Časopis pro pěstování matematiky, roč. 90 (1965), Praha

REFERÁTY

ADJUNGOVANÉ A SAMOADJUNGOVANÉ HOMOGENNÍ LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

(Vlastní referát Z. Hustého o přednášce proslovené na Kurzweilově semináři matematického ústavu ČSAV v Praze ve dnech 5. a 12. listopadu 1964.)

Úmluvy: Místo „homogenní lineární diferenciální rovnice" budeme říkat „rovnice". Symboly $f', f^{(n)}[\dot{f}]$ značí derivace funkce f podle $x[t]$. Funkce $x = T_{-1}(t)$ je inversní k funkci $t = T(x)$.

Nechť

$$\text{(a)} \qquad L[y] = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i(x)\, y^{(n-i)}(x) = 0\,, \quad a_0 \neq 0\,, \quad x \in I_1\,,$$

$$\text{(b)} \qquad M[y] = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} b_i(x)\, y^{(n-i)}(x) = 0\,, \quad b_0 \neq 0\,, \quad x \in I_1$$

jsou rovnice se spojitou dimensí. Jestliže $a_1 \equiv 0$ $[a_i \equiv 0,\ i = 1, 2]$, pak rovnici (a) nazýváme *polokanonickou* [*kanonickou*]. Rovnici

$$y^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \frac{a_i}{a_0} y^{(n-i)} = 0$$

nazýváme *normálním* tvarem rovnice (a). Označení: (a_n). Rovnice (a), (b) nazýváme *identické*, jestliže $a_i = b_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $x \in I_1$. Označení: (a) = (b). Rovnice (a), (b) nazýváme *kvasiidentické*, jestliže mají v intervalu I_1 stejný fundamentální systém. Označení: (a) $\doteq$ (b). Zápisy $y \in$ (a) resp. $\{y_i\} \in$ (a) čteme takto: „funkce y je řešením rovnice (a)" resp. „funkce y_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ tvoří fundamentální systém rovnice (a)"

Nechť $I_{1x} \subset I_1$. Symbolem $m(I_{1x})$ označujeme množinu, jejíž prvky jsou definovány takto: uspořádaná dvojice funkcí $\{T(x), u(x)\} \in m(I_{1x})$, když $T(x) \in C_{n+1}(I_{1x})$, $T'(x) \neq 0$ v I_{1x}, $T'(x)$ má dimensi 0, $u(x) \in C_n(I_{1x})$, $u(x) \neq 0$ v I_{1x}, $u(x)$ má dimensi 0.

Nechť $\{T(x), u(x)\} \in m(L_{1x})$. Jestliže v rovnici (a) použijeme postupně transformací $y(x) = u(x)\, Z(x)$, $t = T(x)$, obdržíme rovnici (ā), kterou nazýváme *obrazem* rovnice (a) v intervalu I_{1x} o souřadnicích $T(x)$, $u(x)$. Označení: (ā) $\{T(x), u(x)\}$. Symboly $o_a(I_{1x})$ $[p_a(I_{1x})]$ $\{k_a(I_{1x})\}$ označujeme množinu všech obrazů [polokanonických obrazů] {kanonických obrazů} rovnice (a) v intervalu I_{1x}, jejichž souřadnice jsou prvky množiny $m(I_{1x})$. Obraz (ā) $\{T(x), U(x)\} \in p_a(I_{1x}) \Leftrightarrow U(x) = c|T'|^{(1-n)/2}$.

$\cdot \exp\{-\int_{x_0}^{x}(a_1/a_0)\,ds\}$, $c = \text{konst.} \neq 0$, $x \in I_{1x}$. Odtud plyne, že polokanonický obraz je určen první souřadnicí a proto zavádíme pro polokanonické obrazy symbolické označení (ā) $\{T(x)\}$. Polokanonický obraz $(\bar{A})$ $\{x\} \in p_a(I_1)$ se nazývá *fundamentální* a nechť $\bar{A}_i$, $i = 0, 2, 3, \ldots, n$ jsou jeho koeficienty. Funkce $A_i = \bar{A}_i/\bar{A}_0$, $i = 2, 3, \ldots, n$ nazýváme *fundamentálními koeficienty* rovnice (a), funkce $\Theta_i(A_2, \ldots, A_i)$, $i = 3, 4, \ldots, n$, nazýváme *fundamentálními invarianty* rovnice (a).

1. ADJUNGOVANÉ ROVNICE

Symbolem (ã) označme rovnici

$$(\tilde{a}) \qquad \tilde{L}[y] = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} (a_i y)^{(n-i)} = 0\,.$$

Definice. Rovnice (b) je adjungovaná k (a), jestliže (b) $\doteq$ $(\tilde{a})$. Označení: (b) $\sim$ (a).

1.1. Platí tato tvrzení: *1°* (ã) $\sim$ (a). *2° Nechť* (b) $\sim$ (a); (c) $\sim$ (a) $\Leftrightarrow$ (c) $\doteq$ (b). *3° Nechť* (b) $\sim$ (a); (b) $\sim$ (c) $\Leftrightarrow$ (ã) $\doteq$ $(\tilde{c})$ $\Leftrightarrow$ $(\tilde{c})$ $\sim$ (a) [(ã) $\sim$ (c)].

1.2. Nechť funkce $z(x)$ má tyto vlastnosti: a) $z(x) \in C_n(I_1)$ a má dimensi nula. b) $z(x)\,L[y] = d/dx\,\psi(y, z)$ v I_1, kde $\psi(y, z)$ je polynom prvků $y, z, a_0\, a_1, \ldots, a_{n-1}$ dimense $n - 1$ a stupně třetího, který je bilineární formou prvků y, z a jejich derivací až do řádu $(n - 1)$-ho. Pak funkci $z(x)$ nazýváme *multiplikátorem* operátoru $L[y]$. (b) $\sim$ (a) $\Leftrightarrow$ *každé řešení rovnice* (b) *je multiplikátorem operátoru* $L[y]$.

1.3. Nechť $\{y_i\} \in$ (a), $W[y]$ resp. $W_i[y]$ je wronskien funkcí $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ resp. $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\} - y_i$. (b) $\sim$ (a) $\Leftrightarrow$ $\{\tilde{y}_i = (1/a_0)(W_i[y]/W[y])\} \in$ (b).

1.4. (b) $\sim$ (a) $\Leftrightarrow$ (б) $\{T(x), T'(x)\} \in o_b(I_1)$ $\sim$ (ā) $\{T(x), u(x)\} \in o_a(I_1)$. *D* (= důsledek) *1*: (b) $\sim$ (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\sim$ (ā) $\{x, u(x)\} \in o_a(I_1)$. *D 2*: (b_i) $\sim$ $(\bar{a}_i)$ $\{T(x), u_i(x)\} \in o_a(I_1)$, $i = 1, 2 \Rightarrow (b_1) \doteq (b_2) \Rightarrow (\bar{a}_1) \doteq (\bar{a}_2)$.

1.5. Symbolem $(v\dot{T}\bar{a})$ označujeme rovnici

$$(v\dot{T}\bar{a}) \qquad v[T_{-1}(t)]\,\dot{T}_{-1}(t)\,\bar{L}[z] = 0\,, \quad t \in I_2 = T(I_1)\,,$$

kde $\bar{L}[z] = 0$ je rovnice obrazu (ā) $\{T(x), u(x)\} \in o_a(I_1)$. (b) $\sim$ (a) $\Leftrightarrow$ (б) $\{T(x), v(x)\} \in o_b(I_1)$ $\sim$ $(v\dot{T}\bar{a})$. *D 1*: (b) $\sim$ (a) $\Leftrightarrow$ (б) $\{x, u(x)\} \in o_b(I_1)$ $\sim$ $u(x)\,L[y]$. *D 2*: (b) $\sim$ (a) $\Leftrightarrow$ (б) $\{x, 1/a_0\} \in o_b(I_1)$ $\sim$ (a_n).

1.6. Jestliže platí současně (b) $\sim$ (a), (a) $\sim$ (b), pak říkáme že rovnice (a), (b) jsou *adjungované*. Označení: (a) $\simeq$ (b). Platí tato tvrzení: *1°* (a) $\simeq$ (ã) *2° Nechť* (b) $\sim$ (a), *takže* $M[y] = u(x)\,\tilde{L}[y]$. (c) $\sim$ (b) $\Leftrightarrow$ (c) $\doteq$ (ā) $\{x, u(x)\} \in o_a(I_1)$. *D*: *Nechť* (b) $\sim$ (a); (a) $\sim$ (b) $\Leftrightarrow$ $M[y] = c\,\tilde{L}[y]$, $c = \text{konst.} \neq 0$. *3°* (b) $\sim$ (a_n) $\Leftrightarrow$ $(b_n) \simeq (a_n)$ $\Leftrightarrow$ (a) $\sim$ (b_n).

1.7. (b) $\sim$ (a) $\Leftrightarrow$ (б) $\{T(x), 1/(a_0 u(T')^{n-1})\} \in o_b(I_1)$ $\sim$ $(\bar{a}_n)$, kde (ā) $\{T(x), u(x)\} \in o_a(I_1)$. *D*: (b) $\sim$ (a_n) $\Leftrightarrow$ (б) $\{T(x), 1/(u(T')^{n-1})\} \in o_b(I_1)$ $\sim$ $(\bar{a}_n)$.

1.8. (b) $\sim$ (a_n) $\Leftrightarrow$ ($\bar{B}$) $\sim$ ($\bar{A}_n$), kde ($\bar{A}$) $\left\{T(x), \exp\left(-\int_{x_0}^{x} \frac{a_1}{a_0}\,ds\right)|T'|^{(1-n)/2}\right\} \in p_a(I_1)$, ($\bar{B}$) $\left\{T(x), \exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{a_1}{a_0}\,ds\right)|T'|^{(1-n)/2}\right\} \in p_b(T_1)$. *D* 1: (b) $\sim$ (a_n) $\Leftrightarrow$ ($\bar{B}_n$) $\simeq$ ($\bar{A}_n$). *D* 2: (b_n) $\simeq$ (a_n) $\Leftrightarrow$ ($\bar{B}_n$) $\simeq$ ($\bar{A}_n$).

1.9. Nechť B_k, $k = 2, 3, \ldots, n$ resp. $\Theta_i\,(B_2, \ldots, B_i)$ jsou fundamentální koeficienty resp. invarianty rovnice (b). (b) $\sim$ (a_n) $\Leftrightarrow \Theta_i(B_2, \ldots, B_i) = (-1)^i\ \Theta_i(A_2, \ldots, A_i)$, $i = 3, 4, \ldots, n$, $x \in I_1$.

2. SAMOADJUNGOVANÉ ROVNICE

2.1. Definice. Nechť (b) $\sim$ (a). Jestliže (b) $\doteq$ (a), pak rovnici (a) nazýváme samoadjungovanou. Platí tato tvrzení. *1°* (a) *je samoadjungovaná* $\Leftrightarrow$ (a) $\doteq$ (ã) $\Leftrightarrow L[y] = (-1)^n L[y]$ *2°* (a) *je samoadjungovaná* $\Leftrightarrow$ (a) $\sim$ (a). Odtud plyne, že zápis (a) $\sim$ (a) můžeme považovat za symbolické označení samoadjungované rovnice (a). *3° Nechť* (a) $\sim$ (a); (a) $\sim$ (b) $\Leftrightarrow$ ($\tilde{b}$) $\doteq$ (a). *4°* (a) $\sim$ (a) $\Leftrightarrow$ *každé řešení rovnice* (a) *je multiplikátorem operátoru* $L[y]$. *5°* (a) $\sim$ (a) $\Leftrightarrow \{\tilde{y}_i\} \in$ (a), funkce $\tilde{y}_i$ jsou definovány v 1.3.

2.2. (a) $\sim$ (a) $\Leftrightarrow$ ($\bar{a}_1$) $\{T(x), T'(x)\} \in o_a(I_1)$ $\sim$ ($\bar{a}$) $\{T(x), u(x)\} \in o_a(I_1)$. *D 1*: (a) $\sim$ (a) $\Leftrightarrow$ ($\bar{a}_1$) $\sim$ ($\bar{a}_1$). *D 2*: (a) $\sim$ (a) $\Leftrightarrow$ (a) $\sim$ ($\bar{a}$) $\{x, u(x)\} \in o_a(I_1)$. *D 3*: Nechť (a) $\sim$ (a), ($\bar{a}$) $\{T(x), u(x)\} \in o_a(I_1)$; ($\bar{a}$) $\sim$ ($\bar{a}$) $\Leftrightarrow u(x) = c\,.\,T'(x)$, c = konst. $\neq 0$. *D 4*: Nechť (a) $\sim$ (a), ($\bar{a}$) $\{x, u(x)\} \in o_a(I_1)$; ($\bar{a}$) $\sim$ ($\bar{a}$) $\Leftrightarrow u(x) = c$ = konst. $\neq 0$.

2.3. (a) $\sim$ (a) $\Leftrightarrow$ ($\bar{a}_2$) $\{T(x), v(x)\} \in o_a(I_1)$ $\sim$ ($u\bar{T}\bar{a}$), viz 1.5. *D 1*: (a) $\sim$ (a) $\Leftrightarrow$ ($\bar{a}$) $\{x, u(x)\} \in o_a(I_1)$ $\sim$ $u(x)\,L[y]$. *D 2*: (a) $\sim$ (a) $\Leftrightarrow$ ($\bar{a}$) $\{x, 1/a_0\} \in o_a(I_1)$ $\sim$ (a_n).

2.4. Nechť (a) $\sim$ (a), (b) $\sim$ (a); (b) $\sim$ (b) $\Leftrightarrow M[y] = c\,L[y]$, c = konst. $\neq 0$.

2.5. (a_n) $\sim$ (a_n) $\Rightarrow$ (a) $\in p_a(I_1)$.

2.6. Nechť (A) je polokanonická rovnice, ($\bar{A}$) $\{T(x)\} \in p_A(I_1)$. (A_n) $\sim$ (A_n) $\Leftrightarrow$ ($\bar{A}_n$) $\sim$ ($\bar{A}_n$).

2.7. Nechť ($\bar{A}$) $\{T(x)\} \in p_a(I_1)$. ($\bar{A}_n$) $\sim$ ($\bar{A}_n$) $\Leftrightarrow \Theta_{2k+1}(A_2, \ldots, A_{2k+1}) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, [(n-1)/2]$, $x \in I_1$ *D*: *Jestliže rovnice* $y^{(n)} + \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} a_i\, y^{(n-i)} = 0$ *má fundamentální invarianty s lichými indexy rovny nule, pak je samoadjungovaná.* Tato věta je bez důkazu uvedena v těchto pracích: Acta mathematica *14* (1890–91), 233–248 (Brioschi). Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen II/1, Leipzig 1897 (Schlesinger).

Zdeněk Hustý, Brno