Časopis pro pěstování matematiky

Václav Alda

О собственных значениях дифференциальных уравнений $Mf = \lambda Nf$. II.

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 90 (1965), No. 2, 134--142

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108259`

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1965

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 90 (1965), Praha

О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ $Mf = \lambda Nf$, II.

ВАЦЛАВ АЛЬДА (Václav Alda), Прага

(Поступило в редакцию 29/XII 1962 г.)

1. Задача найти все собственные значения дифференциального уравнения

$$Mf = \lambda Nf \tag{1}$$

где M, N — дифференциальные операторы порядков, соответственно, $2m, 2n$, при однородных краевых условиях

$$U_1 f = \ldots = U_{2m} f = 0 \tag{2}$$

решена в работах [1] и [2].

Существование и полнота системы собственных элементов, которые там доказаны, типичны для системы собственных элементов симметрических компактных операторов в пространствах Гильберта. Итак, возникает вопрос, возможно ли задачу на собственные значения уравнения (1) свести к задаче на собственные значения симметрических компактных операторов. Это действительно возможно, и мы в следующей работе занимаемся приведением первой задачи ко второй.

Цели можно добиться двумя путями. Первый состоит в том, что уравнение (1) представим в виде

$$M^{-1}Nf = \kappa f,$$

второй заключается в том, что воспользуемся модификацией метода компактных операторов, описанной, например, в [3]. В обоих случаях надо, в основном, доказывать те же утверждения. Мы воспользуемся здесь первым методом, потому что его можно непосредственно применить и в некоторых случаях, когда собственное значение имеется среди краевых условий (как будет видно на примере).

Задача найти собственные значения уравнения (1) была в случае специальных краевых условий решена в [4, стр. 216]. Компактность определенного погружения (которая лежит в основе всего метода) там прямо доказана. Здесь мы применим неравенства Эрлинга [5]; их доказательство содержится в [6].

Далее, в одном месте нам понадобятся утверждения об общем виде само-сопряженного оператора и об его области определения; все необходимое к этому вопросу перенято из [7].

За ценные указания я благодарен д-ру наук Я. КУРЦВЕЙЛЮ.

2. Начнем с предположений и обозначений. Во всей работе рассматривается интервал $\langle 0, 1\rangle$.

α) C^m означает множество функций (принимающих комплексные значения) непрерывных со своими производными до порядка m включительно в $\langle 0, 1\rangle$.

β) Для функции $u \in C^k$ положим

$$|u|_k^2 = \int_0^1 |u^k|^2 \, dx , \quad \|u\|_k^2 = \sum_{l=0}^{k} |u|_l^2$$

и полную оболочку C^k в норме $\|.\|_k$ обозначим через H_k.

Тогда справедливо следующее утверждение (см. [6, стр. 209]):

Для каждой функции $u \in C^m$

$$|u|_k^2 \leqq A_{km} t^{-(1-k/m)}[t|u|_0^2 + |u|_m^2] , \tag{3}$$

где $0 \leqq k \leqq m$ и t достаточно большое.

Из оценки $|u|_k$ вытекает (см. [6, стр. 212]):

для каждой функции $u \in C^m$

$$|u^\nu(x)|^2 \leqq A t^{-[1-(1+2\nu)/2m]} \left[t|u|_0^2 + |u|m^2\right], \tag{4}$$

где $0 \leqq \nu < m$ и t достаточно большое.

Из неравенств (3) и (4) вытекает, что погружение пространства H_m в $H_n (m > n)$ является компактным.

3. Сделаем следующие предположения:

γ) Пусть дифференциальные операторы M, N являются формально само-сопряженным операторами с действительными коэффициентами порядков, соответственно, $2m, 2n, m > n$:

$$Mf = \sum_{\mu=0}^{m} (-1)^\mu (p_\mu f^{(\mu)})^{(\mu)} , \quad Nf = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu (q_\nu f^{(\nu)})^{(\nu)} ,$$

где $p_\mu \in C^\mu$, $q_\nu \in C^\nu$ и $p_m(x) > 0$ для $x \in \langle 0, 1\rangle$.

δ) пусть $U_1 f, \ldots, U_m f$ – лин. однородные формы в $f(0), f(1), \ldots, f^{(2m-1)}(1)$ с действительными коэффициентами.

ε) Обозначим через L множество тех функций $f \in C^{2m}$, которые удовлетворяют краевым условиям

$$U_1 f = \ldots = U_{2m} f = 0 .$$

ζ) Для $f, g \in L$ пусть будет

(5) $$\int_0^1 Mf \,.\, \bar{f}\,\mathrm{d}x > 0 \quad \text{для} \quad f \neq 0\,, \quad \int_0^1 Nf \,.\, \bar{g}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f \,.\, \overline{Ng}\,\mathrm{d}x\,.$$

η) Положим $[f, g] = \int_0^1 Mf \,.\, \bar{g}\,\mathrm{d}x$, $\|f\|_M^2 = \int_0^1 Mf \,.\, \bar{f}\,\mathrm{d}x$ и обозначим через H_M полную оболочку L в этой норме.

4. Из (5) вытекает, что задача

$$Mf = 0\,, \quad U_1 f = \ldots = U_{2m} f = 0$$

имеет только тривиальное решение в L. Из наших предположений о коэффициентах p_μ вытекает существование эрмитовской симметрической функции Грина $G(.,.)$ такой, что для каждого $v \in C^0$ решение задачи

$$Mu = v\,, \quad U_1 u = \ldots = U_{2m} u = 0$$

дано формулой

(6) $$u(x) = \int_0^1 G(x, t)\, v(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

что мы напишем таким образом: $u = Gv$. G можно распространить с C^0 на H_0, причем он останется неотрицательным оператором, вследствие чего существует $G^{\frac{1}{2}}$. Из этого следует, что

(7) $$|u|_0^2 = |Gv|_0^2 = (Gv, Gv) \leqq \|G^{\frac{1}{2}}\|^2\,(Gv, v) = \|G^{\frac{1}{2}}\|^2\,(Mu, u)$$

для произвольного $u \in L$. Поэтому M является на $L \in H_0$ положительно определенной, и пространство H_M является частью H_0, и для нормы в H_M выполнено следующее:

(8) $$\|u\|_M^2 \geqq \|G^{\frac{1}{2}}\|^{-2}\,|u|_0^2\,.$$

5. Краевую задачу найти $f \in L$ так, чтобы выполнялось

$$Mf = \lambda Nf\,, \quad f \neq 0$$

вместе с краевыми условиями

$$U_1 f = \ldots = U_{2m} f = 0$$

мы сведем к другой задаче: Для $f \in C^{2m}$ имеем $Nf = \varphi \in C^0$ и, следовательно,

$$f = \lambda G\varphi = \lambda GNf$$

что напишем в виде

(9) $$Kf = \kappa f\,, \quad \kappa = \lambda^{-1}$$

и будем решать эту задачу.

Для $f, g \in L$ будет $Kf, Kg \in L$ и, следовательно,

$$[Kf, g] = \int_0^1 M(GNf) \,.\, \bar{g} \, \mathrm{d}x = \int_0^1 Nf \,.\, \bar{g} \, \mathrm{d}x = [f, Kg],$$

так что K является на L симметрическим. В дальнейшем мы докажем что K является на L компактным.

6. Сначала сравним нормы $\|f\|_M$ и $\|f\|_m$. Для $f, g \in C^{2m}$ получаем (интегрируя по частям)

$$\int_0^1 Mf \,.\, \bar{g} \mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{\mu=0}^{m} p_\mu f^{(\mu)} \, \overline{g^{(\mu)}} \, \mathrm{d}x + K_1(f, g),$$

$$\int_0^1 f \,.\, Mg \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{\mu=0}^{m} p_\mu f^{(\mu)} \, \overline{g^{(\mu)}} \, \mathrm{d}x + K_2(f, g).$$

При этом $K_1(f, g)$ содержит производные функции $\bar{g}$ самое больше до порядка $m - 1$ и $K_2(f, g)$ содержит производные функции f самое больше до порядка $m - 1$. Для функций $f, g \in L$ оба выражения в левых частях равны и, следовательно,

$$K_1(f, g) = K_2(f, g) = K(f, g).$$

Потому что в C^{2m} мы можем краевые значения (в количестве $4m$) задать произвольно (см. [7, стр. 156]), то $K(f, g)$ зависит, по существу только от производных до порядка $m - 1$ функций $f, \bar{g}$.

Докажем, что это действительно так. Пусть B_1 – билинейное выражение в $\xi_1, \ldots, \xi_k, \eta_1, \ldots, \eta_{2k}$ и B_2 – билинейное выражение в $\xi_1, \ldots, \xi_{2k}, \eta_1, \ldots, \eta_k$. Пусть, далее, задано l линейно независимых форм $L_1(\zeta), \ldots, L_l(\zeta)$ в переменных $\zeta_1, \ldots, \zeta_{2k}$.

Пусть для $L_1(\xi) = \ldots = L_l(\xi) = L_1(\eta) = \ldots = L_l(\eta) = \ldots = 0$ будет $B_1 = B_2 = B$. Тогда B зависит только от $\xi_1, \ldots, \xi_k, \eta_1, \ldots, \eta_k$.

Доказательство. Из переменных $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$ мы выберем те, которые вместе с $L_1(\zeta) = \zeta''_1, \ldots, L_l(\zeta) = \zeta''_l$ образуют максимальную линейно независимую систему; обозначим их через $\zeta'_1, \ldots, \zeta'_\alpha$. Из переменных $\zeta_{k+1}, \ldots, \zeta_{2k}$ присоединим к ним еще $2k - (l + \alpha)$ переменных – обозначим их символами $\zeta'''_1, \ldots, \zeta'''_\beta$ – чтобы получить $2k$ линейно независимых переменных.

Теперь мы выразим ξ при помощи переменных ξ', ξ'', ξ''' и так же η. Подставим в $B_1(\xi, \eta)$ и получим произведения вида $\xi'\eta', \xi''\eta', \xi'\eta'', \xi''\eta'', \xi'\eta'''$ и $\xi''\eta'''$. Если бы там выступало (с отличным от нуля коэффициентом) произведение $\xi'_1\eta'''_\beta$, то значение переменных мы выбрали бы так:

$$\xi'_1 = 1,\ \xi'_2 = \ldots = \xi'''_\beta = 0,\ \eta'_1 = \ldots = \eta'''_{\beta-1} = 0,\ \eta'''_\beta = 1.$$

Справедливо $B_1(\xi, \eta) \neq 0$. Напротив, в B_2 встречаются только переменные

η', η'' и, следовательно, $B_2(\xi, \eta) = 0$. Итак, B содержит действительно только переменные ξ', η' (т. е. $\xi_1, \ldots, \xi_k, \eta_1, \ldots, \eta_k$).

Справедливо равенство

$$\int_0^1 Mf \cdot \bar{f} \, dx = \int_0^1 p_m |f^{(m)}|^2 \, dx + \int_0^1 \sum_{\mu=0}^{m-1} p_\mu |f^{(\mu)}|^2 \, dx + K(f, f),$$

где $\int_0^1 p_m |f^{(m)}|^2 \, dx \geqq k |f|_m^2$ при удобном $k > 0$.

Далее,

$$\int_0^1 \sum_{\mu=0}^{m-1} p_\mu |f^{(\mu)}|^2 \, dx \leqq \sum_{\mu=0}^{m-1} P_\mu |f|_\mu^2, \quad P_\mu = \max_{\nu \geqq x \geqq 1} |p_\mu(x)|$$

и поэтому

$$(Mf, f) \geqq k|f|_m^2 - \sum_{\mu=0}^{m-1} P_\mu |f|_\mu^2 - |K(f, f)|.$$

Для оценки второго члена рассмотрим неравенства (3), для оценки третьего члена – неравенства (4). Если взять в них t достаточно большим, то получим

$$(Mf, f) \geqq \kappa |f|_m^2 - \kappa' |f|_0^2, \tag{10}$$

где $\kappa > 0$, κ' – постоянные.

Это неравенство вместе с неравенством (8) окончательно дает результат

$$(Mf, f) \geqq k'(|f|_m^2 + |f|_0^2).$$

С другой стороны, конечно,

$$(Mf, f) \leqq \sum_{\mu=0}^{m} P_\mu |f|_\mu^2 + |K(f, f)|$$

и, значит, по неравенствам (3) и (4)

$$(Mf, f) \leqq k''(|f|_m^2 + |f|_0^2).$$

Итак, нормы $\|f\|_M$ и $\|f\|_m$ на L эквивалентны. Поэтому H_M является полной оболочкой L в H_m.

Для произвольных функций $f, g \in L$ выполнено

$$[Kf, g] = (Nf, g) = \int_0^1 \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^n (q_\nu f^{(\nu)})^{(\nu)} \bar{g} \, dx = \int_0^1 \sum_{\nu=0}^{n} q_\nu f^{(\nu)} \overline{g^{(\nu)}} \, dx + l(f, g)$$

где $l(f, g)$ – билинейное выражение в краевых значениях функций $f, \bar{g}$, содержащее производные до порядка $n - 1$ (аналогично, как $K(f, g)$). Но это значит, ввиду неравенств (3) и (4), что

$$|(Kf, f)_M| \leqq C \|f\|_n^2.$$

Но из этого опять вытекает, что K является ограниченным оператором из $L \subset H_n$ в $L \subset H_m$.

Однако, метрика H_M на L эквивалентна метрике H_m, причем H_m компактно погружен в H_n. Вследствие этого K представляет собой компактное отображение из L в L, если L рассматривать как часть пространства H_M.

K продолжаем на все H_M. По теореме о собственных значениях симметричных компактных операторов гарантировано существование действительных собственных значений и соответствующей им системы собственных элементов, образующих полную систему в H_M.

Так как

$$Kf_i - \kappa_i f_i = 0\,, \tag{11}$$

то, умножая (в H_M) на произвольный элемент g, получим

$$[Kf_i - \kappa_i f_i, g] = 0\,. \tag{12}$$

Из симметричности и действительности вытекает, что

$$[f_i, Kg - \kappa_i g] = 0\,. \tag{13}$$

Если $g \in L$, то Mg имеет смысл и, следовательно,

$$(f_i, Ng - \kappa_i Mg) = 0\,. \tag{14}$$

Для действительного κ оператор $\kappa M - N$ является действительным (это следствие предположений γ) и δ)), и его, следовательно, можно продоложить на самосопряженный оператор в H_0. Но ([7, стр. 168]) область определения этого самосопряженного продолжения состоит в нашем случае из функций, которые имеют производную $2m$-ого порядка, интегрируемую с квадратом, и удовлетворяют $2m$ краевым условиям (подходящим). Значит, эти условия должны совпадать с условиями

$$U_1 f = \ldots = U_{2m} f = 0\,.$$

Но эти функции принадлежат H_M. Поэтому как соотношение (12), так и (14) будет справедливым для всех функций g из области определения самосопряженного расширения оператора $\kappa_i M - N$.

Из этого следует, что также

$$(\kappa_i M - N) f_i = 0\,.$$

7. Остается исследовать эквивалентность задач (1) и (9). Теперь $\lambda = 0$ не может быть собственным значением задачи (1); это вытекает из неравенства (5). Напротив, $\kappa = 0$ может быть собственным значением задачи (9). Поэтому разложение элемента $f \in H_M$ в ряд Фурье будет иметь следующий вид:

$$f = \sum_{\kappa_i \neq 0} (f, f_i)_M f_i + \varphi\,, \quad (N\varphi, \varphi) = 0 \tag{15}$$

и неравенства для коэффициентов Фурье будут

$$|f|_M^2 \leqq \sum_{\kappa_i \neq 0} |(f, f_i)_M|^2, \quad (Nf, f) = \sum \kappa_i |(f, f_i)_M|^2 .$$

Для того, чтобы в разложении (15) всегда было $\varphi = 0$, достаточно, чтобы N был на L положительно определенным.

Вместо выполнения условия $(Mf, f) > 0$ для $f \neq 0$ можем, следуя Камке, требовать $(Mf, f) \geqq 0$, а если имеет место равенство для $f \neq 0$, то $(Nf, f) > 0$. Достаточно, то есть, уравнение (1) представить в виде

$$(M + N) f = (\lambda + 1) Nf .$$

8. В качестве примера возьмем уравнение, к которому приводит нас исследование поперечных колебаний стержня (см. W. Rayleigh: Theory of Sound, гл. VIII, § 162, уравнения (6) и (7)).

Это уравнение

$$(AV'')'' = \lambda(V - (BV')'), \; A, B \text{ — действительные функции, } A > 0 ,$$

с краевыми условиями

$$((AV'')' + \lambda BV')|_{x=0,1} = 0 ,$$
$$AV''|_{x=0,1} = 0 .$$

Это уравнение $M_0 V = \lambda N V_0$ с краевыми условиями $M_1 V = \lambda N_1 V$, $M_2 V = \lambda N_2 V$, $M_3 V = M_4 V = 0$, что можем переписать в виде

$$MV = \lambda NV \tag{16}$$

где V удовлетворяет краевым условиям $M_3 V = M_4 V = 0$.

Обозначим через $L(L_0)$ множество тех функций, которые имеют непрерывную четвертую производную и выполняют краевые условия $M_3 = M_4 = 0$ $(M_1 = \ldots = M_4 = 0)$.

В L введем скалярное произведение

$$[f, g] = (M_0 f, g) - [(Af'')' \bar{g}]_0^1 .$$

Для f, $g \in L$ будет

$$[f, g] = \int_0^1 (Af'')'' \bar{g} \, dx - [(Af'')' \bar{g}]_0^1 = - \int_0^1 (Af'')' \bar{g}' \, dx =$$
$$= - [Af'' \bar{g}']_0^1 + \int_0^1 Af'' \bar{g}'' \, dx ,$$

что означает (эрмитовскую) симметричность в f, g. Конечно, чтобы для $f \neq 0$

было $[f,f]>0$, мы должны взять в L функции, перпендикулярные к линейным функциям.

Решением задачи

$$M_0 f = \varphi\,, \quad M_1 f = \alpha_1\,, \quad M_2 f = \alpha_2\,, \quad M_3 f = M_4 f = 0$$

является

$$f = M_0^{-1}\varphi + \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2\,,$$

где $M_0^{-1}\varphi$ является решением уравнения $M_0 f = \varphi$ в L_0 и Y_1 (Y_2) является решением однородного уравнения $M_0 Y = 0$ с краевыми условиями $M_1 Y = 1$, $M_2 Y = 0$ $(M_1 Y = 0,\ M_2 Y = 1)$ в L.

Уравнение (16) мы опять представим в виде

$$M^{-1}Nf = \kappa f\,, \quad \kappa = \lambda^{-1}\,.$$

Будет

$$\begin{aligned}
&[M^{-1}Nf, g] = (M_0 M^{-1}Nf, g) - [(A(M^{-1}Nf)'')'\,\bar{g}]_0^1 = \\
&= (M_0\{M_0^{-1}N_0 f + Y_1 N_1 f + Y_2 N_2 f\}, g) - [(A(M_0^{-1}N_0 f + Y_1 N_1 f + Y_2 N_2 f)'')'\,\bar{g}]_0^1 = \\
&= (N_0 f, g) - [(A(Y''N_1 f + Y_2'' N_2 f))'\,\bar{g}]_0^1 = \\
&= \int_0^1 (f - (Bf')'\,\bar{g}\,\mathrm{d}x - B(0)f'(0)\,\bar{g}(0) + B(1)f'(1)\,\overline{g(1)} = \\
&= \int_0^1 f\bar{g}\,\mathrm{d}x - [Bf'\bar{g}]_0^1 + [Bf'\bar{g}]_0^1 + \int_0^1 Bf'\bar{g}'\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (f\bar{g} + Bf'\bar{g}')\,\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}$$

Следовательно, $M^{-1}N$ есть симметрический оператор L. Далее,

$$M^{-1}Nf = M_0^{-1}N_0 f + Y_1 N_1 f + Y_2 N_2 f\,.$$

По предыдущему $M_0^{-1}N_0$ является компактным оператором (а именно, из полной оболочки линейного пространства L в метрике пространства H_2 в полную оболочку пространства L_0 в той же метрике. Так как $N_1 f$, $N_2 f$ — ограниченные функционалы в H_2 (что следует из неравенства (4)) и Y_1, $Y_2 \in L$, то $M^{-1}Nf$ является компактным оператором из L в L.

Итак, опять обеспечено существование действительных собственных значений с достаточным количеством собственных функций. Для наименьшего собственного значения выполнено соотношение

$$\lambda_1 = \inf_f \frac{\displaystyle\int_0^1 A|f''(x)|^2\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^1 (|f(x)|^2 + B|f'(x)|^2)\,\mathrm{d}x}\,,$$

где $Af''(0) = Af''(1) = 0$ и f перпендикулярна к линейной функции.

Литература

[1] *Kamke E.*: Definite selbstadjungierte Eigenwertaufgaben II. Math. Zeitschrift *46* (1940), 231—250.
[2] *Kamke E.*: Definite selbstadjungierte Eigenwertaufgaben III. Math. Zeitschrift *46* (1940), 251—286.
[3] *Михлин С. Г.*: Проблема минимума квадратичного функционала. Москва 1952 г.
[4] *Михлин С. Г.*: Вариационные методы в математической физике. Москва 1957 г.
[5] *Ehrling G.*: On a type of eigenvalue problems for certain elliptic differential operators. Math. Scand. *2* (1954), 267—285.
[6] *Maurin Kr.*: Metody przestrzeni Hilberta. Warszawa 1959.
[7] *Наймарк М. А.*: Линейные дифференциальные операторы. Москва 1954 г.

Výtah

O VLASTNÍCH HODNOTÁCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC $Mf + \lambda Nf$, II.

VÁCLAV ALDA, Praha

V práci je řešena úloha nalézt vlastní hodnoty diferenciální rovnice $Mf = \lambda Nf$ převedením na úlohu o vlastních hodnotách kompaktního symetrického operátoru v Hilbertově prostoru.

Nejdůležitější předpoklady jsou:

M jsou formálně samodjungovaný positivní operátor, jehož řád je alespoň o 2 větší řádu formálně samoadjungovaného operátoru *N*.

Summary

ON THE EIGENVALUES OF DIFFERENTIAL EQUATIONS $Mf = \lambda Nf$, II.

VÁCLAV ALDA, Praha

In this article there is solved the problem of finding the eigenvalues of the differential equation $Mf = \lambda Nf$ by reducing it to the problem concerning the eigenvalues of a compact symmetric operator in Hilbert space.

The major assumptions are:

M is a formally selfadjoint positive operator, whose order exceeds the order of the formally selfadjoint operator *N* by 2 at least.