Zbyněk Šidák

O použití ergodických vět pro Markovovy řetězce

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 90 (1965), No. 2, 200--208

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108252`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 90 (1965), Praha

O POUŽITÍ ERGODICKÝCH VĚT PRO MARKOVOVY ŘETĚZCE

ZBYNĚK ŠIDÁK, Praha

(Došlo dne 13. dubna 1964)

Známé ergodické věty pro operátory v prostorech L_p jsou aplikovány na Markovovy řetězce v diskrétním čase, s obecným systémem stavů a se subinvariantní mírou. Pomocí toho se ukazuje, že v irreducibilním řetězci limitní chování pravděpodobností přechodu $p^{(n)}(x, E)$ je stejné pro všechny stavy x a všechny množiny E konečné kladné míry. Nakonec se uvádí pro spočetné řetězce jednoduchý důkaz Doeblinovy věty o limitě podílu součtů pravděpodobností přechodu.

1. ÚVOD

Mějme Markovův řetězec v diskrétním čase a s obecným systémem stavů X, v němž je dána nějaká σ-algebra $\mathscr{X}$; o podmnožinách $E \subset X$ a o funkcích f na X, o nichž budeme hovořit, budeme vždy v dalším mlčky předpokládat, že $E \in \mathscr{X}$ a že f jsou měřitelné vzhledem k $\mathscr{X}$. Označme $p^{(n)}(x, E)$ pravděpodobnost přechodu ze stavu x do množiny E po n krocích a jako obvykle též pišme $p(x, E) = p^{(1)}(x, E)$.

Dále budeme stále předpokládat, že pro tento Markovův řetězec je dána nějaká pevná subinvariantní míra μ, to jest nezáporná σ-aditivní míra (která může být nekonečná a obecně nemusí být ani σ-konečná) na $\mathscr{X}$ taková, že pro každou $E \in \mathscr{X}$ platí

$$\int_X p(x, E)\, \mu(\mathrm{d}x) \leqq \mu(E)\,. \tag{1}$$

Symbolem $L_p(\mu)$ (pro $1 \leqq p < \infty$) označíme Banachův prostor všech funkcí f na X takových, že $\|f\|_p = [\int_X |f(x)|^p \mu(\mathrm{d}x)]^{1/p} < \infty$, přičemž $\|f\|_p$ je norma funkce f. Podobně symbolem $L_\infty(\mu)$ označíme Banachův prostor všech v podstatě (vzhledem k μ) ohraničených funkcí f na X, přičemž norma jest $\|f\|_\infty = \underset{\mu \quad X}{\text{vrai sup}}\, |f(x)|$.

Daný Markovův řetězec nazveme irreducibilním (podle E. NELSONA [7]), jestliže míry $\nu_x(.) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} p^{(n)}(x, .)$ jsou pro všechna $x \in X$ ekvivalentní, tj. mají stejné nulové množiny. Jestliže irreducibilní řetězec má nějakou subinvariatní σ-konečnou míru λ, pak podle věty 3.3 v E. Nelsonovi [7]existuje pro něj také subinvariantní σ-konečná míra μ, jež je ekvivalentní každé míře ν_x. Proto v dalších našich větách o irreducibilních řetězcích není na újmu obecnosti předpoklad, že μ má tuto vlastnost.

Uveďme konečně zhruba obsah článku: Nejprve jsou známé novější ergodické věty pro operátory v prostorech $L_p(\mu)$ aplikovány na Markovovy řetězce. Pomocí toho pak jsou odvozeny věty o podobnosti limitního chování součtů a průměrů pravděpodobností přechodu; zejména pro irreducibilní řetězce se zjišťuje, že toto limitní chování $p^{(n)}(x, E)$ je stejné pro všechny (resp. skoro všechny) stavy $x \in X$ a všechny množiny E konečné kladné míry. Konečně pro řetězec se spočetným systémem stavů se uvádí jednoduchý důkaz známé Doeblinovy věty o existenci limity $\sum_{m=0}^{n} p_{ij}^{(m)} / \sum_{m=0}^{n} p_{kl}^{(m)}$.

Použití ergodických vět je ovšem bezprostřední a celkem triviální; avšak jejich důsledky o ekvivalenci limitního chování $p^{(n)}(x, E)$ v irreducibilních řetězcích se nezdají být bez zajímavosti. Podávají totiž pro obecné Markovovy řetězce se subinvariantní mírou zobecnění známého klasického výsledku o tom, že ve spočetném irreducibilním řetězci všechny stavy jsou téhož typu (positivně rekurentní, nulově rekurentní nebo transientní).

2. ERGODICKÉ VĚTY

Nejprve ještě uveďme následující známý fakt. Jestliže pro $f \in L_p(\mu)$ $(1 \leqq p \leqq \infty)$ definujeme zobrazení T vzorcem

$$Tf = \int_X f(y)\, p(., \mathrm{d}y), \tag{2}$$

pak podle věty 3.1 v E. Nelsonovi [7] T je lineární spojitý operátor v prostoru $L_p(\mu)$ (pro $1 \leqq p \leqq \infty$) s normou $\|T\|_p \leqq 1$. Snadno se také vidí, že pro každé $m = 1, 2, 3, \ldots$ máme

$$T^m f = \int_X f(y)\, p^{(m)}(., \mathrm{d}y). \tag{3}$$

Věta 1. (a) *Jestliže $f \in L_p(\mu)$ (pro $1 \leqq p < \infty$), pak pro μ-skoro všechna $x \in X$ existuje limita*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \int_X f(y)\, p^{(m)}(x, \mathrm{d}y). \tag{4}$$

(b) *Speciálně jestliže pro množinu F jest $\mu(F) < \infty$, pak pro μ-skoro všechna $x \in X$ existuje limita*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} p^{(m)}(x, F). \tag{5}$$

Důkaz. Věta vyplývá ihned z individuální ergodické věty VIII.6.6 v knize N. Dunforda a J. T. Schwartze [3] a z vlastností operátoru T. Tvrzení (b) dostaneme, když za f položíme charakteristickou funkci množiny F.

Poznamenejme, že věta 1 je obdobou věty 1 (b) v článku J. L. DOOBA [2], který se však zabýval mnohem speciálnějším případem μ konečné a invariantní.

Věta 2. (*a*) *Jestliže* $f, g \in L_1(\mu)$, *přičemž* $g \geqq 0$, *pak pro* μ*-skoro všechna* x *z množiny* $\{x; \int_X g(y)\, p^{(m)}(x, \mathrm{d}y) > 0$ *pro nějaké* $m\}$ *existuje konečná limita*

$$\lim_{n \to \infty} \left[\sum_{m=0}^{n} \int_X f(y)\, p^{(m)}(x, \mathrm{d}y) / \sum_{m=0}^{n} \int_X g(y)\, p^{(m)}(x, \mathrm{d}y) \right]. \tag{6}$$

(*b*) *Speciálně jestliže pro množiny* F, G *máme* $\mu(F) < \infty$, $\mu(G) < \infty$, *pak pro* μ*-skoro všechna* x *z množiny* $\{x; p^{(m)}(x, G) > 0$ *pro nějaké* $m\}$ *existuje konečná limita*

$$\lim_{n \to \infty} \left[\sum_{m=0}^{n} p^{(m)}(x, F) / \sum_{m=0}^{n} p^{(m)}(x, G) \right]. \tag{7}$$

(*c*) *Nechť řetězec je irreducibilní a nechť* σ*-konečná subinvariantní míra* μ *je ekvivalentní každé míře* ν_x. *Jestliže pro množiny* F, G *máme* $\mu(F) < \infty$, $0 < \mu(G) < \infty$, *pak pro* μ*-skoro všechna* $x \in X$ *existuje konečná limita* (7).

Důkaz. Tvrzení (a) je zřejmým důsledkem obecné ergodické věty, dokázané R. V. CHACONEM a D. S. ORNSTEINEM v [4]. Tvrzení (*b*) se opět dostane tak, že za f, resp. g, položíme charakteristické funkce F, resp. G. Pro důkaz (*c*) stačí si uvědomit, že $\mu(G) > 0$ implikuje $\nu_x(G) > 0$ pro každé x, takže pro každé x existuje m takové, že $p^{(m)}(x, G) > 0$, a tudíž $\{x; p^{(m)}(x, G) > 0$ pro nějaké $m\} = X$.

Věta 3. (*a*) *Jestliže* $f \in L_p(\mu)$ (*pro* $1 < p < \infty$), *pak limita* (4) *existuje ve smyslu silné konvergence funkcí v* $L_p(\mu)$.

(*b*) *Jestliže* $f \in L_1(\mu)$, *přičemž* $\mu(X) < \infty$, *pak limita* (4) *existuje ve smyslu silné konvergence funkcí v* $L_1(\mu)$.

Důkaz. Věta vyplývá snadno z vlastností operátoru T v prostorech $L_p(\mu)$ a ze statistických ergodických vět VIII. 5.4, resp. VIII. 5.5, v knize N. Dunforda a J. T. Schwartze [3].

Samozřejmě také věta 3 dává zřejmým způsobem silnou konvergenci průměru v (5) pro množinu F konečné míry. Věta je opět obecnější obdobou věty 1(a) J. L. Dooba [2].

3. LIMITNÍ CHOVÁNÍ PRAVDĚPODOBNOSTÍ PŘECHODU

Věta 4. *Nechť množina* F *má míru* $\mu(F) < \infty$; *nechť množiny* A, B *jsou takové, že pro* $x \in A$ *platí* $\sum_{m=0}^{m} p^{(m)}(x, F) = \infty$, *pro* $x \in B$ *platí* $0 < \sum_{m=0}^{\infty} p^{(m)}(x, F) < \infty$. *Jestliže* G *je libovolná množina s mírou* $\mu(G) < \infty$ *a označíme-li* $K = \{x; p^{(m)}(x, G) > 0$ *pro nějaké* $m\}$, *pak pro* μ*-skoro všechna* $x \in A \cap K$ *platí* $\sum_{m=0}^{\infty} p^{(m)}(x, G) = \infty$ *a pro* μ*-skoro všechna* $x \in B \cap K$ *platí* $0 < \sum_{m=0}^{\infty} p^{(m)}(x, G) < \infty$.

Důkaz. Kdyby vyslovené první tvrzení neplatilo pro μ-skoro všechna $x \in A \cap K$, pak by existovala podmnožina $A \cap K$ kladné míry, pro jejíž prvky x by bylo $\sum_{m=0}^{\infty} p^{(m)}(x, G) < \infty$, $\sum_{m=0}^{\infty} p^{(m)}(x, F) = \infty$. Na této podmnožině by pak limita (7) byla nekonečná, což odporuje větě 2(b). Obdobně kdyby druhé tvrzení věty nebylo pravdivé pro μ-skoro všechna $x \in B \cap K$, pak by existovala podmnožina $B \cap K$ kladné míry, pro jejíž prvky x by bylo

$$\lim_{n \to \infty} \left[\sum_{m=0}^{n} p^{(m)}(x, G) / \sum_{m=0}^{n} p^{(m)}(x, F) \right] = \infty$$

což opět odporuje větě 2(b).

Věta 5. *Nechť řetězec je irreducibilní a nechť σ-konečná subinvariantní μ je ekvivalentní každé v_x. Nechť pro množinu F platí $0 < \mu(F) < \infty$ a označme $A = \{x; \sum_{m=0}^{\infty} p^{(m)}(x, F) = \infty\}$.*

(*a*) *Jestliže $\mu(A) > 0$, pak pro každou množinu G, pro niž $0 < \mu(G)$, a pro každé $x \in X$ platí*

$$\sum_{m=0}^{\infty} p^{(m)}(x, G) = \infty . \tag{8}$$

(*b*) *Jestliže $\mu(A) = 0$, pak pro každou množinu G, pro niž $0 < \mu(G) < \infty$, a pro μ-skoro všechna $x \in X$ platí*

$$\sum_{m=0}^{\infty} p^{(m)}(x, G) < \infty . \tag{9}$$

Důkaz. Předně si uvědomme jako v důkazu věty 2(c), že z našich předpokladů vyplývá $\{x; p^{(m)}(x, F) > 0 \text{ pro nějaké } m\} = \{x; p^{(m)}(x, G) > 0 \text{ pro nějaké } m\} = X$.

Pro důkaz (*a*) se zabývejme nejprve speciálním případem $\mu(G) < \infty$. Podle věty 4 pak pro μ-skoro všechna $x \in A$ platí (8), neboť $K = X$. Jinými slovy, existuje množina $A_1 \subset A$ taková, že $\mu(A - A_1) = 0$, $\mu(A_1) = \mu(A) > 0$ a pro všechna $x \in A_1$ platí (8). Pro každé $x \in X$ potom však musí být též $v_x(A_1) > 0$, takže existuje k, pro něž $p^{(k)}(x, A_1) > 0$. Poněvadž pro nezáporné funkce je záměna sumace a integrálu dovolena, dostáváme pro každé $x \in X$

$$\sum_{m=0}^{\infty} p^{(m+k)}(x, G) = \sum_{m=0}^{\infty} \int_X p^{(m)}(y, G)\, p^{(k)}(x, \mathrm{d}y) \geqq \sum_{m=0}^{\infty} \int_{A_1} p^{(m)}(y, G)\, p^{(k)}(x, \mathrm{d}y) = \infty ,$$

čímž je (8) dokázáno pro řečený speciální případ. Jestliže $\mu(G) = \infty$, pak ze σ-konečnosti μ vyplývá existence $G_1 \subset G$, pro niž $0 < \mu(G_1) < \infty$, a vzhledem k předchozímu případu

$$\sum_{m=0}^{\infty} p^{(m)}(x, G) \geqq \sum_{m=0}^{\infty} p^{(m)}(x, G_1) = \infty .$$

Jestliže nastává případ (b), to jest $\mu(A) = 0$, položme $B = X - A$; pak pro $x \in B$ platí $\sum_{m=0}^{\infty} p^{(m)}(x, F) < \infty$ a zřejmě tento součet je také kladný. Podle věty 4 pak platí (9) pro μ-skoro všechna $x \in B$, to jest pro μ-skoro všechna $x \in X$.

Poznamenejme, že naše věta 5(a) zobecňuje charakterisaci rekurentních řetězců uvedenou E. Nelsonem [7]. Nelson ve větě 4.1 dokázal, že irreducibilní řetězec je rekurentní tehdy a jen tehdy, když pro všechny množiny G, pro něž $0 < \mu(G)$, a pro všechna $x \in X$ platí (8). Naproti tomu naše věta 5(a) ukazuje, že k rekurentnosti řetězce stačí již, aby existovala jedna množina F, pro niž $0 < \mu(F) < \infty$ a $\sum_{m=0}^{\infty} p^{(m)}(x, F) = \infty$ pro x na nějaké množině kladné míry.

Snad je též dobře ještě podotknout, že ve větách 4, 5(b) a 6 v tvrzeních platných *„pro μ-skoro všechna x"* výjimečná množina nulové míry, na níž tvrzení neplatí, obecně závisí na uvažované množině G.

Věta 6. *Nechť množina F má míru $\mu(F) < \infty$; nechť množiny A, B jsou takové, že pro $x \in A$ jest $\lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{m=0}^{n-1} p^{(m)}(x, F) > 0$, pro $x \in B$ jest $\lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{m=0}^{n-1} p^{(m)}(x, F) = 0$, a označme $L = \{x;\ p^{(m)}(x, F) > 0$ pro nějaké $m\}$. Jestliže G je libovolná množina s mírou $\mu(G) < \infty$ a označíme-li dále $K = \{x;\ p^{(m)}(x, G) > 0$ pro nějaké $m\}$, pak pro μ-skoro všechna $x \in A \cap K$ bude $\lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{m=0}^{n-1} p^{(m)}(x, G) > 0$, pro μ-skoro všechna $x \in B \cap L$ bude $\lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{m=0}^{n-1} p^{(m)}(x, G) = 0$.*

Důkaz. Věta se dokáže úplně podobně jako věta 4; musíme ovšem mít na paměti, že podle věty 1(b) existuje μ-skoro všude limita (5) a obdobně pro výrazy s G místo F. Kdyby první tvrzení věty 6 neplatilo, pak by existovala podmnožina $A \cap K$ kladné míry, pro jejíž prvky x by bylo $\lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{m=0}^{n-1} p^{(m)}(x, G) = 0$, tedy

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} p^{(m)}(x, F) \Big/ \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} p^{(m)}(x, G) \right] = \infty ,$$

což je spor s větou 2(b). Druhé tvrzení věty 6 se dokáže zcela obdobně.

Věta 7. *Nechť řetězec je irreducibilní a nechť σ-konečná subinvariantní míra μ je ekvivalentní každé ν_x. Nechť pro množinu F jest $0 < \mu(F) < \infty$ a označme $A = \{x; \lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{m=0}^{n-1} p^{(m)}(x, F) > 0\}$.*

(*a*) *Jestliže $\mu(A) > 0$, pak pro každou množinu G, pro niž $0 < \mu(G)$, a pro každé $x \in X$ platí*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} p^{(m)}(x, G) > 0 . \tag{10}$$

(b) Jestliže $\mu(A) = 0$, pak pro každou množinu G, pro niž $0 < \mu(G) < \infty$, a pro každé $x \in X$ platí

$$(11) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} p^{(m)}(x, G) = 0\,.$$

V tomto případě (b) jest $\mu(X) = \infty$.

Důkaz je vcelku podobný jako důkaz věty 5. Pro důkaz tvrzení (a) začněme opět s případem $\mu(G) < \infty$. Podle věty 6 pro μ-skoro všechna $x \in A$ platí (10); tedy existuje množina $A_1 \subset A$ taková, že $\mu(A_1) = \mu(A) > 0$ a pro všechna $x \in A_1$ platí (10). Avšak pro každé $x \in X$ potom $v_x(A_1) > 0$, takže existuje k, pro něž $p^{(k)}(x, A_1) > 0$. Poněvadž funkce $n^{-1} \sum_{m=0}^{n-1} p^{(m)}(., G)$ mají majorantu 1 integrovatelnou vzhledem k míře $p^{(k)}(x, .)$, dostáváme pro každé $x \in X$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} p^{(m+k)}(x, G) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \int_X p^{(m)}(y, G)\, p^{(k)}(x, \mathrm{d}y) \geqq$$

$$\geqq \lim_{n\to\infty} \int_{A_1} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} p^{(m)}(y, G)\, p^{(k)}(x, \mathrm{d}y) = \int_{A_1} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} p^{(m)}(y, G)\, p^{(k)}(x, \mathrm{d}y) > 0\,.$$

Zřejmě však

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} p^{(m+k)}(x, G) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left[\sum_{m=0}^{k+n-1} p^{(m)}(x, G) - \sum_{m=0}^{k-1} p^{(m)}(x, G) \right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{k+n-1} p^{(m)}(x, G) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} p^{(m)}(x, G)\,,$$

takže tvrzení (10) je dokázáno při předpokladu $\mu(G) < \infty$. Případ $\mu(G) = \infty$ se rozřeší opět obdobně jako v důkazu věty 5(a).

Jestliže nastává případ (b), tedy $\mu(A) = 0$, pak zřejmě vzhledem k větě 1(b) pro μ-skoro všechna $x \in X$ jest $\lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{m=0}^{n-1} p^{(m)}(x, F) = 0$. Tudíž podle věty 6 také pro μ-skoro všechna $x \in X$ platí (11); jinak řečeno, existuje množina A_0 taková, že $\mu(X - A_0) = 0$ a pro všechna $x \in A_0$ platí (11). Z toho však vyplývá pro každé $x \in X$ rovněž $v_x(X - A_0) = 0$, tedy $p(x, X - A_0) = 0$. Proto dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} p^{(m)}(x, G) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} p^{(m+1)}(x, G) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_X \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} p^{(m)}(y, G)\, p(x, \mathrm{d}y) = \int_{A_0} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} p^{(m)}(y, G)\, p(x, \mathrm{d}y) = 0\,,$$

čímž je (11) dokázáno. Pro důkaz posledního tvrzení předpokládejme, že by bylo naopak $\mu(X) < \infty$. Potom by platilo (11) pro $G = X$. Máme však $p^{(m)}(x, X) = 1$, čili $1/n \sum_{m=0}^{n-1} p^{(m)}(x, X) \Rightarrow 1$, což je spor s (11).

4. DOEBLINOVA LIMITNÍ VĚTA PRO SPOČETNÉ ŘETĚZCE

V tomto paragrafu budeme se zabývat Markovovými řetězci se spočetným systémem stavů. Budeme proto používat obvyklého označení $p_{jk}^{(n)}$ pro pravděpodobnost přechodu ze stavu j do stavu k po n krocích. Ve shodě s tím naše dřívější základní definice se nyní přepíší takto: jestliže míru jednobodové množiny $\{k\}$ označíme $\mu_k = \mu(\{k\})$, pak subinvariantní míra μ je taková, že

$$\sum_{j \in X} p_{jk}\mu_j \leqq \mu_k \tag{1'}$$

pro každé $k \in X$; jestliže hodnotu funkce f v bodě k označíme f_k, pak zobrazení T je definováno vzorcem

$$(Tf)_j = \sum_{k \in X} f_k p_{jk} \tag{2'}$$

pro každé $j \in X$, atd.

Následující věta byla poprvé dokázána W. DOEBLINEM [1]; později jednodušší důkaz (s určením limity) podal K. L. CHUNG [5]. Zde chceme ukázat jiný velice jednoduchý důkaz na základě Chacon-Ornsteinovy ergodické věty.

Věta 8. *Budiž dán irreducibilní Markovův řetězec se spočetným systémem stavů. Pak pro každou čtveřici stavů i, j, k, l existuje konečná kladná limita*

$$\lim_{n \to \infty} \left[\sum_{m=0}^{n} p_{ij}^{(m)} / \sum_{m=0}^{n} p_{kl}^{(m)} \right].$$

Důkaz. Předně, jak ukázal D. G. KENDALL [6], pro každý irreducibilní řetězec existuje subinvariantní míra μ, pro niž $0 < \mu_k < \infty$ pro každé $k \in X$. Dále je známo (viz E. Nelson [7] nebo odvození za definicí 3 v [8]), že zobrazení T je lineárním spojitým operátorem v $L_1(\mu)$ s normou $\|T\|_1 \leqq 1$. Označíme-li nyní $\chi^{(j)}$ charakteristickou funkci jednobodové množiny $\{j\}$, podle ergodické věty Chacona-Ornsteina [4] existuje konečná limita

$$\lim_{n \to \infty} \left[\sum_{m=0}^{n} (T^m \chi^{(j)})_i / \sum_{m=0}^{n} (T^m \chi^{(l)})_i \right] = \lim_{n \to \infty} \left[\sum_{m=0}^{n} p_{ij}^{(m)} / \sum_{m=0}^{n} p_{il}^{(m)} \right] \tag{12}$$

pro každé $i \in X$, neboť z irreducibility řetězce vyplývá, že pro každé $i \in X$ existuje nějaké m přirozené takové, že $(T^m \chi^{(l)})_i = p_{il}^{(m)} > 0$. Je ihned vidět, že můžeme zaměnit $\chi^{(j)}$ a $\chi^{(l)}$, takže existuje též konečná limita převráceného zlomku v (12); to znamená, že limita (12) je konečná kladná.

Podobně můžeme definovat zobrazení R vzorcem

$$(Rf)_k = \sum_{j \in X} f_j p_{jk} \mu_j \mu_k^{-1} \,;$$

snadno se ukáže (nebo viz větu 2 v článku [8], kde toto zobrazení je označeno T_∞^+) že R je rovněž lineárním spojitým operátorem v $L_1(\mu)$ s normou $\|R\|_1 \leqq 1$. Zcela stejně jako v předchozím dostáváme nyní existenci konečné kladné limity

$$(13) \qquad \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{m=0}^{n} (R^m \chi^{(i)})_l / \sum_{m=0}^{n} (R^m \chi^{(k)})_l \right] = \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{m=0}^{n} p_{il}^{(m)} \mu_i \mu_l^{-1} / \sum_{m=0}^{n} p_{kl}^{(m)} \mu_k \mu_l^{-1} \right]$$

pro každé $l \in X$. Vynásobením limit (12) a (13) již ihned vyplývá tvrzení naší věty 8.

Literatura

[1] *W. Doeblin:* Sur deux problèmes de M. Kolmogoroff concernant les chaînes dénombrables. Bull. Soc. Math. France *66* (1938), 210—220.

[2] *J. L. Doob:* Asymptotic properties of Markoff transition probabilities. Trans. Amer. Math. Soc. *63* (1948), 393—421.

[3] *N. Dunford, J. T. Schwartz:* Linear operators I. Interscience Publishers, New York, London 1958.

[4] *R. V. Chacon, D. S. Ornstein:* A general ergodic theorem. Illinois J. Math. *4* (1960), 153—160.

[5] *K. L. Chung:* Contributions to the theory of Markov chains. J. Res. Nat. Bureau Stand. *50* (1953), 203—208.

[6] *D. G. Kendall:* Unitary dilations of Markov transition operators, and the corresponding integral representations for transition-probability matrices. Probability & Statistics, Harald Cramér Volume, New York 1959, 139—161.

[7] *E. Nelson:* The adjoint Markoff process. Duke Math. J. *25* (1958), 671—690.

[8] *Z. Šidák:* Některé věty a příklady z teorie operátorů ve spočetných Markovových řetězcích. Čas. pěst. mat. *88* (1963), 457—478.

Резюме

О ПРИМЕНЕНИИ ЭРГОДИЧЕСКИХ ТЕОРЕМ ДЛЯ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

ЗБЫНЕК ШИДАК (Zbyněk Šidák), Прага

Рассматривается цепь Маркова в дискретном времени, с произвольной системой состояний X и вероятностями перехода $p^{(n)}(x, E)$, для которой задана некоторая субинвариантная мера μ.

Эргодические теоремы для операторов в пространствах L_p из [3] и [4] применяются для доказательств существования пределов (4), (5), (6) и (7).

С помощью теоремы из [4] доказаны следующие утверждения (обобщения классического результата, что в счетной неприводимой цепи все состояния принадлежат одному и тому же типу — положительному возвратному, нулевому возвратному или невозвратному): Если цепь неприводима и σ-конечная μ эквивалентна каждой мере $\nu_x = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} p^{(n)}(x, .)$, то *одновременно для всех* состояний $x \in X$ и *всех* множеств G с $0 < \mu(G) < \infty$ выполняется или $\sum_{m=0}^{\infty} p^{(m)}(x, G) = \infty$ или $\sum_{m=0}^{\infty} p^{(m)}(x, G) < \infty$ (последнее неравенство для μ-почти всех $x \in X$); далее, или $\lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{m=0}^{n-1} p^{(m)}(x, G) > 0$ или $\lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{m=0}^{n-1} p^{(m)}(x, G) = 0$.

Наконец, на основании теоремы из [4] приводится простое доказательство теоремы Деблина [1] для цепей со счетной системой состояний о существовании конечного положительного предела $\lim_{n\to\infty} [\sum_{m=0}^{n} p_{ij}^{(m)} / \sum_{m=0}^{n} p_{kl}^{(m)}]$.

Summary

ON THE USE OF ERGODIC THEOREMS FOR MARKOV CHAINS

ZBYNĚK ŠIDÁK, Praha

Let us have a Markov chain in discrete time, with a general state space X and transition probabilities $p^{(n)}(x, E)$, naving some sub-invariant measure μ.

Ergodic theorems for operators in L_p-spaces from [3] and [4] are used for proving existence of the limits (4), (5), (6) and (7).

With the aid of the theorem in [4] the following assertions are proved (generalizations of a classical result that in a denumerable irreducible chain all states belong to the same type — either positive-recurrent, or null-recurrent, or transient): If the chain is irreducible and a σ-finite μ equivalent to each measure $\nu_x = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} p^{(n)}(x, .)$, then *simultaneously for all* states $x \in X$ and *all* sets G with $0 < \mu(G) < \infty$ either $\sum_{m=0}^{\infty} p^{(m)}(x, G) = \infty$ or $\sum_{m=0}^{\infty} p^{(m)}(x, G) < \infty$ (the last inequality only for μ-almost all $x \in X$); furthermore either $\lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{m=0}^{n-1} p^{(m)}(x, G) > 0$ or $\lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{m=0}^{n-1} p^{(m)}(x, G) = 0$.

Finally, on the basis of the theorem in [4] a simple proof of Doeblin's theorem in [1] is presented concerning the existence of a finite positive limit $\lim_{n\to\infty} [\sum_{m=0}^{n} p_{ij}^{(m)} / \sum_{m=0}^{n} p_{kl}^{(m)}]$ for chains with a denumerable state space.