Úlohy a problémy

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 99 (1974), No. 1, 90--93

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108210`

ÚLOHY A PROBLÉMY

Úloha č. 1. Buďtež dány tři body A_{13}, A_{24}, S neležící v jedné přímce. Nechť bod A_{13} (A_{24}) je středem svazku paprsků Σ_{13} (Σ_{24}). Ze svazku Σ_{13} (Σ_{24}) vyberte všechny dvojice paprsků a_1, a_3 (a_2, a_4), kterým lze ve svazku Σ_{24} (Σ_{13}) přiřadit dvojice a_2, a_4 (a_1, a_3) tak, aby každá čtveřice a_1, a_2, a_3, a_4 omezovala tětivový čtyřúhelník, vepsaný do kružnice k o středu S.

1) Nalezněte planimetrickou konstrukci, která žádané přiřazení umožní.

2) Ukažte, že přípustnou trojicí bodů A_{13}, A_{24}, S je každá trojice, kdy body A_{13}, A_{24}, S tvoří trojúhelník ostroúhlý, kde P je pata výšky, spuštěné z bodu S na stranu $A_{13}A_{24}$. P je společný průsečík kružnic c_i, opsaných čtyřem trojúhelníkům, tvořeným přímkami a_j, a_k, a_m, na nichž leží strany uvažovaného tětivového čtyřúhelníka (i, j, k, m je libovolná cyklická permutace čísel 1, 2, 3, 4).

Úloha č. 2. Body A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) jsou vrcholy rovinného čtyřúhelníka $[A_i]$. Označme Q^i_{rs} paty kolmic, spuštěných z bodu A_i na strany a úhlopříčku daného čtyřúhelníka $[A_i]$, jež neprocházejí bodem A_i (r, s je libovolná kombinace 2. třídy čísel j, k, m; i, j, k, m libovolná cyklická permutace čísel 1, 2, 3, 4). Trojice bodů Q^i_{rs} při pevném i určují kružnice g_i.

Ukažte, že platí:

1) kružnice g_i ($i = 1, 2, 3, 4$) se protínají v jednom bodě B,

2) tvoří-li např. body A_i ($i = 1, 2, 3$) pevný trojúhelník, zatím co bod A_4 se v rovině tohoto trojúhelníka libovolně pohybuje tak, že žádná trojice bodů $A_1A_2A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_2A_3A_4$ neleží v přímce, opisuje bod B Feuerbachovu kružnici příslušného pevného trojúhelníka.

Josef Brejcha, Brno

Řešení úlohy č. 1 (autor Josef Král) z roč. *97* (1972), str. 334.

Úloha: Nechť U je resolutivní množina s hranicí $U^* \neq \emptyset$ v harmonickém prostoru X (viz [1]) a označme pro každý kompakt $K \subset X$ symbolem $C(K)$ prostor všech spojitých (konečných) reálných funkcí na K. Každé funkci $f \in C(U^*)$ je tedy přiřazena harmonická funkce H^U_f na U, která je zobecněným řešením (v Perronově smyslu) Dirichletovy úlohy příslušné k množině U a okrajové podmínce f. Nechť U_r značí množinu všech $x \in U^*$, pro něž $\lim_{y \to x\, y \in U} H^U_f(y) = f(x)$ pro každou funkci $f \in C(U^*)$. Množina U se nazývá semiregulární, jestliže pro každou funkci $f \in C(U^*)$ lze příslušnou funkci H^U_f rozšířit na $F \in C(U \cup U^*)$. Je-li U semiregulární, pak U_r je kompaktní.

Obrácení tohoto tvrzení neplatí v Bauerových harmonických prostorech. Rozhodněte, zda obrácené tvrzení platí v Brelotových prostorech (nebo alespoň v harmonickém prostoru indukovaném klasickými harmonickými funkcemi na n-rozměrném euklidovském prostoru $X = R^n$), tj. rozhodněte o správnosti následujícího

Tvrzení. *Nechť X je Brelotův prostor a buď $U \subset X$ relativně kompaktní otevřená (a tedy resolutivní) množina, $U^* \neq \emptyset$. Pak U je semiregulární, právě když U_r je kompaktní.*

V [4] je dokázáno, že tvrzení uvedené v úloze platí pro jistou třídu harmonických prostorů (speciálně pro klasické harmonické funkce na R^n). Nyní ukážeme (věta 5), že zmíněné tvrzení obecně v Brelotových prostorech neplatí.

1. Označení. Je-li M množina v topologickém prostoru, označíme $\overline{M}$ její uzávěr a int M její vnitřek.

Nyní budeme uvažovat prostor $X = E_3$ a klasické harmonické funkce. Nechť G_0 je Lebesgueova oblast v E_3 s iregulárním hrotem x. Předpokládejme, že G_1 je neprázdná otevřená množina s hladkou hranicí, pro niž $\overline{G}_1 \subset G_0$, a pro y z uzávěru množiny $G = G_0 - \overline{G}_1$ označme symbolem μ_y výmet (balayage) Diracovy míry ε_y soustředěné v bodě y na množinu $E_3 - G$. (Pro $z \in G$ je tedy μ_z harmonická míra příslušná množině G a bodu z.) Protože bod x je iregulární bod souvislé množiny G, nosič míry μ_x obsahuje množinu G_r všech regulárních bodů množiny G ([3], lemma 3.8). Odtud plyne, že

$$0 < \mu_x(G_1^*) < 1\,. \tag{1}$$

2. Lemma. *Nechť $c > 0$ a nechť f je funkce na G^* taková, že $f(G_1^*) = \{0\}, f(G_0^*) = \{c\}$. Potom $H_f^G > 0$ na G a*

$$\liminf_{y \to x,\, y \in G} H_f^G(y) < c\,. \tag{2}$$

Důkaz. Existují $x_n \in G$ konvergující k x, pro něž míry μ_{x_n} konvergují slabě k μ_x ([3]; lemma 3.1). Speciálně

$$\lim_{n \to \infty} H_f^G(x_n) = c \,.\, \mu_x(G_0^*)\,.$$

Z (1) plynou nerovnosti $0 < \mu_x(G_0^*) < 1$ a tedy platí (2). Protože pro jisté $x_n \in G$ je $H_f^G(x_n) > 0$ a funkce f je nezáporná, je $H_f^G > 0$ na G.

3. Lemma. *Nechť $g \in C(G_1^*)$. Potom existuje právě jedno $c \in R^1$ tak, že Dirichletova úloha příslušná k množině G a funkci*

$$f = \begin{cases} g & na \quad G_1^* \\ c & na \quad G_0^* \end{cases}$$

má klasické řešení.

D ů k a z. Z lemmatu 2 plyne, že konstanta c s uvedenou vlastností existuje nejvýše jedna. Označme μ_x^1 restrikci míry μ_x na G_1^* a položme (srv. s (1))

$$c = [\mu_x^1(G_1^*)]^{-1} \cdot \mu_x^1(g) . \tag{3}$$

Stačí ukázat, že Dirichletova úloha příslušná k množině G a okrajové podmínce

$$h = \begin{cases} g - c & \text{na } G_1^* \\ 0 & \text{na } G_0^* \end{cases}$$

má klasické řešení. K tomu ovšem stačí zkoumat chování funkce H_h^G v okolí bodu x. Je-li však $x_n \in G$, $x_n \to x$ a míry μ_{x_n} konvergují slabě k míře μ, existuje $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$ tak, že

$$\mu = \alpha \cdot \varepsilon_x + (1 - \alpha)\, \mu_x$$

([2], Corollary 7.2.6). Vidíme, že

$$\lim_{n \to \infty} H_h^G(x_n) = 0 + (1 - \alpha) \cdot [\mu_x^1(g) - c \cdot \mu_x^1(G_1^*] = 0 = h(x) .$$

Tím je lemma dokázáno.

4. Lemma. *Nechť F je uzavřená podmnožina G_0 a nechť $G_0 - F$ je souvislá množina. Označme $\mathscr{K}$ systém všech spojitých funkcí na $\bar{G}_0 - F$, které jsou harmonické na $G_0 - F$ a konstantní na G_0^*; nechť $x_0 \in \bar{G}_0 - F$. Jestliže $k_n \in \mathscr{K}$ je neklesající posloupnost s limitou k a $k(x_0) < \infty$, potom $k \in \mathscr{K}$.*

D ů k a z. Sestrojme neprázdnou otevřenou množinu G_1 s hladkou hranicí, pro niž $F \subset G_1 \subset \bar{G}_1 \subset G_0$.

Z klasické Harnackovy věty vyplývá, že k je harmonická funkce na oblasti $G_0 - F$. Toto je zcela zřejmé, pokud $x_0 \in G_0 - F$. Z předpokladu $k(y) = +\infty$ pro všechna $y \in G_1^*$ plyne snadno podle lemmatu 3 (srv. rovnost (3)), že $k(z) = +\infty$ pro každé $z \in G_0^*$. Je tedy pravda, že funkce k je v každém případě konečná v některém bodě z $G_0 - F$.

Nechť $m > n$ jsou přirozená čísla a $w \in G_0^*$. Protože funkce k je omezená na kompaktní množině $G_1^* \subset G_0 - F$, je posloupnost $\{k_n(w)\}$ omezená (srv. opět s (3)). Z principu maxima pro harmonické funkce dostáváme nerovnost

$$\sup \{(k_m - k_n)(z);\quad z \in \bar{G}_0 - G_1) \leqq \sup \{(k_m - k_n)(z) ;\quad z \in G_1^* \cup \{w\}\} . \tag{4}$$

Posloupnost $\{k_n\}$ konverguje stejnoměrně na G_1^* (podle Diniho věty) a ze (4) tedy snadno plyne, že k je spojitá funkce na $\bar{G}_0 - G_1$. Nyní se již snadno důkaz tvrzení dokončí.

5. Věta. *Nechť G_0 a G_1 mají stejný význam jako v odst. 1. Nechť X je Alexandrovova kompaktifikace G_0. Pro každou otevřenou množinu $V \subset X$ označíme $\mathscr{H}(V)$*

množinu všech reálných spojitých funkcí na V, jejichž restrikce na $V \cap G_0$ jsou řešení Laplaceovy rovnice na $V \cap G_0$. Potom $(X, \mathscr{H})$ je Brelotův prostor, na němž konstanty jsou harmonické. Množina $U = G_0 - \bar{G}_1 \subset X$ není semiregulární a přitom $U_r = G_1^*$ je kompaktní.

Důkaz. Prostor X je zřejmě lokálně souvislý a nemá žádné isolované body. Z lemmatu 3 plyne, že regulární množiny vzhledem k $\mathscr{H}$ tvoří basi X. Pomocí lemmatu 4 a klasické Harnackovy věty se snadno odvodí, že $\mathscr{H}$ má Brelotovu konvergenční vlastnost. $(X, \mathscr{H})$ je tedy Brelotův prostor.

Uvažujme nyní otevřenou množinu $U = G_0 - \bar{G}_1$. Každý bod z G_1^* je regulární bod množiny U. Z lemmatu 2 plyne, že ideální bod ω $(\{\omega\} = X - G_0)$ je iregulární bod množiny U a tedy U_r je kompaktní. Na $U^* = G_1^* \cup \{\omega\}$ definujme funkci h tak, aby $h(G_1^*) = \{0\}$ a $h(\omega) = 1$. Kdyby množina U byla semiregulární, existovala by

$$\lim_{y \to \omega,\, y \in U} H_h^U(y) = c\,.$$

Pro funkci f definovanou v lemmatu 2 by pak existovalo klasické řešení Dirichletovy úlohy příslušné k množině G a funkci f, což je spor s (2).

Množina U není tedy semiregulární a důkaz věty je hotov.

6. Poznámka. Tvrzení, že $(X, \mathscr{H})$ je Brelotův prostor, je uvedeno bez důkazu v [2] (Excersice 6.3.10). Na jiný příklad harmonického prostoru s analogickými vlastnostmi, uvedený v článku C. Constantinescu (Rev. Roum. Math. Pures Appl. 10 (1965), 267–170), mne upozornil J. Lukeš.

Zvolíme-li $x_0 \in G_1$ a uvažujeme harmonický podprostor $X_0 = X - \{x_0\}$ prostoru $(X(\mathscr{H}),$ dostáváme příklad nekompaktního Brelotova harmonického prostoru, v němž oblast U má uzavřenou množinu regulárních bodů a není semiregulární.

Literatura

[1] *C. Constantinescu:* Harmonic spaces and their connections with the semi-elliptic differential equations and with the Markov processes, Ellipitsche Differentialgleichungen (Symposium), Akademie-Verlag, Berlin, 1969.

[2] *C. Constantinescu - A. Cornea:* Potential theory on harmonic spaces, Springer Verlag, Berlin, 1972.

[3] *E. G. Effros - J. L. Kazdan:* Applications of Choquet simplexes to elliptic and parabolic boundary value problems, J. Diff. Equatinos, *8* (1970), 95–134.

[4] *I. Netuka:* Poznámka o semiregulárních množinách, Čas. pěst. mat. *98* (1973), 419–421.

Ivan Netuka, Praha