O. M. Fomenko

Об эквивалентах асимптотических законов распределения различных множеств простых чисел

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 86 (1961), No. 2, 195--199

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108207`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 86 (1961), Praha

ОБ ЭКВИВАЛЕНТАХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РАЗЛИЧНЫХ МНОЖЕСТВ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

О. М. ФОМЕНКО, Краснодар (СССР)

(Поступило в редакцию 23/XII 1959 г.)

Для произвольного бесконечного множества $\mathfrak{M}$ простых чисел вводятся аналоги известных функций $\pi(x)$, $\vartheta(x)$, $\psi(x)$, и доказывается теорема, характеризующая их совместное асимптотическое поведение.

Известный асимптотический закон распределения простых чисел в натуральном ряду, заключающийся в том, что

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}, \tag{1}$$

имеет и другие формы, эквивалентные (1), например,

$$\sum_{p \leqq x} \ln p \sim x . \tag{2}$$

В настоящей заметке мы докажем одну общую теорему, из которой будет следовать, в частности, эквивалентность (1) и (2), а также и другие предложения.

Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторое бесконечное множество простых чисел. Введем по аналогии с известными функциями Чебышева функции

$$\vartheta_{\mathfrak{M}}(x) = \sum_{p \leqq x} \ln p , \quad \psi_{\mathfrak{M}}(x) = \sum_{p^k \leqq x} \ln p , \quad p \in \mathfrak{M} , \tag{3}$$

причем вторая сумма распространяется по всем комбинациям простых $p \in \mathfrak{M}$ и натуральных k с условием $p^k \leqq x$ $(x > 0)$. Без труда устанавливаем, что

$$\psi_{\mathfrak{M}}(x) = \vartheta_{\mathfrak{M}}(x) + \vartheta_{\mathfrak{M}}(x^{\frac{1}{2}}) + \vartheta_{\mathfrak{M}}(x^{\frac{1}{3}}) + \ldots \tag{4}$$

Группируя члены с одним и тем же p, получим

$$\psi_{\mathfrak{M}}(x) = \sum_{p \leqq x} \left[\frac{\ln x}{\ln p}\right] \ln p , \quad p \in \mathfrak{M} . \tag{5}$$

Обозначим через $\pi_{\mathfrak{M}}(x)$ число простых $p \leqq x$, $p \in \mathfrak{M}$. Имеем

$$\vartheta_{\mathfrak{M}}(x) \leqq \psi_{\mathfrak{M}}(x) \leqq \sum_{p \leqq x} \ln x = \pi_{\mathfrak{M}}(x) \ln x , \quad p \in \mathfrak{M} . \tag{6}$$

Рассмотрим выражения

$$\frac{\pi_{\mathfrak{M}}(x)}{F(x)}, \quad \frac{\vartheta_{\mathfrak{M}}(x)}{F(x)\ln x}, \quad \frac{\psi_{\mathfrak{M}}(x)}{F(x)\ln x},$$

где $F(x)$ — некоторая функция, определенная и положительная на $(0, \infty)$. Пусть $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{N}_3$, $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{n}_2$, $\mathfrak{n}_3$, соответственно, верхние и нижние пределы этих выражений при $x \to \infty$. В силу (6) имеем

$$\mathfrak{N}_2 \leqq \mathfrak{N}_3 \leqq \mathfrak{N}_1, \quad \mathfrak{n}_2 \leqq \mathfrak{n}_3 \leqq \mathfrak{n}_1 .$$

Пусть $0 < \alpha < 1$; далее предполагаем, что $x > 1$. Ясно, что

$$\vartheta_{\mathfrak{M}}(x) \geqq \sum_{x^\alpha < p \leqq x} \ln p \leqq \{\pi_{\mathfrak{M}}(x) - \pi_{\mathfrak{M}}(x^\alpha)\} \ln x^\alpha =$$
$$= \{\pi_{\mathfrak{M}}(x) - \pi_{\mathfrak{M}}(x^\alpha)\} \alpha \ln x ; \quad \pi_{\mathfrak{M}}(x^\alpha) < x^\alpha .$$

Поэтому

(7) $$\frac{\vartheta_{\mathfrak{M}}(x)}{F(x)\ln x} > \alpha \left\{\frac{\pi_{\mathfrak{M}}(x)}{F(x)} - \frac{x^\alpha}{F(x)}\right\}.$$

Пусть $F(x)$ — такая функция, что

(8) $$x^{\beta-\varepsilon} \ll F(x) \ll x^\beta ,$$

где β постоянно, $0 < \alpha < \beta$, а ε удовлетворяет условию $0 < \varepsilon < \beta - \alpha$ и может быть выбрано сколь угодно малым ($A \ll B$ эквивалентно $A = O(B)$). Фиксируем α и устремляем x к ∞. Тогда

$$\frac{x^\alpha}{F(x)} \to 0 .$$

Поэтому $\mathfrak{N}_2 \geqq \alpha\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{n}_2 \geqq \alpha\mathfrak{n}_1$. Отсюда $\mathfrak{N}_2 \geqq \beta\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{n}_2 \geqq \beta\mathfrak{n}_1$. Теперь мы видим, что для того, чтобы получить равенства $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_2 = \mathfrak{N}_3$, $\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}_2 = \mathfrak{n}_3$, нужно брать $F(x)$ с $\beta = 1$ (как нетрудно видеть, если $F(x)$ удовлетворяет условию (8) с некоторым β, то это β единственно). Из всего сказанного вытекает

Теорема. *Пусть $\pi_{\mathfrak{M}}(x)$, $\vartheta_{\mathfrak{M}}(x)$, $\psi_{\mathfrak{M}}(x)$ имеют вышеуказанный смысл, $F(x)$ — положительная на $(0,\infty)$ функция, удовлетворяющая условию*

$$x^{\beta-\varepsilon} \ll F(x) \ll x^\beta ,$$

где $\varepsilon > 0$ может быть выбрано сколь угодно малым, $\beta > 0$ и постоянно. Рассмотрим выражения

$$\frac{\pi_{\mathfrak{M}}(x)}{F(x)}, \quad \frac{\vartheta_{\mathfrak{M}}(x)}{F(x)\ln x}, \quad \frac{\psi_{\mathfrak{M}}(x)}{F(x)\ln x}.$$

Пусть $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \mathfrak{N}_3, \mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \mathfrak{n}_3$ — их соответственные верхние и нижние пределы при $x \to \infty$. Тогда имеют место соотношения

(9) $$\mathfrak{N}_2 \leqq \mathfrak{N}_3 \leqq \mathfrak{N}_1, \quad \mathfrak{n}_2 \leqq \mathfrak{n}_3 \leqq \mathfrak{n}_1, \quad \mathfrak{N}_2 \geqq \beta\mathfrak{N}_1, \quad \mathfrak{n}_2 \geqq \beta\mathfrak{n}_1,$$

В частности, если $\beta = 1$, *то*

$$\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_2 = \mathfrak{N}_3\,, \quad \mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}_2 = \mathfrak{n}_3\,. \tag{10}$$

Из этой теоремы, конкретизируя $\mathfrak{M}$ и $F(x)$, по большей части непосредственно можно получать различные следствия. Приведем некоторые из них.

1. Для обычного множества простых чисел в качестве непосредственного следствия получаем теорему 3 из главы 1 книги [1].

2. Известно, что (элементарное доказательство см. в [2])

$$\pi(x, k, l) \sim \frac{1}{\phi(k)} \frac{x}{\ln x}\,. \tag{11}$$

Нетрудно видеть, что этот закон в силу нашей теоремы эквивалентен соотношению

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv l (\operatorname{mod} k)}} \ln p \sim \frac{x}{\phi(k)}\,. \tag{12}$$

3. Гипотетический закон распределения „близнецов", как известно (см. [3]), таков:

$$\pi_2(x) \sim c\, \frac{x}{(\ln x)^2}\,, \tag{13}$$

где $\pi_2(x)$ — число „близнецов" $p_1, p_1 + 2$ в отрезке $(1, x)$, $c = 2 \prod\limits_{p > 2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right)$.

В силу теоремы этот закон эквивалентен соотношениям (p_1 — меньшее из „близнецов")

$$\sum_{p_1 \leq x} \ln p_1 \sim c\, \frac{x}{\ln x}\,, \tag{14}$$

$$\sum_{p_1^k \leq x} \ln p_1 \sim c\, \frac{x}{\ln x}\,. \tag{15}$$

Если ввести по аналогии с известной функцией Мангольдта функцию $\Lambda_1(n)$ ($\Lambda_1(n) = \ln p_1$, если $n = p_1^k$, $\Lambda_1(n) = 0$ для остальных n), то (15) запишется так:

$$\sum_{n \leq x} \Lambda_1(n) \sim c\, \frac{x}{\ln x}\,. \tag{16}$$

4. Рассмотрим группы из m простых чисел $p_{1,m}, p_{1,m} + 2k_1, \ldots, p_{1,m} + 2k_1 + \ldots + 2k_{m-1}$. Если наложить на четные числа $2k_1, 2k_2, \ldots, 2k_{m-1}$ некоторые естественные условия (см. [4]), то можно предполагать, что (см. [3,] [5])

$$\pi_{2k_1, 2k_2, \ldots, 2k_{m-1}}(x) \sim A\, \frac{x}{(\ln x)^m}\,, \tag{17}$$

где $\pi_{2k_1, 2k_2, \ldots, 2k_{m-1}}(x)$ — число групп простых чисел $p_{1,m}$, $p_{1,m} + 2k_1, \ldots, p_{1,m} + 2k_1 + \ldots + 2k_{m-1}$ в отрезке $(1, x)$, A — некоторая постоянная величина. В силу нашей теоремы эта гипотеза эквивалентна соотновшениям

$$\sum_{p_{1,m} \leqq x} \ln p_{1,m} \sim A \frac{x}{(\ln x)^{m-1}}, \tag{18}$$

$$\sum_{p^k{}_{1,m} \leqq x} \ln p_{1,m} \sim A \frac{x}{(\ln x)^{m-1}}. \tag{19}$$

Литература

[1] *А. Е. Ингам:* Распределение простых чисел. Москва-Ленинград, 1936.

[2] *А. О. Гельфонд:* Об арифметическом эквиваленте аналитичности L-ряда Дирихле на прямой $\operatorname{Re} s = 1$. Известия Ак. Наук СССР, серия матем., *20*, 1956, 145—166.

[3] *G. H. Hardy, D. E. Littlewood:* Some problems of „partitio numerorum"; III: on the expression of a number as a sum of primes. Acta Math., *44*, 1923, 1—70.

[4] *В. А. Голубев:* Обобщенные числовые функции и распределение групп простых чисел, Известия высших учебных заведений. Математика, *5*, 1959, 93—97.

[5] *В. А. Голубев:* О группах простых чисел. Ученные записки Калининского гос. пед. ин-та, *26*, 1958, 49—56.

Výtah

O EKVIVALENTNÍCH FORMÁCH ASYMPTOTICKÝCH ZÁKONŮ ROZDĚLENÍ RŮZNÝCH MNOŽIN PRVOČÍSEL

O. M. Fomenko, Krasnodar (SSSR)

V článku se zavádějí pro libovolnou nekonečnou množinu $\mathfrak{M}$ prvočísel $p \in \mathfrak{M}$ funkce

$$\pi_{\mathfrak{M}}(x) = \sum_{p \leqq x} 1\,, \quad \vartheta_{\mathfrak{M}}(x) = \sum_{p \leqq x} \ln p\,, \quad \psi_{\mathfrak{M}} = \sum_{p^k \leqq x} \ln p\,;$$

přitom se poslední součet vztahuje na všechny dvojice (p, k), $p \in \mathfrak{M}$, k přirozené, za podmínky $p^k \leqq x$ $(x > 1)$.

Věta. *Nechť $F(x)$ je kladná funkce v $(0, \infty)$ a splňuje podmínku*

$$F(x) = O(x^\beta)\,, \quad x^{\beta - \varepsilon} = O(F(x))\,,$$

kde $\varepsilon > 0$ je libovolně malé a $\beta > 0$ je konstantní. Nechť funkce

$$\frac{\pi_{\mathfrak{M}}(x)}{F(x)}, \quad \frac{\vartheta_{\mathfrak{M}}(x)}{F(x) \ln x}, \quad \frac{\psi_{\mathfrak{M}}(x)}{F(x) \ln x}$$

mají pro $x \to \infty$ *limes superior* $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \mathfrak{N}_3$ *a pro* $x \to \infty$ *limes inferior* $\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \mathfrak{n}_3$. *Potom platí*

$$\mathfrak{N}_2 \leqq \mathfrak{N}_3 \leqq \mathfrak{N}_1\,, \quad \mathfrak{n}_2 \leqq \mathfrak{n}_3 \leqq \mathfrak{n}_1\,, \quad \mathfrak{N}_2 \geqq \beta\mathfrak{N}_1\,, \quad \mathfrak{n}_2 \geqq \beta\mathfrak{n}_1\,.$$

Dále se uvádějí aplikace této věty.

Résumé

SUR DES FORMES ÉQUIVALENTES DES LOIS ASYMPTOTIQUES DE RÉPARTITION DE DIFFÉRENTS ENSEMBLES DE NOMBRES PREMIERS

O. M. FOMENKO, Krasnodar (URSS)

Dans cet article, on introduit les fonctions

$$\pi_{\mathfrak{M}}(x) = \sum_{p \leqq x} 1\,; \quad \vartheta_{\mathfrak{M}}(x) = \sum_{p \leqq x} \ln p\,, \quad \psi_{\mathfrak{M}}(x) = \sum_{p^k \leqq x} \ln p\,,$$

$\mathfrak{M}$ étant un ensemble quelconque de nombres premiers $p \in \mathfrak{M}$; la dernière somme est étendue à toutes les combinaisons de premiers $p \in \mathfrak{M}$ et entiers k, avec la condition $p^k \leqq x$, $x > 1$.

Théorème. *Soit* $F(x)$ *une fonction positive sur* $(0, \infty)$, *satisfaisant à la condition*

$$F(x) = O(x^\beta)\,, \quad x^{\beta - \varepsilon} = O(F(x))\,,$$

ε étant un nombre positif arbitraire et β une constante positive. Considérons les rapports

$$\frac{\pi_{\mathfrak{M}}(x)}{F(x)}, \quad \frac{\vartheta_{\mathfrak{M}}(x)}{F(x)\ln x}, \quad \frac{\psi_{\mathfrak{M}}(x)}{F(x)\ln x}.$$

Soient $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \mathfrak{N}_3, \mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \mathfrak{n}_3$ *leurs limites supérieures et inférieures pour* $x \to \infty$. *Alors*

$$\mathfrak{N}_2 \leqq \mathfrak{N}_3 \leqq \mathfrak{N}_1\,, \quad \mathfrak{n}_2 \leqq \mathfrak{n}_3 \leqq \mathfrak{n}_1\,, \quad \mathfrak{N}_2 \geqq \beta\mathfrak{N}_1\,, \quad \mathfrak{n}_2 \geqq \beta\mathfrak{n}_1\,.$$

On montre ensuite quelques applications de ce théorème.