Časopis pro pěstování matematiky

Miloslav Nekvinda

O křivkách maximální délky

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 99 (1974), No. 1, 30--43

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108214`

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1974

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

O KŘIVKÁCH MAXIMÁLNÍ DÉLKY

MILOSLAV NEKVINDA, Liberec

(Došlo dne 4. listopadu 1971)

OZNAČENÍ

$C(a, b)$	množina všech spojitých funkcí v intervalu $\langle a, b\rangle$
$d(f, a, b)$	délka křivky K o rovnici $y = f(x)$, $a \leqq x \leqq b$
$V(a, b)$	množina všech funkcí $f \in C(a, b)$ s konečnou variací
$M(a, b)$	množina těch funkcí $f \in V(a, b)$, jejichž graf má maximální délku
$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f$	variace funkce f v intervalu $\langle a, b\rangle$
μ	Lebesgueova míra

1. EXISTENCE KŘIVEK MAXIMÁLNÍ DÉLKY

Je známo, že exitsuje neklesající spojitá funkce f v intervalu $\langle 0, 1\rangle$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, pro niž platí $d(f, 0, 1) = 2$. Vezměme např. Cantorovu množinu (diskontinuum) $A \subset \langle 0, 1\rangle$. Je-li (a, b) styčný interval této množiny, definujme $f(x) = (a + b)/2$ pro $x \in (a, b)$. V bodech množiny A dodefinujme f tak, aby byla spojitá v $\langle 0, 1\rangle$. Je zřejmé, že f je neklesající v $\langle 0, 1\rangle$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $d(f, 0, 1) = 2$. Méně triviální je následující tvrzení.

Věta 1.1. *Existuje funkce f těchto vlastností:*

1. f je spojitá a rostoucí v $\langle 0, 1\rangle$;
2. $f(0) = 0$, $f(1) = 1$;
3. $d(f, 0, 1) = 2$.

Důkaz tohoto tvrzení byl podán v [1]. Spočívá v konstrukci posloupnosti $\{f_n\}$ spojitých rostoucích funkcí v intervalu $\langle 0, 1\rangle$, $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$, jejichž grafy jsou lomené čáry, přičemž platí:

1. $f_0(x) = x, \ 0 \leqq x \leqq 1$;

2. Je-li dána funkce f_n, pak úhlovými body (tj. body, v nichž má první derivace nespojitost a dále body $(0, 0)$, $(1, 1)$) funkce f_{n+1} jsou jednak úhlové body funkce f_n a dále body ležící uprostřed mezi dvěma sousedními úhlovými body funkce f_n. Přitom lomené čáry jsou konstruovány tak, aby byl splněn vztah

$$d(f_n, 0, 1) > 2 - \frac{1}{n}.$$

Snadno lze pak ukázat, že posloupnost $\{f_n\}$ je stejnoměrně konvergentní v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ a že funkce $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ splňuje požadavky věty.

Je zřejmé, že lze větu 1.1 formulovat obecněji:

Věta 1.2. *Nechť a, b, c, d jsou libovolná reálná čísla, $a < b$. Pak existuje funkce f těchto vlastností:*

1. *f je spojitá a monotónní v intervalu $\langle a, b \rangle$;*
2. *$f(a) = c, f(b) = d$;*
3. *$d(f, a, b) = b - a + |d - c|$.*

Jestliže $c \neq d$, lze vlastnost 1 zesílit takto:

1'. *f je spojitá a ryze monotónní v intervalu $\langle a, b \rangle$.*

Definice 1.1. Nechť křivka K je grafem funkce $f \in V(a, b)$, $a < b$. Řekneme, že *K má maximální délku v intervalu $\langle a, b \rangle$*, jestliže platí

$$d(f, a, b) = b - a + \bigvee_a^b f. \tag{1.1}$$

Symbolem $M(a, b)$ označme množinu všech funkcí $f \in V(a, b)$, pro něž platí (1.1).

Poznámka. V dalším budeme obvykle užívat rčení „funkce f má maximální délku v $\langle a, b \rangle$" místo formulace uvedené v definici. Je zřejmé, že pro libovolnou funkci $f \in V(a, b)$ platí vztah $d(f, a, b) \leqq b - a + \bigvee_a^b f$. Tím je odůvodněn pojem funkce maximální délky.

Lemma 1.1. *Nechť $a \leqq c < d \leqq b$ a nechť $f \in M(a, b)$. Pak $f \in M(c, d)$.*

Lemma 1.2. *Nechť $a < b < c$ a nechť $f \in M(a, b)$, $f \in M(b, c)$. Pak $f \in M(a, c)$.*

Důkaz obou lemmat je triviální.

Věta 1.3. *Množina $M(a, b)$ je hustá v $C(a, b)$.*

D ů k a z snadno plyne z věty 1,2 a lemmatu 1.2, neboť množina všech spojitých funkcí v $\langle a, b\rangle$, jejichž grafy jsou lomené čáry, je hustá v $C(a, b)$.

P o z n á m k a. Větu 1.3 lze formulovat ostřeji: množina všech funkcí maximální délky v $\langle a, b\rangle$, jež nejsou konstantní v žádném intervalu $I \subset \langle a, b\rangle$, je hustá v $C(a, b)$.

2. VLASTNOSTI FUNKCÍ MAXIMÁLNÍ DÉLKY

Dá se dokázat, že funkce f, zkonstruovaná v důkazu věty 1.1, není absolutně spojitá. Později uvidíme, že libovolná nekonstantní funkce maximální délky není absolutně spojitá. Nyní zavedeme kvantitativní charakteristiku absolutní nespojitosti libovolné funkce $f \in V(a, b)$.

Nechť $f \in V(a, b)$, nechť $x \in \langle a, b\rangle$. Nechť M_x je číselná množina splňující následující dvě vlastnosti:

(i) $0 \in M_x$;

(ii) nechť $\varepsilon > 0$. Pak $\varepsilon \in M_x \Leftrightarrow$ k libovolnému $\delta > 0$ existuje přirozené číslo n a čísla a_i, b_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, pro něž platí

$$a \leqq a_1 < b_1 \leqq a_2 < b_2 \leqq \ldots \leqq a_n < b_n \leqq x \, ; \tag{2.1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \delta \, ; \tag{2.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| \geqq \varepsilon \, . \tag{2.3}$$

Je zřejmé, že M_x je neprázdná, shora omezená číselná množina (číslo $\overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f$ je její horní hranicí); je-li $\varepsilon \in M_x$ a $\varepsilon_1 \in \langle 0, \varepsilon\rangle$, pak $\varepsilon_1 \in M_x$.

Definice 2.1. Nechť $f \in V(a, b)$. Funkci

$$r(f, a, x) = \sup M_x \, , \quad x \in \langle a, b\rangle \tag{2.4}$$

nazveme *redukovanou funkcí k funkci f v intervalu $\langle a, b\rangle$*.

Lemma 2.1. *Funkce $r(f, a, x)$ je spojitá a neklesající v $\langle a, b\rangle$, $r(f, a, a) = 0$;* $r(f, a, x) \equiv 0$ pro $x \in \langle a, b\rangle \Leftrightarrow$ *f je absoltuně spojitá v $\langle a, b\rangle$.*

Lemma 2.2. *Nechť $a \leqq b \leqq c$. Pak platí*

$$r(f, a, x) = r(f, a, b) + r(f, b, x) \quad \text{pro} \quad x \in \langle b, c\rangle \, .$$

Tvrzení obou lemmat plynou bezprostředně z definice 2.1.

Lemma 2.3. *Nechť $a < b$, nechť I je interval, $I \subset \langle a, b\rangle$. Pak f je absolutně spojitá v I právě tehdy, je-li funkce $r(f, a, x)$ konstantní v I.*

Důkaz. Tvrzení je bezprostředním důsledkem lemmat 2.1 a 2.2.

Nechť $\mathfrak{A}$ je množina, jejíž prvky jsou konečná sjednocení intervalů (otevřených, polootevřených, uzavřených), patřících do $\langle a, b\rangle$ a prázdná množina. Zřejmě platí:

$$A \in \mathfrak{A} \Leftrightarrow A' \in \mathfrak{A}\,(A' = \langle a, b\rangle - A)\,; \quad A_i \in \mathfrak{A}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathfrak{A}\,, \quad \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathfrak{A}\,.$$

$\mathfrak{A}$ je tedy algebra množin. Bude-li nutno zdůraznit, že základní množinu algebry $\mathfrak{A}$ je interval $\langle a, b\rangle$, označíme ji symbolem $\mathfrak{A}(a, b)$. Řekneme, že systém $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ množin z $\mathfrak{A}$ je skoro disjunktní (resp. že $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jsou skoro disjunktní), nemají-li žádné dvě množiny A_i, A_j, $i \neq j$ systému společných vnitřních bodů.

Nechť $f \in V(a, b)$, nechť $A \in \mathfrak{A}(a, b)$ a nechť $\delta > 0$. Položme

$$V(\delta, f, A) = \sup\,(0, \sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)|)\,, \tag{2.5}$$

kde a_i, b_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ probíhají všechny konečné množiny čísel, pro něž platí

(i) $I_k = \langle a_k, b_k\rangle \subset A$, $k = 1, 2, \ldots, n$,

(ii) systém $\{I_k\}_{k=1}^{n}$ je skoro disjunktní,

(iii) $\sum_{k=1}^{n} \mu(I_k) < \delta$.

Je zřejmé, že $V(\delta, f, A)$ je (pro danou f a dané $A \in \mathfrak{A}(a, b)$) neklesající nezáporná funkce argumentu $\delta \in (0, +\infty)$. Číslo

$$v_f(A) = V(b - a, f, A) \tag{2.6}$$

nazýváme variací funkce f na množině $A \in \mathfrak{A}$. Zřejmě $v_f(\langle a, x\rangle) = \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f$ pro $x \in \in \langle a, b\rangle$.

Položme

$$\phi(f, A) = \lim_{\delta \to 0+} V(\delta, f, A)\,. \tag{2.7}$$

Je zřejmé, že $\phi(f, A) \leqq v_f(A)$. Dá se snadno dokázat

Lemma 2.4. *Nechť $A_i \in \mathfrak{A}(a, b)$, $i = 1, 2$ jsou skoro disjunktní, nechť $f \in V(a, b)$. Pak platí*

$$\phi(f, A_1 \cup A_2) = \phi(f, A_1) + \phi(f, A_2)\,.$$

Definujeme funkci $\varphi(f, a, x)$ vztahem

$$\varphi(f, a, x) = \Phi(f, \langle a, x\rangle), \quad x \in \langle a, b\rangle. \tag{2.8}$$

Dokážeme, že platí

Lemma 2.5. *Nechť $f \in V(a, b)$. Pak platí $r(f, a, x) = \varphi(f, a\ x)$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$.*

Důkaz. Nechť $x \in \langle a, b\rangle$. Je-li f absolutně spojitá v $\langle a, x\rangle$, pak zřejmě $\varphi(f, a, t) = r(f, a, t) = 0$, $t \in \langle a, x\rangle$. Nechť tedy f není absolutně spojitá v $\langle a, x\rangle$. Pak (lemma 2.3) $r(f, a, x) > 0$. Nechť ε je libovolné číslo, $0 < \varepsilon < r(f, a, x)$. Dokážeme, že $\varphi(f, a, x) \geqq \varepsilon$. Vzhledem k definici množiny M_x máme $\varepsilon \in M_x$ a tedy k libovolnému $\delta > 0$ existuje konečná množina čísel a_i, b_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, splňující vztahy (2.1) až (2.3). To však znamená, že $V(\delta, f, \langle a, x\rangle) \geqq \varepsilon$. Tedy $\lim\limits_{\delta \to 0+} V(\delta, f, \langle a, x\rangle) = \varphi(f, a, x) \geqq \varepsilon$. Protože ε lze volit libovolně blízké k $r(f, a, x)$, jest $\varphi(f, a, x) \geqq r(f, a, x)$. Nyní dokážeme, že $\varphi(f, a, x) \leqq r(f, a, x)$. Nechť r_1 je libovolné číslo, $r_1 > r(f, a, x)$. Stačí dokázat, že $\varphi(f, a, x) \leqq r_1$. Protože $r_1 \notin M_x$, existuje $\delta > 0$ tak, že pro libovolná čísla a_i, b_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, pro něž platí (2.1), (2.2), platí též $\sum\limits_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < r_1$. To však znamená, že $V(\delta, f, \langle a, x\rangle) \leqq r_1$ a tedy $\varphi(f, a, x) = \lim\limits_{\delta \to 0+} V(\delta, f, \langle a, x\rangle) \leqq r_1$. Tím je tvrzení lemmatu dokázáno.

Lemma 2.6. *Nechť $f \in V(a, b)$, $g \in V(a, b)$. Pak pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$ platí*

$$r(f + g, a, x) \leqq r(f, a, x) + r(g, a, x).$$

Důkaz. Nechť $\delta > 0$. Zřejmě platí $V(\delta, f + g, \langle a, x\rangle) \leqq V(\delta, f, \langle a, x\rangle) + V(\delta, g, \langle a, x\rangle)$. Přechodem k limitě pro $\delta \to 0+$ s použitím lemmatu 2.5 dostaneme hledané tvrzení.

Lemma 2.7. *Nechť f_i je spojitá neklesající (nerostoucí) funkce v $\langle a, b\rangle$, $i = 1, 2$. Pak pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$ platí*

$$r(f_1 + f_2, a, x) = r(f_1, a, x) + r(f_2, a, x).$$

Důkaz. Vzhledem k předchozímu lemmatu stačí dokázat, že $r(f_1 + f_2, a, x) \geqq r(f_1, a, x) + r(f_2, a, x)$ pro $x \in \langle a, b\rangle$. Pro určitost předpokládejme, že f_1 i f_2 jsou obě neklesající případ, kdy f_1, f_2 jsou obě nerostoucí, lze vyšetřit analogicky). Především je zřejmé, že nerovnost platí pro $x = a$. Nechť tedy $x \in (a, b\rangle$. Nechť V_j jsou libovolná čísla, pro něž platí $V_j < \varphi(f_j, a, x)$, $j = 1, 2$. Pro libovolné $\delta > 0$ tedy platí $V_j < V(\delta, f_j, \langle a, x\rangle)$, $j = 1, 2$. Existují čísla a_i^1, b_i^1, $i = 1, 2, \ldots, n_1$ a a_k^2, b_k^2 $k = 1, 2, \ldots, n_2$, pro něž $a \leqq a_1^j < b_1^j \leqq a_2^j < b_2^j \leqq \ldots \leqq a_{n_j}^j < b_{n_j}^j \leqq x$,

$\sum_{i=1}^{n}(b_i^j - a_i^j) < \delta$ a $\sum_{i=1}^{n_j}|f_j(b_i^j) - f_j(a_i^j)| > V_j$, $j = 1, 2$. Zřejmě existují čísla a_i, b_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, $a \leqq a_1 < b_1 \leqq a_2 < b_2 \leqq \ldots \leqq a_n < b_n \leqq x$, $\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < 2\delta$, přičemž ke každému $j = 1, 2$ a $i = 1, 2, \ldots, n_j$ existuje $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tak, že $\langle a_i^j, b_i^j \rangle \subset \langle a_k, b_k \rangle$. Je zřejmé ($f_j$ jsou neklesající), že $\sum_{i=1}^{n}|f_j(b_i) - f_j(a_i)| \geqq$ $\geqq \sum_{i=1}^{n_j}|f_j(b_i^j) - f_j(a_i^j)|$.

Tedy $\sum_{i=1}^{n}|f_1(b_i) + f_2(b_i) - (f_1(a_i) + f_2(a_i))| \geqq \sum_{i=1}^{n}(f_1(b_i) - f_1(a_i)) + \sum_{i=1}^{n}(f_2(b_i) - f_2(a_i)) > V_1 + V_2$. To znamená, že $V(2\delta, f_1 + f_2, \langle a, x \rangle) > V_1 + V_2$, z čehož přechodem k limitě pro $\delta \to 0+$ dostaneme $\varphi(f_1 + f_2, a, x) \geqq V_1 + V_2$. Vzhledem k volbě V_1, V_2 máme podle lemmatu 2.5 $r(f_1 + f_2, a, x) \geqq r(f_1, a, x) + r(f_2, a, x)$.

Lemma 2.8. *Nechť f, g, $f - g$ jsou spojité, neklesající (nerostoucí) funkce v $\langle a, b \rangle$. Pak pro všechna $x \in \langle a, b \rangle$ platí*

$$r(f - g, a, x) = r(f, a, x) - r(g, a, x)\,.$$

Důkaz. Podle lemmatu 2.7 platí $r(f, a, x) = r(f - g, a, x) + r(g, a, x)$.

Lemma 2.9. *Nechť $f \in V(a, b)$, nechť c je libovolné reálné číslo. Pak pro všechna $x \in \langle a, b \rangle$ platí*

$$r(cf, a, x) = |c|\, r(f, a, x)\,.$$

Důkaz. Stačí se přesvědčit, že $V(\delta, cf, \langle a, x \rangle) = |c|\, V(\delta, f, \langle a, x \rangle)$.

Lemma 2.10. *Nechť $f \in V(a, b)$. Položme*

$$v_f(x) = \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f, \quad x \in \langle a, b \rangle\,. \tag{2.9}$$

Pak pro všechna $x \in \langle a, b \rangle$ platí

$$r(v_f, a, x) = r(f, a, x)\,.$$

Důkaz. I. Dokážeme, že $r(f, a, x) \leqq r(v_f, a, x)$ pro $x \in \langle a, b \rangle$. Toto tvrzení však snadno plyne ze vztahu $v_f(y) - v_f(x) \geqq |f(y) - f(x)|$, $a \leqq x < y \leqq b$.

II. Nyní ukážeme, že $r(f, a, x) \geqq r(v_f, a, x)$ pro $x \in \langle a, b \rangle$. Pro $x = a$ je tvrzení zřejmé. Nechť $x \in (a, b\rangle$, nechť ε a δ jsou libovolná kladná čísla. Pak existují čísla a_i, b_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, splňující podmínky (2.1), (2.2) a podmínku

$$V(\delta, v_f, \langle a, x \rangle) - \varepsilon < \sum_{i=1}^{n}(v_f(b_i) - v_f(a_i))\,.$$

Ke každému $i = 1, 2, \dots, n$ existují čísla c_j^i, d_j^i, $j = 1, 2, \dots, n_i$, $a_i \leqq c_i^1 < d_1^i \leqq \leqq c_2^i < d_2^i \leqq \dots \leqq c_{n_i}^i < d_{n_i}^i \leqq b_i$, $v_f(b_i) - v_f(a_i) - \varepsilon/n < \sum_{j=1}^{n_i} f(d_j^i) - f(c_j^i)|$. Zřejmě systém $\mathfrak{S}$ intervalů $\langle c_j^i, d_j^i \rangle$, $j = 1, 2, \dots, n_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ je skoro disjunktní a $\sum_{i,j} (d_j^i - c_j^i) < \delta$. To znamená, že $V(\delta, f, \langle a, x \rangle) \geqq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_i} |f(d_j^i) - f(c_j^i)| > \sum_{i=1}^{n} (v_f(b_i) - v_f(a_i)) - \varepsilon > V(\delta, v_f, \langle a, x \rangle) - 2\varepsilon$. Požadované tvrzení vyplývá z posledního vztahu přechodem k limitě pro $\delta \to 0+$, neboť ε je možno volit libovolně malé.

Lemma 2.11. *Nechť* $f \in V(a, b)$, *nechť* v_f *je definovaná vztahem* (2.9). *Pak platí*

$$d(v_f, a, b) = d(f, a, b) .$$

Důkaz. Je obdobný důkazu lemmatu 2.10.

Důsledek. $f \in M(a, b)$ *právě tehdy, jestliže* $v_f \in M(a, b)$.

Věta 2.1. *Nechť* $f \in V(a, b)$. *Položme*

$$r_1(x) = r(f, a, x) , \quad x \in \langle a, b \rangle .$$

Pak platí

$$r(r_1, a, x) = r_1(x) \quad \text{pro} \quad x \in \langle a, b \rangle .$$

Důkaz. Vzhledem k lemmatu 2.10 lze předpokládat, že f je neklesající v $\langle a, b \rangle$. Především je zřejmé, že $r(r_1, a, x) \leqq r_1(x)$ pro $x \in \langle a, b \rangle$. Stačí tedy dokázat, že $r(r_1, a, x) \geqq r_1(x)$. Pro $x = a$ je nerovnost zřejmá. Nechť $x \in (a, b\rangle$, nechť $\varepsilon > 0$. Existuje $\Delta > 0$ takové, že platí

$$\text{(i)} \qquad \delta \in (0, \Delta) \Rightarrow V(\delta, f, \langle a, x \rangle) < r_1(x) + \frac{\varepsilon}{2} .$$

Zvolme $\delta_1 \in (0, \Delta)$. Pak existuje skoro disjunktní systém intervalů $\{I_k\}_{k=1}^n$ takový, že platí

$$\text{(ii)} \qquad \sum_{k=1}^{n} \mu(I_k) < \delta_1 , \quad v_f\left(\bigcup_{k=1}^{n} I_k\right) > r_1(x) - \frac{\varepsilon}{2} ,$$

kde v_f je definována vztahem (2.6). Označme $E = \bigcup_{k=1}^{n} I_k$, $E_1 = \langle a, x \rangle - E$. Ze vztahů (i), (ii) vyplývá: je-li $\{J_k\}_{k=1}^m$ libovolný skoro disjunktní systém intrevalů, $J_k \subset E_1$, $k = 1, 2, \dots, m$, $\sum_{k=1}^{m} \mu(J_k) < \Delta - \delta_1$, pak

$$\text{(iii)} \qquad v_f\left(\bigcup_{k=1}^{m} J_k\right) < \varepsilon .$$

To znamená, že $V(\Delta - \delta_1, f, E_1) \leqq \varepsilon$ a tedy $\Phi(f, E_1) \leqq \varepsilon$ (Φ je definována vztahem (2.7)). Dokážeme, že platí

$$\text{(iv)} \qquad v_{r_1}(E_1) \leqq \varepsilon\,.$$

Nechť $v_{r_1}(E_1) > \varepsilon$. Pak existuje skoro disjunktní systém intervalů $\{J_k\}_{k=1}^m$, $J_k = \langle a_k, b_k \rangle \subset E_1$, $k = 1, 2, \ldots, m$, $\sum_{k=1}^m (r_1(b_k) - r_1(a_k)) = \varepsilon + \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 > 0$. Protože pro každé $k = 1, 2, \ldots, m$ jest $r_1(b_k) - r_1(a_k) = \Phi(f, \langle a_k, b_k \rangle)$, existuje (pro každé $k = 1, 2, \ldots, m$) skoro disjunktní systém intervalů $\{I_j^k\}_{j=1}^{n_k}$, $I_j^k \subset \langle a_k, b_k \rangle$, $j = 1, 2, \ldots, n_k$, $\sum_{j=1}^{n_k} \mu(I_j^k) < (\Delta - \delta_1)/m$, $\sum_{j=1}^{n_k} v_f(I_j^k) > r_1(b_k) - r_1(a_k) - \varepsilon_1/m$. Je zřejmé, že systém intervalů $\{I_j^k\}$, $j = 1, 2, \ldots, n_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$ je skoro disjunktní, $I_j^k \subset E_1$, $\sum_{k,j} \mu(I_j^k) < \Delta - \delta_1$ a $\sum_{k,j} v_f(I_j^k) > \sum_{k=1}^m (r_1(b_k) - r_1(a_k)) - \varepsilon_1 = \varepsilon$, což je ve sporu s (iii). Tedy platí (iv).

Jelikož platí (r_1 je neklesající) $r_1(x) = v_{r_1}(\langle a, x \rangle) = v_{r_1}(E) + v_{r_1}(E_1)$, máme podle (iv) $v_{r_1}(E) \geqq r_1(x) - \varepsilon$. Tím je dokázáno, že platí: k libovolnému $\delta_1 \in (0, \Delta)$ existuje skoro disjunktní systém intervalů $\{I_k\}_{k=1}^n$, $I_k \subset \langle a, x \rangle$, $k = 1, 2, \ldots, n$, pro nějž $\sum_{k=1}^n \mu(I_k) < \delta_1$, $\sum_{k=1}^n v_{r_1}(I_k) \geqq r_1(x) - \varepsilon$. To však znamená, že $V(\delta_1, r_1, \langle a, x \rangle) \geqq r_1(x) - \varepsilon$. Pro $\delta_1 \to 0+$ dostaneme vzhledem k libovolnosti ε $\Phi(r_1, \langle a, x \rangle) \geqq r_1(x)$. Podle (2.8) a lemmatu 2.5 vyplývá z poslední nerovnosti $r(r_1, a, x) \geqq r_1(x)$. Tím je věta dokázána.

Důsledek. *Nechť $f \in V(a, b)$. Pak funkce $\overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f - r(f, a, x)$ je absolutně spojitá v $\langle a, b \rangle$.*

Důkaz. Nechť $x \in \langle a, b \rangle$. Označme $v_f(x) = \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f$, $r_1(x) = r(f, a, x)$. Protože funkce $v_f, r_1, v_f - r_1$ jsou neklesající v $\langle a, b \rangle$, vyplývá z lemmatu 2.8 vztah $r(v_f - r_1, a, x) = r(v_f, a, x) - r(r_1, a, x)$. Ježto $r(v_f, a, x) = r(f, a, x) = r_1(x)$ (lemma 2.10) a $r(r_1, a, x) = r_1(x)$ (věta (2.1), jest $r(v_f - r_1, a, x) = 0$ pro $x \in \langle a, b \rangle$. Z lemmatu 2.1 pak vyplývá, že funkce $v_f - r_1$ je absolutně spojitá v $\langle a, b \rangle$, což jsme měli dokázat.

Nechť f je spojitá a neklesající v $\langle a, b \rangle$. Buď dáno dělení $\mathfrak{D}$ intervalu $\langle a, b \rangle$: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Označme $A_i = (x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, \ldots, n$; $k_i = (f(x_i) - f(x_{i-1}))/(x_i - x_{i-1})$, $\alpha_i = \operatorname{arctg} k_i$, $l_i = \varrho(A_{i-1}, A_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Nechť $\hat{L} = \hat{L}(\mathfrak{D})$ je funkce, jejímž grafem je lomená čára s úhlovými body A_i, $i = 0, 1, \ldots, n$. Nechť $\alpha \in (0, \pi/4)$; nechť $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_1(\mathfrak{D}, \alpha)$ respektive $\mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}_2(\mathfrak{D}, \alpha)$ je množina těch $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, pro něž platí $k_i < \operatorname{tg} \alpha$ respektive $k_i > \operatorname{cotg} \alpha$; nechť $\mathfrak{S}_3 = \mathfrak{S}_3(\mathfrak{D}, \alpha) = \{1, 2, \ldots, n\} - \mathfrak{S}_1 - \mathfrak{S}_2$. Platí

Lemma 2.12. *Nechť f je spojitá a neklesající v $\langle a, b\rangle$ a nechť $f \in M(a, b)$ (viz definici* 1.1). *Nechť $\alpha \in (0, \pi/4\rangle$. Pak k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že platí:*

je-li $\mathfrak{D}$ libovolné dělení intervalu $\langle a, b\rangle$, pro něž platí

(i) $$d(\hat{L}, a, b) > b - a + f(b) - f(a) - \delta\,,$$

pak $\sum_{i \in \mathfrak{S}_3} l_i < \varepsilon$.

Důkaz. Předpokládejme opak. Pak existuje $\varepsilon > 0$, že pro libovolné $\delta > 0$ existuje dělení $\mathfrak{D}$ intervalu $\langle a, b\rangle$ takové, že je splněna podmínka (i) a

(ii) $$\sum_{i \in \mathfrak{S}_3} l_i = \varepsilon_1 \geqq \varepsilon\,.$$

Zvolme $\delta = \varepsilon\,(\cos\alpha + \sin\alpha - 1)$. Nechť $\mathfrak{D}$ je dělení, splňující podmínky (i), (ii). Protože f má maximální délku v každém intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n$, máme $\sum_{i \in \mathfrak{S}_3} d(f, x_{i-1}, x_i) = \sum_{i \in \mathfrak{S}_3} l_i(\cos\alpha_i + \sin\alpha_i)$. Jelikož pro $x \in \langle\alpha, \pi/2 - \alpha\rangle$ platí $\cos x + \sin x \geqq \cos\alpha + \sin\alpha$ a $\alpha_i \in \langle\alpha, \pi/2 - \alpha\rangle$ pro $i \in \mathfrak{S}_3$, dostaneme $\sum_{i \in \mathfrak{S}_3} d(f, x_{i-1}, x_i) \geqq \sum_{i \in \mathfrak{S}_3} l_i(\cos\alpha + \sin\alpha) = \varepsilon_1(\cos\alpha + \sin\alpha)$. Z toho vyplývá, že $d(f, a, b) = \sum_{i=1}^{n} d(f, x_{i-1}, x_i) \geqq \sum_{i \in \mathfrak{S}_1 \cup \mathfrak{S}_2} d(f, x_{i-1}, x_i) + \varepsilon_1(\cos\alpha + \sin\alpha)$ a tedy $\sum_{i \in \mathfrak{S}_1 \cup \mathfrak{S}_2} l_i \leqq \sum_{i \in \mathfrak{S}_1 \cup \mathfrak{S}_2} d(f, x_{i-1}, x_i) \leqq d(f, a, b) - \varepsilon_1(\cos\alpha + \sin\alpha)$. Z posledního vztahu a ze vztahu (ii) vyplývá $d(\hat{L}, a, b) = \sum_{i \in \mathfrak{S}_1 \cup \mathfrak{S}_2} l_i + \sum_{i \in \mathfrak{S}_3} l_i \leqq d(f, a, b) - \varepsilon_1(\cos\alpha + \sin\alpha - 1)$, tj. $(\varepsilon_1 \geqq \varepsilon)$ $d(\hat{L}, a, b) \leqq d(f, a, b) - \varepsilon(\cos\alpha + \sin\alpha - 1) = d(f, a, b) - \delta$, což je spor s (i). Tím je lemma dokázáno.

Věta 2.2. *Nechť $f(\in)V(a, b)$. Pak $f \in M(a, b)$ právě když pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$ platí*

$$r(f, a, x) = \mathop{\mathrm{V}}_{a}^{x} f.$$

Důkaz. Lze předpokládat (lemma (2.10), že f je neklesající. V tomto případě je $\mathop{\mathrm{V}}_{a}^{x} f = f(x) - f(a)$ a jelikož $f(x) - r(f, a, x)$ je též neklesající, přejde podmínka věty v ekvivalentní podmínku

(i) $$r(f, a, b) = f(b) - f(a)\,.$$

I. Důkaz postačitelnosti. Nechť platí (i), nechť ε, δ jsou libovolná kladná čísla. Pak existují čísla a_i, b_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ pro něž platí

(ii) $$a \leqq a_1 < b_1 \leqq a_2 < b_2 \leqq \ldots \leqq a_n < b_n \leqq b\,, \quad \sum_{i=1}^{n}(b_1 - a_i) < \delta\,,$$

$$\sum_{i=1}^{n}(f(b_i) - f(a_i)) > f(b) - f(a) - \varepsilon\,.$$

Nechť

(iii) $$A, A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots, A_n, B_n, B$$

jsou body grafu funkce f: $A = (a, f(a))$, $A_i = (a_i, f(a_i))$, $B_i = (b_i, f(b_i))$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $B = (b, f(b))$. Nechť L je funkce, jejímž grafem je lomená čára s úhlovými body (iii).

Z (ii) vyplývá $\sum_{i=1}^{n} \varrho(A_k, B_k) \geqq \sum_{i=1}^{n} (f(b_i) - f(a_i)) > f(b) - f(a) - \varepsilon$, $\varrho(A, A_1) + \sum_{i=1}^{n-1} \varrho(B_i, A_{i+1}) + \varrho(B_n, B) > b - a - \delta$. Tedy $d(f, a, b) \geqq d(L, a, b) > b - a + f(b) - f(a) - \varepsilon - \delta$. Ježto ε, δ mohou být libovolně malá, máme $d(f, a, b) \geqq b - a + f(b) - f(a)$, tj. $f \in M(a, b)$.

II. Dokážeme, že podmínka (i) je nutná. Nechť ε, δ jsou libovolná kladná čísla. Nechť $\alpha \in (0, \pi/4\rangle$ splňuje podmínky

(iv) $$(b - a) \operatorname{tg} \alpha < \varepsilon/2\,, \quad (f(b) - f(a) \operatorname{tg} \alpha < \delta\,.$$

Podle lemmatu 2.12 existuje $\delta_1 < 0$ tak, že platí: je-li $\mathfrak{D}$ libovolné dělení intervalu $\langle a, b\rangle$, pak (ve shodě s označením lemmatu 2.12) platí

(v) $$d(\hat{L}, a, b) > b - a + f(b) - f(a) - \delta_1 \Rightarrow \sum_{i \in \mathfrak{S}_3} l_i < \frac{1}{2}\varepsilon\,.$$

Nechť $\mathfrak{D}$ je dělení splňující levou stranu implikace (v). Zřejmě platí (f je neklesající) $\sum_{i \in \mathfrak{S}_1} (f(x_i) - f(x_{-1}) < (b - a) \operatorname{tg} \alpha < \frac{1}{2}\varepsilon$ (podmínka (iv)), $\sum_{i \in \mathfrak{S}_3} (f(x_i) - f(x_{i-1})) \leqq \sum_{i \in \mathfrak{S}_3} l_i < \frac{1}{2}\varepsilon$ (podmínka (v)) a tedy $\sum_{i \in \mathfrak{S}_2} (f(x_i) - f(x_{i-1}) < f(b) - f(a) - \varepsilon$. Jelikož $\sum_{i \in \mathfrak{S}_2} (x_i - x_{i-1}) < (f(b) - f(a)) \operatorname{tg} \alpha < \delta$ (vztah (iv)), máme $V(\delta, f, \langle a, b\rangle) \geqq \sum_{i \in \mathfrak{S}_2} (f(x_i) - f(x_{i-1})) > f(b) - f(a) - \varepsilon$, tedy (vzhledem k libovolnosti ε) $V(\delta, f, \langle a, b\rangle) \geqq f(b) - f(a)$. Jelikož δ bylo libovolné kladné číslo, dostaneme (lemma 2.5) $r(f, a, b) = \varphi(f, a, b) = \lim_{\delta \to 0+} V(\delta, f, \langle a, b\rangle) \geqq f(b) - f(a)$. Protože platí $r(f, a, b) \leqq f(b) - f(a)$, je podmínka (i) a tím i věta dokázána.

Důsledek. *Nechť $f \in V(a, b)$, nechť $r_1(x) = r(f, a, x)$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$. Pak $r_1 \in M(a, b)$.*

Důkaz. Protože je r_1 neklesající, stačí podle věty 2.2 dokázat, že $r(r_1, a, x) = r_1(x) - r_1(a) = r_1(x)$ (neboť $r_1(a) = 0$), což je tvrzením věty 2.1.

Lemma 2.13. *Nechť f je absolutně spojitá v $\langle a, b\rangle$, nechť $g \in M(a, b)$. Pak pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$ platí*

$$\operatorname*{V}_a^x (f + g) = \operatorname*{V}_a^x f + \operatorname*{V}_a^x g\,.$$

Důkaz. Zřejmě stačí dokázat podmínku pro $x = b$. Nechť $\varepsilon > 0$. Existuje $\delta > 0$ takové, že platí

$$\text{(i)} \qquad A \in \mathfrak{A}(a, b)\,, \quad \mu(A) < \delta \Rightarrow v_f(A) < \varepsilon\,.$$

Podle věty 2.2 existuje $A_1 \in \mathfrak{A}(a, b)$, $\mu(A_1 < \delta$, $v_g(A_1) > \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\, g - \varepsilon$ (v_f je definována vztahem (2.6)). Položme $A_2 = \langle a, b\rangle - A_1$. Protože platí (podmínka (i)) $v_f(A_1) < \varepsilon$, máme $v_f(A_2) > \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\, f - \varepsilon$. Z uvedených vztahů vyplývá $v_{f+g}(A_1) \geqq v_g(A_1) - v_f(A_1) > > \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\, g - 2\varepsilon$, $v_{f+g}(A_2) \geqq v_f(A_2) - v_g(A_2) > \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\, f - 2\varepsilon$ a tedy $v_{f+g}(\langle a, b\rangle) = = v_{f+g}(A_1) + v_{f+g}(A_2) > \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\, f + \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\, g - 4\varepsilon$. Protože ε je libovolně malé, máme $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\,(f + g) = v_{f+g}(\langle a, b\rangle) \geqq \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\, f + \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\, g$. Protože platí $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\,(f + g) \leqq \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\, f + \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\, g$, je lemma dokázáno.

Věta 2.3. *Nechť f je absolutně spojitá v $\langle a, b\rangle$ a nechť $g \in M(a, b)$. Pak platí*

$$d(f + g, a, b) = d(f, a, b) + \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\, g\,.$$

Důkaz. Podle lemmat 2.11 a 2.13 stačí větu dokázat za předpokladu, že f, g jsou neklesající v $\langle a, b\rangle$. V tomto případě má tvrzení věty tvar

$$d(f + g, a, b) = d(f, a, b) + g(b) - g(a)\,.$$

I. Nechť $\mathfrak{D}$: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ je libovolné dělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Označme $A_k = (x_k, f(x_k) + g(x_k))$, $\hat{A}_k = (x_k, f(x_k))$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Zřejmě platí $\varrho(A_{k-1}, A_k) \leqq \varrho(\hat{A}_{k-1}, \hat{A}_k) + g(x_k) - g(x_{k-1})$, $k = 1, 2, \ldots, n$, z čehož vyplývá vztah $d(f + g, a, b) \leqq d(f, a, b) + g(b) - g(a)$. Současně je zřejmé, že pro libovolné neklesající spojité funkce f, g v $\langle a, b\rangle$ platí

$$\text{(2.10)} \qquad d(f, u, v) \leqq d(f + g, u, v) \leqq d(f, u, v) + g(v) + g(u)\,,$$

jestliže $a \leqq u < v \leqq b$.

II. Nyní dokážeme, že platí $d(f + g, a, b) \geqq d(f, a, b) + g(b) - g(a)$. Nechť $\varepsilon > 0$. Protože funkce f je absolutně spojitá v $\langle a, b\rangle$, existuje $\delta > 0$ tak, že platí: je-li $\{J_k\}_{k=1}^m$ libovolný skoro disjunktní systém intervalů, $J_k \subset \langle a, b\rangle$, $k = 1, 2, \ldots$ $\ldots, m$, pak

$$\text{(i)} \qquad \sum_{k=1}^{m} \mu(J_k) < \delta \Rightarrow \sum_{k=1}^{m} v_f(J_k) < \varepsilon\,.$$

Protože $g \in M(a, b)$, existují (podle věty (2.2) čísla a_k, b_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, $a \leqq a_1 < < b_1 \leqq a_2 < b_2 \leqq \ldots \leqq a_n < b_n \leqq b$ tak, že platí

$$\text{(ii)} \qquad \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta\,, \quad \sum_{k=1}^{n} (g(b_k) - g(a_k)) > g(b) - g(a) - \varepsilon\,.$$

Je zřejmé, že číslo δ v podmínkách (i), (ii) může být libovolně malé (např. $\delta < \varepsilon$). Označme $b_0 = a$, $a_{n+1} = b$. Ze vztahu (2.10) vyplývá

$$\text{(iii)} \qquad \sum_{k=0}^{n} d(f + g, b_k, a_{k+1}) \geqq \sum_{k=0}^{n} d(f, b_k, a_{k+1})\,.$$

Jest $d(f, a, b) = \sum_{k=1}^{n} d(f, a_k, b_k) + \sum_{k=0}^{n} d(f, b_k, a_{k+1})$; z (i) vyplývá $\sum_{k=1}^{n} d(f, a_k, b_k) \leqq \leqq \sum_{k=1}^{n} \{(b_k - a_k) + f(b_k) - f(a_k)\} < \varepsilon + \delta$, tedy $\sum_{k=0}^{n} d(f, b_k, a_{k+1}) > d(f, a, b) - \varepsilon - - \delta$, z čehož vzhledem k (iii) vyplývá

$$\text{(iv)} \qquad \sum_{k=0}^{n} d(f + g, b_k, a_{k+1}) > d(f, a, b) - \varepsilon - \delta\,.$$

Dále jest podle (2.10) $d(f + g, a_k, b_k) \geqq d(g, a_k, b_k) > g(b_k) - g(a_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, z čehož podle (ii) dostaneme

$$\text{(v)} \qquad \sum_{i=1}^{n} d(f + g, a_k, b_k) > g(b) - g(a) - \varepsilon\,.$$

Ze vztahu (iv), (v) vyplývá snadno, že $d(f + g, a, b) > d(f, a, b) + g(b) - g(a) - - 2\varepsilon - \delta$. Jelikož ε, δ lze volit libovolně malá, platí $d(f + g, a, b) \geqq d(f, a, b) + + g(b) - g(a)$, čímž je potřebné tvrzení dokázáno.

Lemma 2.14. *Nechť $f \in M(a, b)$. Pak platí*

$$f'(x) = 0$$

pro skoro všechna $x \in \langle a, b \rangle$.

Důkaz. Označíme-li $v_f(x) = \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f$, $x \in \langle a, b \rangle$, pak pro skoro všechna $x \in \langle a, b \rangle$ platí $|f'(x)| \leqq v_f'(x)$ (dokonce $|f'(x)| = v_f'(x)$ skoro všude v $\langle a, b \rangle$). Jelikož $v_f \in \in M(a, b)$ (důsledek lemmatu 2.11), stačí tvrzení lemmatu dokázat za předpokladu, že f je neklesající v $\langle a, b \rangle$. V tomto případě je $f'(x) \geqq 0$ skoro všude v $\langle a, b \rangle$. Položme $f_1(x) = \int_a^x f'(t)\,dt$. Funkce f_1 je absolutně spojitá a neklesající v $\langle a, b \rangle$. Předpokládejme, že $f'(x) > 0$ na množině kladné míry. Pak $f_1(b) > 0$, z čenož vyplývá $d(f_1, a, b) > b - a$. Jelikož $f - f_1$ je neklesající v $\langle a, b \rangle$, jest podle (2.10) $d(f - f_1, a, b) \leqq d(f, a, b)$. Z věty 2.3 vyplývá $d(f - f_1, a, b) = d(f_1, a, b) + f(b) - f(a)$ a tedy $d(f, a, b) > (b - a) + f(b) - f(a)$, což je spor. Tím je lemma dokázáno.

Lemma 2.15. *Nechť $f \in V(a, b)$. Pak pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$ platí*

$$\int_a^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t = \mathop{\mathrm{V}}_a^x f - r(f, a, x)\,.$$

Důkaz. Položme $f_1(x) = \int_a^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t$. Jest pro skoro všechna $x \in \langle a, b\rangle$ $f_1'(x) = |f'(x)|$. Jelikož $r(f, a, x) \in M(a, b)$ (důsledek věty 2.2), plyne z lemmatu 2.14 $r'(f, a, x) = 0$ skoro všude v $\langle a, b\rangle$. Položme $v_f(x) = \mathop{\mathrm{V}}_a^x f$, $x \in \langle a, b\rangle$. Protože je $v_f'(x) = |f'(x)|$ skoro všude v $\langle a, b\rangle$, máme $v_f'(x) - r'(f, a, x) = |f'(x)|$ skoro všude v $\langle a, b\rangle$. Jelikož funkce f_1 a funkce $v_f(x) - r(f, a, x)$ (důsledek věty 2.1) jsou absolutně spojité v $\langle a, b\rangle$ a mají skoro všude v $\langle a, b\rangle$ stejné derivace, existuje konstanta C taková, že platí $f_1(x) = v_f(x) - r(f, a, x) + C$, $x \in \langle a, b\rangle$. Dosadíme-li v tomto vztahu $x = a$, dostaneme $C = 0$. Tím je lemma dokázáno.

Věta 2.4. *Nechť $f \in V(a, b)$. Pak $f \in M(a, b)$ právě když*

$$f'(x) = 0$$

skoro všude v $\langle a, b\rangle$.

Důkaz. Nutnost podmínky vyplývá z lemmatu 2.14. Nechť tedy je $f'(x) = 0$ skoro všude v $\langle a, b\rangle$. Pak $f_1(x) = \int_a^x (f'(t)\,\mathrm{d}t = 0$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$. Z lemmatu 2.15 pak vyplývá, že $\mathop{\mathrm{V}}_a^x f = r(f, a, x)$ pro všechna $x \in \langle a, b)$, což podle věty 2.2 znamená, že $f \in M(a,b)$. Tím je věta dokázána.

Poznámka. Funkce $f \in V(a, b)$ se nazývá singulární, jestliže $f'(x) = 0$ skoro všude v $\langle a, b\rangle$. Věta 2.4 tedy tvrdí, že $f \in M(a, b)$ právě tehdy když f je singulární v $\langle a, b\rangle$.

Lemma 2.16. *Nechť f je absolutně spojitá v $\langle a, b\rangle$. Pak*

$$d(f, a, b) = \int_a^b \sqrt{[1 + f'^2(x)]}\,\mathrm{d}x\,.$$

Důkaz. Je podán v [2], str. 543.

Věta 2.5. *Nechť $f \in V(a, b)$. Pak platí*

$$d(f, a, b) = \int_a^b \sqrt{[1 + f'^2(x)]}\,\mathrm{d}x + \mathop{\mathrm{V}}_a^b f - \int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x\,.$$

Důkaz. Položme $f_1(x) = \int_a^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t$, $v_f(x) = \mathop{\mathrm{V}}_a^x f$ pro $x \in \langle a, b\rangle$. Z lemmatu 2.15 vyplývá, že $v_f(x) = r(f, a, x) + f_1(x)$; funkce f_1 je absolutně spojitá v $\langle a, b\rangle$ a

$r(f, a, x) \in M(a, b)$ (důsledek věty 2.2). Z lemmatu 2.11 a věty 2.3 nyní plyne

$$\text{(i)} \qquad d(f, a, b) = d(v_f, a, \mathrm{b}) = d(f_1, a, b) + r(f, a, b)\,.$$

Jelikož $r(f, a, x) \in M(a, b)$, jest (věta 2.4) $r'(f, a, x) = 0$ skoro všude v $\langle a, b\rangle$ a tedy $|f'(x)| = v_f'(x) = f_1'(x)$ skoro všude v $\langle a, b\rangle$. Podle lemmatu 2.16 máme

$$\text{(ii)} \qquad d(f_1, a, b) = \int_a^b \sqrt{[1 + f_1'^2(x)]}\, \mathrm{d}x = \int_a^b \sqrt{[1 + f'^2(x)]}\, \mathrm{d}x\,.$$

Podle lemmatu 2.15 jest

$$\text{(iii)} \qquad r(f, a, b) = \operatorname*{V}_a^b f - \int_a^b |f'(x)|\, \mathrm{d}x\,.$$

Dosazením do (i) ze vztahů (ii), (iii) dostaneme tvrzení věty.

Poznámka. Funkce maximální délky byly vyšetřovány z poněkud jiného hlediska v [1].

Literatura

[1] *Bečvář J.:* O monotonních spojitých funkcích, jejichž graf má maximální délku. Čas. pro pěst. matematiky, roč. *81* (1956), 172—180.

[2] *Natanson I. P.:* Теория функций вещественной переменной Гос. изд. т. т. лит., Moskva 1957

Adresa autora: 461 17 Liberec, Hálkova 6 (Vysoká škola strojní a textilní).

Zusammenfassung

ÜBER DIE KURVEN VON MAXIMALER LÄNGE

MILOSLAV NEKVINDA, Liberec

Es sei K eine Kurve, die durch die Gleichung $y = f(x)$, $a \leqq x \leqq b$ gegeben ist. Es sei vorausgesetzt, dass f stetig im Intervall $\langle a, b\rangle$ und von beschränkter Schwankung ist. Von der Kurve K soll gesagt werden, dass sie von maximaler Länge ist, wenn die Beziehung $d(f, a, b) = b - a + \operatorname*{V}_a^b f$ gilt, wobei $d(f, a, b)$ die Länge der Kurve K und $\operatorname*{V}_a^b f$ die Schwankung der entsprechenden Funktion f im Intervall $\langle a, b\rangle$ bedeuten. In der Arbeit werden die Eigenschaften von Kurven maximaler Länge untersucht. Es wird u. a. gezeigt, dass der folgende Satz gilt: *Eine Kurve K ist genau dann von maximaler Länge. wenn die ihr entsprechende Funktion f singular ist.*