f(x) = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \overline{A_iA_{i+1}} \,.\, \int_0^{2\pi} [h_i(\varphi) + x]\,[r_i(\varphi) + x]\, \mathrm{d}\varphi \,,$$

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{n} \overline{A_iA_{i+1}} \,.\, \int_0^{2\pi} [r_i(\varphi) + x]\, \mathrm{d}\varphi \,.$$

Das Trinom $f(x)$ hat nach (2) nichtnegative Diskriminante und weil

$$(6) \qquad \varrho \leqq r_i(\varphi) \leqq P, \ \varrho \leqq h_i(\varphi) \leqq P \,; \quad i = 1, 2, \ldots, n; \ \varphi \in \langle 0, 2\pi)$$

(s. [2], S. 116), bedeutet das wegen (5), dass $f(-P) \geqq 0$, $f(-\varrho) \geqq 0$, $f'(-P) \leqq 0$, $f'(-\varrho) \geqq 0$ ist und aus dem Hilfssatze folgt die erste Relation in (4). Gemäss dem Schlusse des Hilfssatzes und nach (5) und (6) tritt in der ersten Relation (4) das Gleichheitszeichen dann und nur dann ein, wenn $r_i(\varphi)$ oder $h_i(\varphi)$ für alle i und $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ gleich ϱ oder P ist.

Die zweite Relation in (4) – einschliesslich der Gleichheitsbedingung – erhält man, wenn man $f(x) = Vx^2 + Ox + \pi l$ setzt, sodass

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \overline{A_iA_{i+1}} \,.\, \int_0^{2\pi} [x h_i(\varphi) + 1]\,[x r_i(\varphi) + 1]\, \mathrm{d}\varphi \,,$$

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{n} \overline{A_iA_{i+1}} \,.\, \int_0^{2\pi} [x r_i(\varphi) + 1]\, h_i(\varphi)\, \mathrm{d}\varphi \,,$$

und weiteres Verfahren ist dem obigen ähnlich.

Literatur

[1] *L. Berwald:* Obere Schranken für das isoperimetrische Defizit bei Eilinien und die entsprechenden Grössen bei Eiflächen. Mh. Math. *53* (1949), S. 202—210.
[2] *W. Blaschke:* Kreis und Kugel. Leipzig 1916, Berlin 1956.
[3] *T. Bonnesen:* Les problèmes des isopérimètres et des isépiphanes. Paris 1929.

Výtah

HORNÍ A DOLNÍ ODHADY PRO ISOPERIMETRICKÝ DEFICIT POLYGONÁLNÍ OBÁLKY OSOVĚ SOUMĚRNÝCH KONVEXNÍCH VÁLCOVÝCH PLOCH

ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha

Pro objem V a povrch O tělesa homeomorfního s torem, které je sestaveno z částí konečného počtu osově souměrných konvexních válců, z nichž každé dva sousední mají společnou opěrnou rovinu a polygon vytvořený jejich osami má délku l, platí nerovnosti (2)–(4).

Резюме

ВЕРХНИЕ И НИЖНИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКОГО ДЕФИЦИТА ДЛЯ РЕБРИСТЫХ ОГИБАЮЩИХ, СИММЕТРИЧНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСЕЙ ВЫПУКЛЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

ЗБЫНЕК НАДЕНИК, Прага

Для обьёма V и площади O тела, гомеоморфного с тором, которое составлено из частей конечного числа симметричных относительно осей выпуклых цилиндров, из которых каждые два соседние имеют общую касательную плоскость, причем многоугольник, образованный их осями, имеет длину l, справедливы неравенства (2)–(4).