Zbyněk Nádeník

Die Verschärfung einer Ungleichung von Frobenius für den gemischten Flächeninhalt der konvexen ebenen Bereiche

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 90 (1965), No. 2, 220--225

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108250`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 90 (1965), Praha

DIE VERSCHÄRFUNG EINER UNGLEICHUNG VON FROBENIUS FÜR DEN GEMISCHTEN FLÄCHENINHALT DER KONVEXEN EBENEN BEREICHE

ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha

(Eingelangt am 9. Juni 1964)

Es seien $\mathscr{B}_1$ und $\mathscr{B}_2$ zwei konvexe Bereiche in derselben Ebene, F_1 und F_2 ihre Flächeninhalte, M ihr gemischter Flächeninhalt, L_1 und L_2 ihre Umfänge, B_1 und B_2 ihre Breiten in derselben Richtung φ. Die Funktionale M, F_1, F_2 genügen der Ungleichung von H. BRUNN und H. MINKOWSKI

$$\text{(B – M)} \qquad M^2 - F_1F_2 \geqq 0\,,$$

in der das Gleichheitszeichen dann und nur dann gilt, wenn die Bereiche $\mathscr{B}_1$ und $\mathscr{B}_2$ homothetisch sind.

Es sei $\mathscr{B}_3$ ein konvexer Bereich mit dem Flächeninhalt F_3 in der Ebene der Bereiche $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$ und F_{13} bzw. F_{23} der gemischte Flächeninhalt der Bereiche $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_3$ bzw. $\mathscr{B}_2, \mathscr{B}_3$. Von G. FROBENIUS [9] ist folgende Verschärfung der Ungleichung (B – M) angegeben worden:

$$-\frac{F_1}{F_{13}^2} + \frac{2M}{F_{13}F_{23}} - \frac{F_2}{F_{23}^2} \geqq \frac{F_3}{F_{13}^2F_{23}^2}(M^2 - F_1F_2)$$

(vgl. [5], S. 98). Ist $\mathscr{B}_3$ der Einheitskreis, so folgt daraus die Frobeniussche Ungleichung

$$\text{(F)} \qquad -\frac{F_1}{L_1^2} + \frac{2M}{L_1L_2} - \frac{F_2}{L_2^2} \geqq 0\,;$$

das Gleichheitszeichen gilt in (F) wieder dann und nur dann, wenn die Bereiche $\mathscr{B}_1$ und $\mathscr{B}_2$ homothetisch sind (vgl. [3], S. 40–42 und [4], S. 91).

G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD und G. PÓLYA [10], S. 185, und elementarer A. DINGHAS [6], S. 5–7, haben eine Identität bewiesen, welche in der Formulation aus [6] folgends lautet: Ist $g(\varphi)$ eine im Intervall $\langle 0, \pi \rangle$ stetige Funktion, die dort stückweise stetige Ableitung $g'(\varphi)$ besitzt, und ist noch $g(0) = g(\pi) = 0$, dann ist

$$\text{(H-L-P)} \qquad \int_0^\pi [g'^2(\varphi) - g^2(\varphi)]\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^\pi [g'(\varphi) - g(\varphi)\operatorname{cotg}\varphi]^2\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Aus dieser Identität kann man auch das Lemma von W. WIRTINGER ableiten (s. [10], S. 185, 186); sein unmittelbarer Beweis ist auf der Vollständigkeitsrelation des trigonometrischen Fundamentalsystems gegründet (s. [2], S. 105, 106). Aus dem Lemma von Wirtinger hat dann W. BLASCHKE in [2], S. 105–107, auf eine sehr einfache Weise die Ungleichung (F) gewonnen.

A. Dinghas [7], S. 13–15, hat die Ungleichung (B-M) mittels der Identität (H-L-P) abgeleitet; in seinem Beweise ist implizit auch die Ungleichung

$$\text{(D)} \qquad -\frac{F_1}{L_1^2} + \frac{2M}{L_1 L_2} - \frac{F_2}{L_2^2} \geqq \frac{\pi}{4}\left(\frac{B_1}{L_1} - \frac{B_2}{L_2}\right)^2$$

für die Bereiche $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$, deren Stützfunktionen stückweise glatt sind, enthalten (s. (5.11) in [7]); zur allgemeinen Gültigkeit von (D) führt dann der bekannte Grenzübergang. Die Frage, für welche Bereiche $\mathscr{B}_1$ und $\mathscr{B}_2$ das Gleichheitszeichen in (D) gilt, ist unentschieden geblieben.

Im Folgenden beweisen wir die Ungleichung (D) direkt für beliebige konvexe Bereiche $\mathscr{B}_1$ und $\mathscr{B}_2$ zusammen mit der Feststellung, wann in (D) das Gleichheitszeichen gilt, und zwar auf Grunde des folgendermassen verschärften Lemmas von Wirtinger:

Es sei $f(\varphi)$ eine stetige Funktion mit der Periode 2π, welche durchwegs die symmetrische Ableitung $f^{\cdot}(\varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0} [f(\varphi + \varepsilon) - f(\varphi - \varepsilon)] : 2\varepsilon$ besitzt. Diese Ableitung sei in $\langle 0, 2\pi \rangle$ von endlicher Variation. Dann aus

$$\text{(1)} \qquad \int_0^{2\pi} f(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = 0$$

folgt (s. Abschn. 1)

$$\text{(2)} \qquad \int_0^{2\pi} f^{\cdot 2}(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi - \int_0^{2\pi} f^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi - \frac{\pi}{2}\,[f(0) + f(\pi)]^2 \geqq 0$$

und in (2) *gilt das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn* (s. Abschn. 2)

$$\text{(3)} \qquad f(\varphi) = a \cos \varphi + b \sin \varphi + c(2 - \pi|\sin \varphi|)\,,$$

wo a, b, c beliebige Konstanten sind.

Mittels des Verfahrens aus [2], S. 107, bekommen wir dann aus dem verschärften Lemma von Wirtinger die Ungleichung (D).

Der einfachen Ausdrucksweise wegen führen wir folgende Bezeichnung ein: Ist $\mathscr{B}$ ein konvexer Bereich, so bedeutet $\mathscr{H}(\mathscr{B})$ den zu $\mathscr{B}$ homothetischen Bereich, $\mathscr{D}_\alpha(\mathscr{B})$ den bei $\alpha > 0$ äusseren und bei $\alpha < 0$ inneren Parallelbereich zu $\mathscr{B}$ in der Entfernung $|\alpha|$ und endlich $\mathscr{T}_\beta(\mathscr{B})$ die teleskopische Transformation von $\mathscr{B}$ (in der Terminologie aus [5], S. 94; s. auch Abschn. 4), und zwar bei $\beta > 0$ die Auseinanderziehung und bei $\beta < 0$ die Zusammenziehung des Bereiches $\mathscr{B}$ in der zu φ orthogonalen Richtung, immer in der Gesamtlänge $2|\beta|$. Selbstverständlich bei $\alpha < 0$ und $\beta < 0$ sind die Bereiche $\mathscr{D}_\alpha(\mathscr{B})$ oder $\mathscr{T}_\beta(\mathscr{B})$ nicht notwendig konvex.

In der Ungleichung (D) gilt dann das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn entweder $\mathscr{B}_1 = \mathscr{H}(\mathscr{B}_2)$ oder $\mathscr{B}_i = \mathscr{T}_{\pi c}\{\mathscr{D}_{-2c}[\mathscr{H}(\mathscr{B}_j)]\}$ bei geeigneter Wahl der Nummern $i, j = 1, 2$; $i \neq j$; und $c \neq 0$, allerdings insofern alle fortschreitend transformierte Bereiche konvex sind (s. Abschn. 4).

Ist der Bereich $\mathscr{B}_2$ ein Kreis mit dem Durchmesser $B_2 = B_1$, so folgt aus (D) die Ungleichung von T. Bonnesen $L_1^2 - 4\pi F_1 \geqq (L_1 - \pi B_1)^2$ (s. [4], S. 95).

1. In [1], S. 231 und 233, hat W. Blaschke die Analogie des Mittelwertsatzes

$$\text{(a)} \qquad \varphi \in \langle \alpha, \beta \rangle \Rightarrow [f(\beta) - f(\alpha)] : [\beta - \alpha] \in \langle \inf_{\varphi \in \langle \alpha, \beta \rangle} f^{\cdot}(\varphi), \quad \sup_{\varphi \in \langle \alpha, \beta \rangle} f^{\cdot}(\varphi) \rangle$$

und die Analogie der partiellen Integration

$$\text{(b)} \qquad \int_0^{2\pi} f^{\cdot}(\varphi) \cos m\varphi \, d\varphi = m \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin m\varphi \, d\varphi \,, \quad \int_0^{2\pi} f^{\cdot}(\varphi) \sin m\varphi \, d\varphi =$$
$$= - m \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos m\varphi \, d\varphi \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

ausgesprochen.

Aus (a) folgt, dass die Funktion $f(\varphi)$ in dem Intervall $\langle 0, 2\pi \rangle$ die Lipschitz-Bedingung erfüllt und deshalb ist sie im Intervall $\langle 0, 2\pi \rangle$ von endlicher Variation. Folglich lässt sich die Funktion $f(\varphi)$ in eine konvergente Fouriersche Reihe entwickeln; das absolute Glied verschwindet wegen (1):

$$(1,1) \qquad f(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \,.$$

Nach (b) und (1,1) ist dann

$$(1,2) \qquad f^{\cdot}(\varphi) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n(b_n \cos n\varphi - a_n \sin n\varphi) \,.$$

Wegen (1,1) und (1,2) und der Vollständigkeitsrelation des trigonometrischen Fundamentalsystems kann man die linke Seite der Ungleichung (2) auch folgendermassen schreiben:

$$(1,3) \qquad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^{\cdot 2}(\varphi) \, d\varphi - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(\varphi) \, d\varphi - \tfrac{1}{2}[f(0) + f(\pi)]^2 =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - 1)(a_n^2 + b_n^2) - 2[\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}]^2 \,.$$

Man überzeugt sich durch eine vollständige Induktion, dass für jedes natürliches k

ist

$$(1,4) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(4n^2 - 1)\, a_{2n}^2 - 2\Big[\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}\Big]^2 =$$

$$= \sum_{m=1}^{k}\Big[(2m - 1)\, a_{2m} - 2 \sum_{n=m+1}^{\infty} a_{2n}\Big]^2 + \sum_{n=k+1}^{\infty}(4n^2 - 1)\, a_{2n}^2 - (4k + 2)\Big[\sum_{n=k+1}^{\infty} a_{2n}\Big]^2 .$$

Aber

$$(1,5) \qquad \lim_{k\to\infty} \sum_{n=k+1}^{\infty}(4n^2 - 1)\, a_{2n}^2 = 0\,, \quad \lim_{k\to\infty}(4k + 2)\Big[\sum_{n=k+1}^{\infty} a_{2n}\Big]^2 = 0\,.$$

Die erste Relation (1,5) ist offensichtlich und die zweite beweisen wir wie folgt:

Aus (1,1) und (b) ergibt sich, dass $a_{2n} = (1/\pi) \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos 2n\varphi \,\mathrm{d}\varphi = - (1/2\pi n)\,.$ $. \int_0^{2\pi} f^{\cdot}(\varphi) \sin 2n\varphi \,\mathrm{d}\varphi$. Weiter ist $2n \int_0^{2\pi} f^{\cdot}(\varphi) \sin 2n\varphi \,\mathrm{d}\varphi = - (S) \int_0^{2\pi} f^{\cdot}(\varphi)\,.$ $.\, \mathrm{d} \cos 2n\varphi = (S) \int_0^{2\pi} (\cos 2n\varphi)\, \mathrm{d}f^{\cdot}(\varphi)$ und $|(S) \int_0^{2\pi} (\cos 2n\varphi)\, \mathrm{d}f^{\cdot}(\varphi)| < V$, wo V die totale Variation der Funktion $f^{\cdot}(\varphi)$ im Intervall $\langle 0, 2\pi\rangle$ ist. Durch die Verbindung erhält man, dass $|a_{2n}| < (1/4\pi n^2)\,.\, V$. Folglich $|\sum_{n=k+1}^{\infty} a_{2n}| < (V/4\pi) \sum_{n=k+1}^{\infty} (1/n^2) <$ $< (1/4\pi)\,.\, V\,.\,(1/k)$. (Dieses Verfahren ist freilich zu [8], S. 507–509, analogisch). Daraus ergibt sich aber schon unmittelbar die zweite Relation in (1,5).

Aus (1,3)–(1,5) folgt (2).

2. In Hinsicht auf (1,3)–(1,5) gilt in (2) das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn

$$(2,1) \qquad a_{2n+1} = 0,\ b_{n+1} = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

und $(2m - 1)\, a_{2m} - 2 \sum_{n=m+1}^{\infty} a_{2n} = 0$ für $m = 1, 2, \ldots$. Substrahiert man in diesem System von jeder Gleichung die unmittelbar folgende, so erhält man das System, aus dem man schon leicht gewinnt, dass

$$(2,2) \qquad a_{2m} = \frac{3}{(2m - 1)(2m + 1)}\, a_2 \quad (m = 1, 2, \ldots)\,.$$

Aus (2,1), (2,2) und (1,1) ergibt sich weiter (s. [11], S. 43,44)

$$f(\varphi) = a_1 \cos \varphi + b_1 \sin \varphi + 3a_2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2m\varphi}{(2m - 1)(2m + 1)} =$$

$$= a_1 \cos \varphi + b_1 \sin \varphi + 3a_2\,.\, \frac{\pi}{4}\left(\frac{2}{\pi} - |\sin \varphi|\right).$$

3. Die Stützfunktionen $h_1(\varphi)$ und $h_2(\varphi)$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle$, der Bereiche $\mathscr{B}_1$ und $\mathscr{B}_2$ erfüllen bis auf (1) alle Voraussetzungen über die Funktion $f(\varphi)$ aus dem verschärften Lemma von Wirtinger (s. [1], S. 228–231) und weil $\int_0^{2\pi} [h_1(\varphi) : L_1 - h_2(\varphi) :$

$: L_2] \,\mathrm{d}\varphi = 0$ ist, so kann man in ihm

$$f(\varphi) = \frac{h_1(\varphi)}{L_1} - \frac{h_2(\varphi)}{L_2} \tag{3,1}$$

wählen. Das Einsetzen aus (3,1) in (2) führt zur Ungleichung (D). Nach (3) und (3,1) tritt in (D) das Gleichheitszeichen dann und nur dann ein, wenn

$$h_j(\varphi) = \frac{L_j}{L_i} h_i(\varphi) - 2C + \pi C\,|\sin\varphi| + A\cos\varphi + B\sin\varphi\,, \tag{3,2}$$

wo $i, j = 1, 2;\ i \neq j$ und A, B, C beliebige Konstanten bedeuten.

4. Es sei $\chi(\varphi)$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$, die Stützfunktion eines konvexen ebenen Bereiches $\mathscr{B}$, weiter seien X, Y die Gegenpunkte seiner Berandung in der Richtung $\varphi = 0$ und k sei eine Konstante. $k\,\chi(\varphi)$ bzw. $\chi(\varphi) + k$ ist freilich die Stützfunktion des zu $\mathscr{B}$ homothetischen bzw. parallelen Bereiches und $\chi(\varphi) + k|\sin\varphi|$ ist die Stützfunktion des Bereiches $\mathscr{B}^*$, welcher aus $\mathscr{B}$ folgendermassen entsteht: Die Verbindungslinie XY teilt die Berandung des Bereiches $\mathscr{B}$ in zwei Teile, aus denen wir jeden in der zu $\varphi = 0$ orthogonalen Richtung um die Länge $|k|$ verschieben und wenn wir mit $X' \neq X''$ bzw. mit $Y' \neq Y''$ die verschobenen Lagen des Punktes X bzw. Y bezeichnen, so ist der Bereich $\mathscr{B}^*$ mit den verschobenen Teilen der Berandung des Bereiches $\mathscr{B}$ und mit den Strecken $X'X''$ und $Y'Y''$ (oder nur mit ihren Teilen) begrenzt.

Daraus und aus (3,2) und freilich auch aus der Forderung der Konvexität folgt die Behauptung über das Gleichheitszeichen in (D).

Literatur

[1] *W. Blaschke:* Beweise zu Sätzen von Brunn und Minkowski über die Minimaleigenschaft des Kreises. Jber. Deutsch. Math. Vereinig. *23* (1914), S. 210—234.

[2] *W. Blaschke:* Kreis und Kugel. Leipzig 1916, Berlin 1956.

[3] *W. Blaschke:* Vorlesungen über Differentialgeometrie I. Berlin 1921, New York 1945.

[4] *T. Bonnesen:* Les problèmes des isopérimètres et des isépiphanes. Paris 1929.

[5] *T. Bonnesen* und *W. Fenchel:* Theorie der konvexen Körper. Berlin 1934.

[6] *A. Dinghas:* Zur Theorie der konvexen Körper im n-dimensionalen Raum. Abh. preuss. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl. 1939, Nr. 4.

[7] *A. Dinghas:* Elementarer Beweis einer Ungleichung für konvexe Körper. Ebenda, 1939, Nr. 9.

[8] *Г. М. Фихтенгольц:* Курс дифференциального и интегрального исчисления, том III, Москва-Ленинград 1960.

[9] *G. Frobenius:* Über den gemischten Flächeninhalt zweier Ovale. S.-B. preuss. Akad. Wiss. 1915, S. 387—404.

[10] *G. H. Hardy-J. E. Littlewood-G. Pólya:* Inequalities. Cambridge 1934.

[11] *Г. П. Толстов:* Ряды Фурье, Москва-Ленинград 1951, Москва 1960.

Výtah

ZOSTŘENÍ FROBENIOVY NEROVNOSTI PRO SMÍŠENÝ OBSAH KONVEXNÍCH ROVINNÝCH OBLASTÍ

ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha

Wirtingerovo lemma je zostřeno v nerovnost (2), která umožňuje zlepšit na tvar (D) Frobeniovu nerovnost pro smíšený obsah M rovinných konvexních oblastí s obsahy F_1, F_2, délkami hranic L_1, L_2 a šířkami v témž směru B_1, B_2. Podmínka (3) rovnosti v (2) vede k určení oblastí, charakterizovaných znamením rovnosti v (D).

Резюме

УСИЛЕНИЕ НЕРАВЕНСТВА ФРОБЕНИЯ ДЛЯ СМЕШАННОЙ ПЛОЩАДИ ВЫПУКЛЫХ ФИГУР

ЗБЫНЕК НАДЕНИК, Прага

Лемма Виртингера усилена в неравенство (2), которое позволяет улучшить к виду (D) неравенство Фробения для смешанной площади M выпуклых фигур с площадями F_1, F_2, с длинами границ L_1, L_2 и широтами B_1, B_2 в том же направлении. Условие (3) равенства в (2) дает возможность установить фигуры, характеризованные знаком равенства в (D).