Časopis pro pěstování matematiky

František Šik

Automorphismen geordneter Mengen

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 83 (1958), No. 1, 1--22

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108195`

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha

SVAZEK 83 * PRAHA, 18. II. 1958 * ČÍSLO 1

AUTOMORPHISMEN GEORDNETER MENGEN

FRANTIŠEK ŠIK, Brno

DT:519.52

(Eingelangt 9. Juni 1956)

In dem Artikel werden Gruppen der Automorphismen einer einfach geordneten Menge $\mathfrak{M}$ untersucht und es wird festgestellt, wie die Eigenschaften der Automorphismengruppe die Struktur der Menge $\mathfrak{M}$ beeinflussen und umgekehrt.

Einleitung

Ist eine einfach geordnete Menge $\mathfrak{M}$ gegeben, dann versteht man unter einem Automorphismus auf $\mathfrak{M}$ eine ähnliche Abbildung von $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{M}$. Die Menge $\mathfrak{G}$ aller Automorphismen auf $\mathfrak{M}$ bildet in bezug auf die natürliche Ordnung eine Verbandsgruppe (eine l-Gruppe). In der Regel untersuchen wir nicht die Gruppe $\mathfrak{G}$, sondern irgendeine ihrer Untergruppen Γ und aus den vorausgesetzten Eigenschaften dieser Untergruppe leiten wir Eigenschaften der Menge $\mathfrak{M}$ und die Struktur der Untergruppe Γ ab.

In § 1 werden die Beziehungen der Eigenschaften der Gruppe Γ ohne Rücksicht auf die Struktur der Menge $\mathfrak{M}$ studiert.

Ist $x \in \mathfrak{M}$, $f \in \Gamma$, dann heisst die Vereinigung aller Intervalle mit den Endpunkten $f^n(x)$, $f^{-n}(x)$ (über alle natürlichen n) ein Zyklus des Automorphismus f. Der Zyklus heisst echt, wenn er mindestens zwei Elemente enthält. Die Gruppe Γ ist monozyklisch, wenn jedes Element $f \in \Gamma$ höchstens einen echten Zyklus besitzt. Unter $\mathfrak{M}(\Gamma)$ versteht man die Vereinigung aller echten Zyklen aller $f \in \Gamma$. Hat ein f einen echten Zyklus A, dann heisst der Automorphismus g, der $g(x) = f(x)$ für $x \in A$ und $g(x) = x$ für $x \,\bar{\in}\, A$ definiert ist, eine Phase des Automorphismus f. Die Gruppe Γ hat die Eigenschaft (α), wenn sie mit jedem Element f, $f \neq e$, eine von Null verschiedene Potenz mindestens einer seiner Phasen enthält. Die Gruppe Γ heisst divergent, wenn zu den beliebigen Elementen $x, y \in \mathfrak{M}(\Gamma)$, $x < y$, ein solches $f \in \Gamma$ existiert, dass $f(x) \geqq y$. Auf der l-Gruppe Γ sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:

a) Γ ist monozyklisch, b) Γ ist archimedisch geordnet und divergent, c) $\mathfrak{M}(\Gamma)$ ist ein Zyklus jedes Automorphismus $\neq e$ aus Γ, d) Γ ist einfach geordnet und hat die Eigenschaft (α) (Satz 3).

In § 2 beschäftigen wir uns vor allem mit den transitiven Gruppen der Automorphismen. Gegenstand der Betrachtungen ist besonders die Struktur der Menge $\mathfrak{M}$. Ist Γ eine transitive monozyklische Gruppe der Automorphismen auf $\mathfrak{M}$ und enthält $\mathfrak{M}$ mindestens zwei Elemente, dann ist Γ ähnlich mit $\mathfrak{M}$ und je nach dem $\mathfrak{M}$ einen Sprung oder keinen Sprung und keine Lücke enthält, ist Γ isomorph mit der einfach geordneten additiven Gruppe aller ganzen Zahlen oder aller reellen Zahlen (Satz 8).

In § 3 werden die intransitiven Automorphismengruppen studiert. Ist T ein System der Transitivität der Gruppe Γ, dann bedeutet Γ_T die Gruppe aller Automorphismen auf T, die auf T durch die Automorphismen der Gruppe Γ induziert sind und Γ^T bedeutet die Gruppe aller Automorphismen aus Γ, die die Elemente ausserhalb T fix lassen.

Γ sei eine archimedisch geordnete Gruppe der Automorphismen auf $\mathfrak{M}$. Dann sind alle echten Systeme der Transitivität T der Gruppe Γ untereinander und mit der einfach geordneten Menge Γ ähnlich und jede einfach geordnete Gruppe Γ_T (für die echten T) ist isomorph mit der einfach geordneten Gruppe Γ (Satz 12).

Ist Γ eine archimedische l-Gruppe, die genau zwei echte Systeme der Transitivität T, S besitzt, dann ist Γ dann und nur dann einfach geordnet, wenn $\Gamma^T = (e) = \Gamma^S$ (Satz 14).

Zum Schluss dieser Einleitung möchte ich den Herrn L. RIEGER und M. SEKANINA danken, die bei der definitiven Redaktion dieser Arbeit durch ihre Hinweise zur Vervollkomnung der Form und des Inhaltes derselben beigetragen haben [0].

1

Die in dieser Arbeit benützten Begriffe der Theorie der l-Gruppen sind geläufig und insgesamt in [1], Kap. XIV, enthalten.

Unter $\mathfrak{M}$ verstehen wir immer eine einfach geordnete Menge, unter einem Automorphismus immer einen Automorphismus auf $\mathfrak{M}$ und unter Γ eine Gruppe der Automorphismen auf $\mathfrak{M}$. Die Elemente der Menge $\mathfrak{M}$ nennen wir Punkte. Die Verbandsoperationen und die Ordnung in $\mathfrak{M}$ und in $\mathfrak{S}$ (in der l-Gruppe aller Automorphismen auf $\mathfrak{M}$) bezeichnet man ohne Gefahr eines Missverständnisses gleich: $\vee$, $\wedge$, $\leqq$. Anstatt der Benennung „eine archimedisch einfach geordnete Gruppe" benützen wir die kürzere „eine archimedisch geordnete Gruppe".

[0]) Siehe Anmerkung [1]) zum Satze 3 und Anmerkung [3]) zum Satze 6.

Definition. *Unter einem Zyklus des Automorphismus f auf der Menge $\mathfrak{M}$ ist die folgendermassen definierte Menge $A \subset \mathfrak{M}$ zu verstehen: man wählt ein $x \in \mathfrak{M}$;*

a) *Ist $f(x) = x$, dann $A = (x)$;*

b) *Ist $f(x) > x$, dann* $A = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \underset{y}{\mathrm{E}}[f^n(x) \leqq y < f^{n+1}(x);\ y \in \mathfrak{M}]$;

c) *Ist $f(x) < x$, dann* $A = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \underset{y}{\mathrm{E}}[f^n(x) \leqq y < f^{n-1}(x);\ y \in \mathfrak{M}]$.

Es ist klar, dass für ein beliebiges $z \in A$ im Falle b) $f(z) > z$, c) $f(z) < z$ gilt und dass der Zyklus, der durch die oben eingeführte Methode mit Hilfe des Elementes $z \in A$ erzeugt wird, wiederum gleich A ist. Weiter ist offenbar, dass das System aller Zyklen des Automorphismus f eine Zerlegung auf $\mathfrak{M}$ bildet. Daraus folgt $f(A) = A$.

Wie bekannt, ist die Menge $\mathfrak{G}$ aller Automorphismen der einfach geordneten Menge $\mathfrak{M}$ eine l-Gruppe ([1], XIV, § 2, Auf. 4). Die teilweise Ordnung ist auf $\mathfrak{G}$ folgendermassen definiert $f \leqq g \Leftrightarrow f(x) \leqq g(x)$ für alle $x \in \mathfrak{M}$. Für die Verbandsoperationen gilt also $(f \vee g)(x) = f(x) \vee g(x)$, $(f \wedge g)(x) = f(x) \wedge g(x)$.

Wenn im Weiteren von der Ordnung einer Gruppe der Automorphismen auf $\mathfrak{M}$ gesprochen wird, werden wir darunter immer die oben eingeführte natürliche Ordnung verstehen.

Der Buchstabe $\mathfrak{G}$ wird in der ganzen Arbeit für die Gruppe aller Automorphismen auf $\mathfrak{M}$ vorbehalten.

In den folgenden Betrachtungen beschäftigen wir uns stets mit den Untergruppen der Gruppe $\mathfrak{G}$. Unter einer l-Gruppe Γ der Automorphismen versteht man immer eine l-Untergruppe in $\mathfrak{G}$, d. h. eine solche Untergruppe in $\mathfrak{G}$, für die gilt: $f, g \in \Gamma \Rightarrow f \vee g \in \Gamma$, $f \wedge g \in \Gamma$.

Γ sei eine Gruppe der Automorphismen auf $\mathfrak{M}$.

Definition. *Jeden Punkt $x \in \mathfrak{M}$, der ein Fixpunkt jedes Automorphismus aus Γ ist, wollen wir als einen stabilen Punkt der Menge $\mathfrak{M}$ (in Bezug auf Γ) bezeichnen.*

Die um die stabilen Punkte (in bezug zu Γ) verkleinerte Menge $\mathfrak{M}$ bezeichnet man $\mathfrak{M}(\Gamma)$. Wir bemerken, dass $\mathfrak{M}(\Gamma)$ entweder leer ist oder wenigstens zwei Punkte enthält.

Definition. *Die Gruppe Γ ist transitiv auf der Menge $Q \subset \mathfrak{M}$, wenn zu jedem $x, y \in Q$ ein $f \in \Gamma$ existiert, so dass $f(x) = y$.*

Die Gruppe ist transitiv, wenn sie transitiv auf $\mathfrak{M}$ ist.

Wir bemerken, dass die Menge $\mathfrak{M}$ keine stabilen Punkte in bezug auf Γ besitzt, wenn Γ transitiv (auf $\mathfrak{M}$) und $\Gamma \neq (e)$ ist.

Definition. *Zwei Automorphismen f, g sind gleich orientiert, wenn für ein beliebiges $x \in \mathfrak{M}$ gilt: $f(x) > x \Rightarrow g(x) \geqq x$; $g(x) > x \Rightarrow f(x) \geqq x$.*

Satz 1. *Die Gruppe Γ der Automorphismen sei transitiv auf $\mathfrak{M}(\Gamma)$. Γ ist dann und nur nur dann einfach geordnet, wenn die konjugierten Elemente aus Γ gleich orientiert sind.*

Beweis. Die Bedingung ist hinreichend. Es sei f, $g \in \Gamma$, x ein solcher Punkt aus $\mathfrak{M}$, für den $f(x) > g(x)$. Es genügt zu zeigen, dass für ein beliebiges $y \in \mathfrak{M}(\Gamma)$ $f(y) \geqq g(y)$ ist. Es gilt $g^{-1} f(x) > x$. Weil x kein stabiler Punkt ist, existiert ein $h \in \Gamma$, so dass $h(x) = y$. Da das Element $h^{-1}g^{-1}fh$ gleich orientiert mit dem Elemente $g^{-1}f$ ist, gilt $h^{-1}g^{-1}fh(x) \geqq x$. Also $fh(x) \geqq gh(x)$, weiter $f(y) \geqq g(y)$ und endlich $f > g$. Eine ähnliche Erwägung gilt für $f(x) < g(x)$.

Notwendigkeit der Bedingung. Es sei $f \in \Gamma$. Für ein $x \in \mathfrak{M}$ sei $f(x) > x$. Es ist zu beweisen, dass für ein beliebiges $g \in \Gamma$ $g^{-1}fg(x) \geqq x$ gilt. Da $f > e$ ($e =$ das Einheitselement der Gruppe Γ), gilt $f(y) \geqq y$ für alle $y \in \mathfrak{M}$. Daher für $y = g(x)$ gilt $g^{-1}fg(x) \geqq g^{-1}g(x) = x$.

Es sei $g^{-1}fg(x) > x$ für ein $x \in \mathfrak{M}$. Dann ist $f[g(x)] > g(x)$. Weil Γ einfach geordnet ist, gilt $f > e$, also $f(x) > x$.

Korollar. *Die abelsche auf $\mathfrak{M}(\Gamma)$ transitive Gruppe Γ ist einfach geordnet.*

Satz 2. *Ist die Gruppe Γ einfach geordnet, dann sind zwei ihre Elemente dann und dann gleich orientiert, wenn beide $\geqq e$ oder beide $\leqq e$ sind.*

Beweis. Die Bedingung ist hinreichend. Es sei f, $g \in \Gamma$, $f \geqq e$, $g \geqq e$. Daher $f(x) \geqq x$, $g(x) \geqq x$ für alle $x \in \mathfrak{M}$. f und g sind also gleich orientiert. Ist $f \leqq e$, $g \leqq e$, dann $f(x) \leqq x$, $g(x) \leqq x$ für alle $x \in \mathfrak{M}$. Offenbar sind f und g wieder gleich orientiert.

Notwendigkeit der Bedingung. Es seien f, $g \in \Gamma$ gleich orientiert.

1. Es sei $f > e$. Es ist zu beweisen, dass $g \geqq e$. Ist hingegen $g < e$, dann existiert ein $y \in \mathfrak{M}$, so dass $g(y) < y$. Dabei $f(y) = y$, denn teils $f > e \Rightarrow f(y) \geqq y$, teils $f(y) > y \Rightarrow g(y) \geqq y$. Bezeichnen wir mit B den das Element y enthaltenden Zyklus des Automorphismus g.

Für das Element $h = gf$ gilt: es existiert ein Punkt $x \in \mathfrak{M}$, so dass $f(x) > x$; daher $f[f(x)] > f(x)$; da f und g gleich orientiert sind, gilt $g[f(x)] \geqq f(x)$; also $h(x) > x$ und daher $h > e$. Für den erwähnten Punkt y gilt $h(y) = g[f(y)] = g(y) < y$, also $h < e$, was einen Widerspruch beinhaltet. Also $g \geqq e$.

2. Es sei $f < e$. Dann $g > e \Rightarrow f \geqq e$, was ein Widerspruch ist. Der Beweis ist ähnlich dem vorigen.

3. Ist $f = e$, so ist die Richtigkeit der Behauptung offenbar.

Definition. *Der Automorphismus f auf $\mathfrak{M}$ heisst monozyklisch, wenn er höchstens einen echten Zyklus besitzt.*

Die Gruppe Γ heisst monozyklisch, wenn jeder Automorphismus $f \in \Gamma$ monozyklisch ist.

Wir bemerken, dass die Menge Δ aller monozyklischen Automorphismen auf $\mathfrak{M}$ keine Gruppe sein muss. Als ein Beispiel hierfür dient die Menge aller monozyklischen Automorphismen auf der einfach geordneten Menge aller reellen Zahlen.

Beweis. Sind α, β reelle Zahlen > 0, dann sind die Abbildungen f und g definiert: $f(x) = \alpha x$ für $x \leqq 0$, $f(x) = x$ für $x > 0$, $g(x) = x$ für $x \leqq 0$, $g(x) = \beta x$ für $x > 0$; es sind offenbar Automorphismen auf der einfach geordneten Menge aller reellen Zahlen. f und g sind monozyklisch, während fg es nicht ist.

Definition. *Unter Phase des Automorphismus f wollen wir einen solchen Automorphismus h verstehen, der auf einem einzigen echten Zyklus des Automorphismus f identisch mit f ist und der die übrigen Punkte festhält.*

Definition. *Die Gruppe der Automorphismen hat die Eigenschaft* (α), *wenn sie mit jedem Elemente $\neq e$ eine von Null verschiedene Potenz einer seiner Phasen besitzt.*

Definition. *Die Gruppe Γ der Automorphismen heisst divergent, wenn zu den beliebigen $x, y \in \mathfrak{M}(\Gamma)$, $x < y$, ein $f \in \Gamma$ so existiert, dass $f(x) \geqq y$.*

Satz 3. *Die folgenden Eigenschaften der Gruppe Γ der Automorphismen sind äquivalent*:

a) *Γ ist monozyklisch*;

b) *Γ ist archimedisch geordnet und divergent*;

c) *$\mathfrak{M}(\Gamma)$ ist ein* (*einziger echter*) *Zyklus jedes Elementes $f \in \Gamma$, $f \neq e$*;

d) *Γ ist einfach geordnet und hat die Eigenschaft* (α).[1]

Beweis. a $\Rightarrow$ b. 1. Jede monozyklische Gruppe ist einfach geordnet. Existiert nämlich ein $f \in \Gamma$, $f \parallel e$, dann existieren die Punkte $x, y \in \mathfrak{M}$, so dass $f(x) < x$, $f(y) > y$; der Automorphismus hat also mindestens zwei echte Zyklen, was ein Widerspruch ist.

2. Wenn Γ nicht archimedisch wäre, dann existierten Elemente $f, g \in \Gamma$, für die $e < f^n < g$ für alle natürlichen n gelten würde. Bezeichnen wir mit A den (einzigen) echten Zyklus des Automorphismus f. Nach der Voraussetzung gilt für jedes $y \in A$ $g(y) \bar{\in} A$; daraus folgt $fg(y) = g(y)$, $g^{-1}fg(y) = y$, also ist $g^{-1}fg$ auf A fix.

Der echte Zyklus C des Automorphismus $g^{-1}fg$ ($g^{-1}fg \neq e$!) muss also ausserhalb A liegen. Das widerspricht aber der Tatsache, dass Γ monozyklisch ist; z. b. der Automorphismus $g^{-1}fgf$ hat zwei echte Zyklen und zwar C und A (der Automorphismus f lässt C, der Automorphismus $g^{-1}fg$ lässt A punktweise fix). Dieser Widerspruch beweist, dass Γ archimedisch ist.

3. Die Gruppe Γ ist divergent. Wenn nämlich für zwei gewisse Punkte $x, y \in \mathfrak{M}(\Gamma)$, $x < y$, $h(x) < y$ für alle $h \in \Gamma$ gelten würde, dann würden offenbar solche Automorphismen $f, g \in \Gamma$ existieren, dass f resp. g fest im Punkte y

[1]) Die Behauptung a $\Rightarrow$ b hat L. Rieger abgeleitet.

resp. x und nicht im Punkte x resp. y sein würde; mindestens einer der Automorphismen fg, fg^{-1} hat dann zwei echte Zyklen; das ist ein Widerspruch.

b $\Rightarrow$ c. Da die Automorphismen f, f^{-1} dieselbe Zyklenzerlegung besitzen, kann man sich auf die Automorphismen $> e$ beschränken. Es sei also $f > e$, $g > e$. Es existieren solche natürliche Zahlen m, n, dass $f^m > g$, $g^n > f$; also gilt $f^{km} > g^k$, $g^{kn} > f^k$ für jedes natürliche k. Es gilt also $f^{km}(x) \geqq g^k(x)$, $g^{kn}(x) \geqq f^k(x)$ für ein beliebiges $x \in \mathfrak{M}$ und die umgekehrten Ungleichungen für die negativen ganzen Zahlen k. Daher haben die Automorphismen f, g und also alle Automorphismen $\neq e$ dieselbe Zyklenzerlegung. Aus der Divergenz und aus dem vorher gesagten folgt, dass $\mathfrak{M}(\Gamma)$ der gemeinsame echte Zyklus aller Automorphismen $\neq e$ ist.

c $\Rightarrow$ d. Γ ist nach der Voraussetzung monozyklisch, also einfach geordnet (siehe den Anfang des Beweises a $\Rightarrow$ b). Die Gruppe Γ hat die Eigenschaft (α), denn jeder Automorphismus $\neq e$ aus Γ ist offenbar seine einzige eigene Phase.

d $\Rightarrow$ a. Es sei $f \in \Gamma$, f habe zwei echte Zyklen. g sei eine Phase des Automorphismus f und für ein ganzes $n \neq 0$ sei $g^n \in \Gamma$. Bezeichnen wir mit A den echten Zyklus des Automorphismus g, mit B den echten Zyklus des Automorphismus f, für den $A \cap B = \emptyset$. Der Automorphismus $h = g^n f^n g^{-n}$ hat zwei echte Zyklen A, B (denn $f^n g^{-n}$ resp. g^n lässt A resp. B punktweise stehen); das ist ein Widerspruch.

Anmerkung. In dem Beweise b $\Rightarrow$ c wurde die folgende Behauptung erwiesen:

In der archimedisch geordneten Gruppe Γ haben alle Automorphismen $\neq e$ dieselbe Zyklenzerlegung.

2

In diesem Paragraphen beschäftigen wir uns mit den transitiven Gruppen der Automorphismen auf $\mathfrak{M}$.

Definition. *Γ sei eine Gruppe der Automorphismen auf $\mathfrak{M}$.*

a) *$\mathfrak{M}$ ist von oben schwach vollständig bezüglich Γ, wenn zu jeder von oben beschränkten Menge der Automorphismen $\{f_\nu\} \subset \Gamma$ der Punkt $\bigvee_\nu [f_\nu(x)]$ für jedes $x \in \mathfrak{M}$ in $\mathfrak{M}$ existiert.*

b) *$\mathfrak{M}$ ist von unten schwach vollständig bezüglich Γ, wenn zu jeder von unten beschränkten Menge der Automorphismen $\{f_\nu\} \subset \Gamma$ der Punkt $\bigwedge_\nu [f_\nu(x)]$ für jedes $x \in \mathfrak{M}$ in $\mathfrak{M}$ existiert.*

c) *$\mathfrak{M}$ ist schwach vollständig bezüglich Γ, wenn sie von oben und von unten schwach vollständig bezüglich Γ ist.*

d) *$\mathfrak{M}$ ist (von oben, von unten) schwach vollständig, wenn sie (von oben, von unten) schwach vollständig bezüglich der Gruppe $\mathfrak{G}$ aller Automorphismen auf $\mathfrak{M}$ ist.*

Es ist offenbar, dass die bedingt vollständige Menge $\mathfrak{M}$ schwach vollständig ist. Die Umkehrung muss nicht gelten. Als ein Beispiel dient die Menge $\mathfrak{M}$ vom Typus $\omega \oplus \omega^*$. Der einzige Automorphismus auf $\mathfrak{M}$ ist der identische. Also ist $\mathfrak{M}$ offenbar schwach vollständig. Sie ist aber nicht bedingt vollständig, denn die Menge vom Typus ω resp. ω^* ist eine von oben resp. von unten beschränkte Untermenge in $\mathfrak{M}$ und trotzdem existiert ihr Supremum resp. Infimum in $\mathfrak{M}$ nicht.

Anmerkung A. *Γ sei eine transitive und einfach geordnete Gruppe. $\mathfrak{M}$ ist bezüglich Γ (von oben, von unten) schwach vollständig dann und nur dann, wenn $\mathfrak{M}$ lückenlos ist.*

Beweis. $\mathfrak{M}$ sei z. B. von oben schwach vollständig bezüglich Γ. $\mathfrak{M}$ habe eine Lücke A, B. Wählen wir $b \in B$; zu dem beliebigen $a \in A$ existiert ein $f_a \in \Gamma$ so, dass $f_a(b) = a$. Da $a < b$, ist $f_a < e$, also ist das System aller f_a von oben beschränkt. Also existiert $\bigvee_{a \in A} [f_a(b)] = \bigvee_{a \in A} a$. Dann aber hat die Menge A das Supremum, was ein Widerspruch ist.

$\mathfrak{M}$ habe keine Lücke und sei $\{f_\nu\} \subset \Gamma$, $f_\nu \leqq f$ für alle ν. Wählen wir $x \in \mathfrak{M}$. Hat das System $\{f_\nu(x)\}$ kein Supremum, dann ist die Menge aller $b \in \mathfrak{M}$, für die $f_\nu(x) \leqq b$ für alle ν, nicht leer $[f_\nu(x) \leqq f(x)]$ und bildet die obere Klasse eines Schnittes, die eine Lücke ist, was einen Widerspruch ergibt. Der Beweis der Anmerkung A ist erbracht.

Bemerken wir noch, dass die Nichtexistenz der Lücken in $\mathfrak{M}$ äquivalent mit der bedingten Vollständigkeit der einfach geordneten Menge $\mathfrak{M}$ ist.

Hilfssatz 1. *f sei ein Automorphismus auf einem Verbande S, $\{x_\nu\} \subset S$. Wenn $\bigvee x_\nu$ existiert, dann existiert $\bigvee[f(x_\nu)]$ und es gilt $f(\bigvee x_\nu) = \bigvee[f(x_\nu)]$. Der duale Satz gilt auch.*

Beweis. Wenn $\bigvee x_\nu$ existiert, dann gilt $f(\bigvee x_\nu) \geqq f(x_\nu)$ für alle ν. Wenn $\bigvee[f(x_\nu)]$ existiert, dann gilt $f(\bigvee x_\nu) \geqq \bigvee[f(x_\nu)] \Rightarrow \bigvee x_\nu \geqq f^{-1}\{\bigvee[f(x_\nu)]\} \geqq$ $\geqq \bigvee[f^{-1}f(x_\nu)] = \bigvee x_\nu$, also $f(\bigvee x_\nu) = \bigvee[f(x_\nu)]$.

Wenn $\bigvee[f(x_\nu)]$ nicht existiert, dann folgt aus der Relation $f(\bigvee x_\nu) \geqq f(x_\nu)$ für alle ν die Existenz eines solchen Elementes $y \in S$, dass $f(\bigvee x_\nu) > y > f(x_\nu)$ für alle ν. Daher ist $\bigvee x_\nu > f^{-1}(y) > f^{-1}f(x_\nu)$ für alle ν. Also $\bigvee x_\nu > f^{-1}(y) \geqq \bigvee x_\nu$; was einen Widerspruch bedeutet. Der Satz ist bewiesen. Den dualen Satz beweist man ähnlich.

Satz 4. *Ist eine der folgenden Bedingungen 1, 2, 3 für jede von oben beschränkte Teilmenge $\{f_\nu\}$ der Gruppe Γ der Automorphismen auf $\mathfrak{M}$ erfüllt, dann sind auch die übrigen Bedingungen erfüllt. Γ ist eine vollständige l-Gruppe und für die in den Bedingungen 1 und 2 definierten Abbildungen s und t gilt $s = \bigvee f_\nu$, $t = \bigwedge f_\nu^{-1}$.*

Die Bedingungen 1, 2, 3 *lauten:*

1. $\mathfrak{M}$ *ist von oben schwach vollständig bezüglich* Γ *und die Abbildung* $s(x) = \bigvee_{\nu}[f_\nu(x)]$ *ist ein Automorphismus auf* $\mathfrak{M}$.

2. $\mathfrak{M}$ *ist von unten schwach vollständig bezüglich* Γ *und die Abbildung* $t(x) = \bigwedge_{\nu}[f_\nu^{-1}(x)]$ *ist ein Automorphismus auf* $\mathfrak{M}$.

3. $\mathfrak{M}$ *ist schwach vollständig bezüglich* Γ *und es gilt* $\bigvee_{\nu}\{f_\nu(\bigwedge_{\mu}[f_\mu^{-1}(x)])\} \geqq \bigwedge_{\nu}\{f_\nu^{-1}(\bigvee_{\mu}[f_\mu(x)])\}$ *für ein beliebiges* $x \in \mathfrak{M}$.

Beweis. $1 \Rightarrow 2$. Wir beweisen, dass $s = \bigvee f_\nu$. Nach der Definition des $s(x)$ gilt nämlich $s \geqq f_\nu$ für alle ν. Ist für ein $f \in \Gamma$ $f \geqq f_\nu$ für alle ν, dann gilt für ein beliebiges $x \in \mathfrak{M}$ $f(x) \geqq f_\nu(x)$, also $f(x) \geqq \bigvee[f_\nu(x)] = s(x)$. Daher ist $f \geqq s$; also $s = \bigvee f_\nu$. Γ ist also eine vollständige l-Gruppe und es gilt $s = \bigvee f_\nu$.

Die Menge $\{f_\nu^{-1}\}$ ist von unten beschränkt. Wir beweisen, dass $\bigwedge_{\nu}[f_\nu^{-1}(x)]$ für jedes $x \in \mathfrak{M}$ existiert und dass für die Abbildung $t(x) = \bigwedge_{\nu}[f_\nu^{-1}(x)]$ $t = \bigwedge f_\nu^{-1}$ gilt. Bezeichnen wir $q = \bigwedge f_\nu^{-1}$. Dann gilt $q(x) \leqq f_\nu^{-1}(x)$ für alle ν und alle $x \in \mathfrak{M}$. Wenn $\bigwedge_{\nu}[f_\nu^{-1}(x)]$ für ein $x = x_0$ nicht existiert, dann existiert ein solches $y \in \mathfrak{M}$, dass $q(x_0) < y < f_\nu^{-1}(x_0)$ für alle ν ist. Daher $x_0 < q^{-1}(y) = s(y)$ und weiter $f_\nu(y) < x_0$ für alle ν, also $s(y) = \bigvee[f_\nu(y)] \leqq x_0$. Daher $x_0 < s(y) \leqq x_0$, was ein Widerspruch ist. $\bigwedge[f_\nu^{-1}(x)]$ existiert also für alle $x \in \mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}$ ist von unten schwach vollständig bezüglich Γ. Es bleibt zu beweisen, dass $q = t$. Es gilt $q(x) \leqq \bigwedge[f_\nu^{-1}(x)]$ für alle $x \in \mathfrak{M}$. Ist $q(x_0) < \bigwedge[f_\nu^{-1}(x_0)]$ für ein $x = x_0$, dann gilt $x_0 = q^{-1}[q(x_0)] = (\bigwedge f_\nu^{-1})^{-1}[q(x_0)] < (\bigvee_{\nu} f_\nu)\{\bigwedge_{\mu}[f_\mu^{-1}(x_0)]\} = \bigvee_{\nu}\{f_\nu(\bigwedge_{\mu}[f_\mu^{-1}(x_0)])\} = \bigvee_{\nu}\bigwedge_{\mu}[(f_\nu f_\mu^{-1})(x_0)] \leqq x_0$. Die letzte Gleichung folgt aus dem Hilfssatze 1. Die letzte Ungleichung folgt daraus, dass $\bigwedge_{\mu}[(f_\nu f_\mu^{-1})(x_0)] \leqq x_0$ für jedes ν gilt, weil $(f_\nu f_\nu^{-1})(x_0) = x_0$ ist. Der Widerspruch, zu welchem wir gelangt sind, bestätigt, dass $q(x) = \bigwedge[f_\nu^{-1}f(x)] = t(x)$ für alle $x \in \mathfrak{M}$ ist. Daher gilt $t = \bigwedge f_\nu^{-1}$.

So ist die Gültigkeit der Bedingung 2 bestätigt. Gleichzeitig sieht man auch die Gültigkeit der Behauptungen von der Vollständigkeit der l-Gruppe Γ und von den Abbildungen s und t. Schliesslich ist bewiesen, dass $\mathfrak{M}$ schwach vollständig bezüglich Γ ist.

$2 \Rightarrow 1$. Man beweist dual.

$1 \Rightarrow 3$. Vorher wurde bewiesen, dass aus der Voraussetzung 1 die schwache Vollständigkeit der Menge $\mathfrak{M}$ bezüglich Γ, die Vollständigkeit der l-Gruppe Γ und die Relationen $s = \bigvee f_\nu$, $t = \bigwedge f_\nu^{-1} = s^{-1}$ folgen. Wir erhalten für ein beliebiges $x \in \mathfrak{M}$: $x = s[t(x)] = \bigvee_{\nu}\{f_\nu(\bigwedge_{\mu}[f_\mu^{-1}(x)])\}$, $x = t[s(x)] = \bigwedge_{\nu}\{f_\nu^{-1}(\bigvee_{\mu}[f_\mu(x)])\}$. Dadurch ist die Bedingung 3 bestätigt.

$3 \Rightarrow 1$. Aus dem Hilfssatze 1 folgt für ein beliebiges $x \in \mathfrak{M}$

$$x \geqq \bigvee_{\nu}\{\bigwedge_{\mu}[(f_\nu f_\mu^{-1})(x)]\} = \bigvee_{\nu}\{f_\nu(\bigwedge_{\mu}[f_\mu^{-1}(x)])\} \geqq \bigwedge_{\nu}\{f_\nu^{-1}(\bigvee_{\mu}[f_\mu(x)])\} =$$

$= \bigwedge_{\nu}\{\bigvee_{\mu}[(f_\nu^{-1}f_\mu)(x)])\} \geqq x$. Daher ist $\bigvee_{\nu}\{f_\nu(\bigwedge_{\mu}[f_\mu(x)])\} = x = \bigwedge_{\nu}\{f_\nu^{-1}(\bigvee_{\mu}[f_\mu(x)])\}$ für ein beliebiges $x \in \mathfrak{M}$. Die Abbildungen $s(x) = \bigvee_{\nu}[f_\nu(x)]$ und $t(x) = \bigwedge_{\mu}[f_\mu^{-1}(x)]$ bilden $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{M}$ ab. Nach dem vorher gesagten ist $s[t(x)] = x = t[s(x)]$. Die Abbildungen s und t sind eineindeutig: ist z. B. $t(x) = t(y)$, dann ist $x = s[t(x)] = s[t(y)] = y$. Ähnlich für s. Weil s und t offenbar zwei isotone Abbildungen sind, wird der Beweis der Behauptung erbracht werden, wenn wir beweisen, dass $s(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}$, $t(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}$. Aus der für alle $x \in \mathfrak{M}$ geltenden Beziehung $x = s[t(x)]$ folgt $\mathfrak{M} = s[t(\mathfrak{M})]$. Also bildet s die Menge $t(\mathfrak{M})$ auf $\mathfrak{M}$ ab. Daraus folgt, dass s die Menge $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{M}$ abbildet, d. h. $s(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}$. Weil s eineindeutig ist, muss $t(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}$ gelten. Also sind s und t Automorphismen auf $\mathfrak{M}$ und die Behauptung $3 \Rightarrow 1$ ist bewiesen. Dadurch ist der Beweis des Satzes 4 erbracht.

Satz 5. *Eine einfach geordnete Menge $\mathfrak{M}$ mit einem Sprung ist vom Typus $\omega^* \oplus \omega$ dann und nur dann, wenn auf $\mathfrak{M}$ eine archimedisch geordnete transitive Gruppe Γ von Automorphismen existiert.*[2])

Beweis. $\mathfrak{M}$ sei vom Typus $\omega^* \oplus \omega$. Repräsentieren wir $\mathfrak{M}$ mit Hilfe der einfach geordneten Menge aller ganzen Zahlen. Die Menge aller ganzen Translationen hat offenbar die verlangten Eigenschaften.

Umgekehrt sei die Bedingung des Satzes erfüllt. $\mathfrak{M}$ habe einen Sprung $b < a$ ($a, b \in \mathfrak{M}$). Wählen wir ein beliebiges $x \in \mathfrak{M}$. Ein $f \in \Gamma$ existiert so, dass $f(b) = x$; dann ist $f(a) = y > x$. Die Punkte x und y sind benachbart. Also hat ein beliebiges $x \in \mathfrak{M}$ einen unmittelbaren Nachfolger. Ähnlich beweist man, dass x einen unmittelbaren Vorgänger besitzt. Daraus folgt, dass die Menge $\mathfrak{M}$ kein erstes und kein letztes Element besitzt. Wenn zwischen irgendwelchen zwei Punkten $x, y \in \mathfrak{M}$ ($x < y$) eine unendliche Punktfolge existierte, dann könnte man eine unendliche Folge nacheinander gehender Punkte $x < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots < y$ und solche Automorphismen f, $g \in \Gamma$ finden, dass $f(x) = x_1$, $g(x) = y$ gelten würde; daraus folgt $f^n(x) = x_n$, $f^n < g$ für ganze $n > 0$, also gilt $f = e$, was einen Widerspruch ergibt. Also ist $\mathfrak{M}$ vom Typus $\omega^* \oplus \omega$.

Mit τ bezeichnet man den Typus einer einfach geordneten Menge, auf der eine transitive Gruppe von Automorphismen existiert.

Satz 6. *Eine einfach geordnete Menge $\mathfrak{M}$ mit einem Sprung ist vom Typus $\tau \bigcirc (\omega^* \oplus \omega)$ dann und nur dann, wenn auf $\mathfrak{M}$ eine transitive Gruppe Γ von Automorphismen existiert.*[2]) [3])

[2]) $\oplus$ resp. $\bigcirc$ ist das Zeichen der Ordinalsumme resp. des Ordinalproduktes, [1], I, § 8.

[3]) Der Autor des Satzes 6 ist M. Sekanina.

Beweis der Notwendigkeit. $\mathfrak{T}$ sei eine einfach geordnete Menge vom Typus τ, $\mathfrak{R}$ vom Typus $\omega^* \oplus \omega$ und $\mathfrak{M}$ vom Typus $\tau \bigcirc (\omega^* \oplus \omega)$. $\mathfrak{M}$ ist die Menge der geordneten Paare (X, x), wo $X \in \mathfrak{T}$, $x \in \mathfrak{R}$ ist. Δ resp. Γ sei eine transitive Gruppe von Automorphismen auf $\mathfrak{T}$ resp. auf $\mathfrak{R}$. Wir konstruieren eine auf $\mathfrak{M}$ transitive Gruppe von Automorphismen. Es sei $(X, x) \in \mathfrak{M}$, $(Y, y) \in \mathfrak{M}$. Ein $F \in \Delta$ und ein $f \in \Gamma$ existiert derart, dass $F(X) = Y$ und $f(x) = y$. Definieren wir auf $\mathfrak{M}$ eine Abbildung (F, f): $(F, f)(X, x) = (F(X), f(x)) = (Y, y)$. (F, f) ist offenbar ein Automorphismus auf $\mathfrak{M}$ und die Menge aller (F, f) ist die transitive Gruppe von Automorphismen auf $\mathfrak{M}$.

Die Bedingung ist hinreichend. Ähnlich wie in dem Satze 5 beweist man, bass jeder Punkt in $\mathfrak{M}$ einen unmittelbaren Nachfolger und einen unmitteldaren Vorgänger hat. Definieren wir auf $\mathfrak{M}$ eine Äquivalenz $\sim : x \sim y \Leftrightarrow$ das Intervall zwischen den Elementen x, y ist eine endliche Menge. Die Menge $\mathfrak{M}$ zerfällt offenbar in konvexe Klassen insgesamt vom Typus $\omega^* \oplus \omega$. Diese auf eine ersichtliche Weise geordnete Zerlegung (bezeichnet man sie $\overline{\mathfrak{M}}$) besitzt eine transitive Gruppe der Automorphismen, wie wir beweisen. Jedes $f \in \Gamma$ induziert auf $\overline{\mathfrak{M}}$ einen Automorphismus F: ist für x, $y \in \mathfrak{M}$ $f(x) = y$, $x \in X \in \overline{\mathfrak{M}}$, $y \in Y \in \overline{\mathfrak{M}}$, definieren wir $F(X) = Y$. F ist eine Abbildung. Ist nämlich $x_1 \in X$, $f(x_1) = y_1$, dann ist $y_1 \in Y$, weil zwischen x und x_1 eine endliche Zahl der Punkte aus $\mathfrak{M}$ liegt, also ist auch zwischen y und y_1 nur eine endliche Zahl der Punkte aus $\mathfrak{M}$. Es ist klar, dass F ein Automorphismus auf $\overline{\mathfrak{M}}$ ist und dass die Menge aller F eine transitive Gruppe von Automorphismen auf $\overline{\mathfrak{M}}$ bildet. Ist $\overline{\mathfrak{M}}$ vom Typus τ, dann ist $\mathfrak{M}$ offenbar vom Typus $\tau \odot (\omega^* \oplus \omega)$.

Im Weiteren benutzen wir die folgenden Eigenschaften der Gruppe Γ der Automorphismen:

a) *Γ ist monozyklisch;*

b) *Γ ist archimedisch geordnet;*

c) *$\mathfrak{M}(\Gamma)$ ist ein (einziger echter) Zyklus jedes Elementes $\neq e$;*

d) *Γ ist einfach geordnet und besitzt die Eigenschaft (α);*

e) *Γ ist kommutativ und transitiv auf $\mathfrak{M}(\Gamma)$.*

Anmerkung B. Hat die Gruppe Γ irgendeine von den Eigenschaften a) bis e), dann gilt für $f, g \in \Gamma : f(x) = g(x)$ für ein $x \in \mathfrak{M}(\Gamma) \Rightarrow f = g$.

Beweis. Die Eigenschaften a), c), d) sind nach dem Satze 3 äquivalent. Nach c) hat kein Element $\neq e$ einen Fixpunkt in $\mathfrak{M}(\Gamma)$. Daraus und aus der Beziehung $g^{-1}f(x) = x$ für einen Punkt $x \in \mathfrak{M}(\Gamma)$ folgt $g^{-1}f = e$. Also ist $f = g$.

Besitzt Γ die Eigenschaft b), dann haben nach der Anmerkung hinter dem Satze 3 alle Elemente $\neq e$ aus Γ dieselbe Zyklenzerlegung, also liegt in $\mathfrak{M}(\Gamma)$ kein Fixpunkt des Elementes $\neq e$ aus Γ. Weiter wie in c).

Hat Γ die Eigenschaft e), zeigen wir, dass $f \in \Gamma$, $f \neq e$, in $\mathfrak{M}(\Gamma)$ keinen Fixpunkt besitzt. Ist nämlich $f(x) = x \in \mathfrak{M}(\Gamma)$, dann existiert für $y \in \mathfrak{M}(\Gamma)$ ein solches $g \in \Gamma$, dass $g(x) = y$. Dann gilt $gf(x) = g(x)$; aus der Kommutativität folgt weiter $fg(x) = g(x)$, so dass $f(y) = y$ gilt; offenbar gilt $f(y) = y$ für $y \bar{\in} \mathfrak{M}(\Gamma)$, so dass $f = e$. Der Rest des Beweises stimmt mit dem Falle c) überein.

Hilfssatz 2. *Ist eine abelsche Gruppe Γ transitiv auf $\mathfrak{M}(\Gamma)$, dann ist Γ (bezüglich der Ordnung) ähnlich zu $\mathfrak{M}(\Gamma)$.*

Beweis. Wählen wir ein festes $x \in \mathfrak{M}(\Gamma)$. Ist $f \in \Gamma$, dann ist die Abbildung ψ_x, die durch die Gleichung $\psi_x(f) = f(x)$ definiert ist, nach der Anmerkung B die gesuchte Ähnlichkeit. (Ein ausführlicherer Beweis: ψ_x ist eineindeutig: $f(x) = \psi_x(f) = \psi_x(g) = g(x) \Rightarrow f = g$; ψ_x bildet Γ auf $\mathfrak{M}(\Gamma)$ ab: zu jedem $y \in \mathfrak{M}(\Gamma)$ existiert ein $f \in \Gamma$ so, dass $f(x) = y$ gilt, also gilt $\psi_x(f) = y$; ψ_x ist isoton: $f \geqq g \Rightarrow f(x) \geqq g(x) \Rightarrow \psi_x(f) \geqq \psi_x(g)$.)

Hilfssatz 3. *H sei eine Untergruppe der additiven Gruppe aller reellen Zahlen G. Hat H keinen Sprung und keine Lücke, dann ist $H = G$.*

Der Beweis ist ersichtlich.

Definition. *Die Gruppe Γ hat die Eigenschaft* (β), *wenn: f, $g \in \Gamma$, $f \neq g$, $f(x) = g(x)$ für ein $x \in \mathfrak{M} \Rightarrow f(x) = x = g(x)$ gilt.*

Anmerkung C. Die Gruppe Γ hat die Eigenschaft (β), wenn sie eine von den Eigenschaften a) bis e) besitzt.

Die Behauptung folgt aus der Anmerkung B.

Satz 7. *Γ sei eine transitive einfach geordnete Gruppe von Automorphismen mit der Eigenschaft* (β). *$\mathfrak{M}$ sei lückenlos und besitze mindestens zwei Punkte. Dann ist Γ isomorph der einfach geordneten additiven Gruppe aller ganzen Zahlen bzw. aller reellen Zahlen, je nach dem, ob $\mathfrak{M}$ einen Sprung bzw. keinen Sprung hat. In beiden Fällen ist Γ (bezüglich der Ordnung) ähnlich zu $\mathfrak{M}$. Für eine beliebige von oben beschränkte Menge $\{f_\nu\} \subset \Gamma$ und für ein beliebiges $x \in \mathfrak{M}$ gilt $(\bigvee f_\nu)(x) = \bigvee[f_\nu(x)]$, $(\bigwedge f_\nu^{-1})(x) = \bigwedge[f_\nu^{-1}(x)]$.*

Beweis. $\{f_\nu\}$ sei eine von oben beschränkte Untermenge der Gruppe Γ und es sei $f_\nu \leqq h \in \Gamma$ für alle ν. Wir beweisen die Existenz des Supremums der Menge $\{f_\nu\}$ in Γ. Wählen wir ein beliebiges $y \in \mathfrak{M}$. Bezeichnen wir $f_\nu^{-1}(y) = x_\nu$. Weil $h^{-1} \leqq f_\nu^{-1}$ gilt, existiert $\bigwedge[f_\nu^{-1}(y)] = \bigwedge x_\nu = x_0$. Aus der Transitivität folgt die Existenz des Elementes $g_y \in \Gamma$, so dass $g_y(x_0) = y$ ist.

Ist $x_0 < x_\nu$ für ein ν, dann gilt $g_y^{-1}(y) = x_0 < x_\nu = f_\nu^{-1}(y)$, also ist $g_y^{-1} < f_\nu^{-1}$, d. h. $g_y > f_\nu$ für das zugehörige ν.

Ist $x_0 = x_\mu$ für ein μ, dann ist $f_\mu(x_0) = g_y(x_0) = y$, also folgt aus der Eigenschaft (β) für das betreffende μ: entweder ist $f_\mu = g_y$ oder ist x_0 $(= y)$ ein Fixpunkt für f_μ (und selbstverständlich auch für g_y).

Bezeichnen wir mit M die Menge aller μ, für die $x_0 = x_\mu$, $f_\mu > g_y$ gilt.

Ist $M = \emptyset$, dann ist $g_y \geqq f_\mu$ für alle μ. (1)

Ist $M \neq \emptyset$, dann haben f_μ und g_y den Punkt y $(= x_0)$ als Fixpunkt (für alle $\mu \in M$). (2)

I. Existiert ein f_ν, $f_\nu \geqq e$, dann ist es möglich — wenn wir die Existenz des Supremums der Menge $\{f_\nu\}$ untersuchen — sich nur auf die f_ν zu beschränken, für die $f_\nu \geqq e$ ist. Es sei also $f_\nu \geqq e$ für alle ν.

Ia. Ist $f_\nu = e$ für alle ν, dann gilt offenbar $\bigvee f_\nu = e$.

Ib. Existiert ein $f_\nu > e$, dann kann man voraussetzen, dass $f_\nu > e$ für alle ν. Wählen wir beliebig (aber fest) ein $y \in \mathfrak{M}(\Gamma)$. Wir beweisen zuerst, dass $g_y \geqq f_\nu$ für alle ν gilt. Weil $f_\nu > e$ für alle ν, so gilt $x_0 \leqq x_\nu = f_\nu^{-1}(y) \leqq y$. Tritt der Fall (2) (d. h. $M \neq \emptyset$) ein, dann ist $y = x_0$, also ist der Punkt y ($= x_\nu = x_0$) ein Fixpunkt für alle ν. Aber das widerspricht der Wahl des Punktes y. Also tritt nur der Fall (1) ein (d. h. $M = \emptyset$), also gilt $g_y \geqq f_\nu$ für alle ν.

Wir zeigen, dass $g_y = \bigvee f_\nu$ ist. Es sei $f \geqq f_\nu$ für alle ν. Dann ist $f^{-1} \leqq f_\nu^{-1}$, also gilt $f^{-1}(y) \leqq f_\nu^{-1}(y) = x_\nu$; daher ist $f^{-1}(y) \leqq \bigwedge x_\nu = x_0$, d. h. $f(x_0) \geqq y$.

Ist $f(x_0) > y = g_y(x_0)$, dann ist $f > g_y$.

Ist $f(x_0) = y = g_y(x_0)$, dann ist nach (β) entweder $f = g_y$ oder f und g_y haben in x_0 einen Fixpunkt (und selbstverständlich ist $x_0 = y$). In dem zweiten Fall gilt $x_0 \leqq x_\nu = f_\nu^{-1}(y) \leqq y = x_0$ für alle ν, also ist $f_\nu(y) = y$, d. h. alle f_ν besitzen in y einen Fixpunkt. Aber das widerspricht der Wahl des Punktes y. Also ist immer $f \geqq g_y$. Daher gilt $g_y = \bigvee f_\nu$.

II. Es sei $f_\nu < e$ für alle ν. Dann ist $x_\nu = f_\nu^{-1}(y) \geqq y$, also gilt $x_0 = \bigwedge x_\nu \geqq y$.

Wählen wir einen echten Zyklus von jedem Elemente f_ν und bezeichnen mit Π den Durchschnitt dieser Zyklen.

Ist $\Pi = \emptyset$ bei beliebiger Wahl der Zyklen, dann gilt $e = \bigvee f_\nu$. Existiert nämlich ein solches $f < e$, dass $f_\nu \leqq f$ für alle ν ist, dann wählen wir den Punkt $x \in A$ ($A =$ ein echter Zyklus des Automorphismus f). Es gilt $f(x) < x$ und daher $f_\nu(x) \leqq f(x) < x$; also ist x der gemeinsame Punkt der echten Zyklen aller f_ν und das ist unmöglich. Daher gilt $e = \bigvee f_\nu$.

Ist bei einer Wahl der Zyklen $\Pi \neq \emptyset$, dann gilt für ein beliebiges $y \in \Pi$, dass kein f_ν in y den Fixpunkt hat. Für dieses y kann der Fall (2) nicht eintreten, also tritt der Fall (1) ein und daher ist $g_y \geqq f_\nu$ für alle ν.

Wir beweisen, dass $\bigvee f_\nu$ existiert.

IIa. Wenn ein $f \in \Gamma$, $e > f \geqq f_\nu$ für alle ν, nicht existiert, dann gilt offenbar $e = \bigvee f_\nu$.

IIb. Setzen wir die Existenz eines solchen Elementes $f \in \Gamma$ voraus, dass $e > f \geqq f_\nu$ für alle ν ist. Wählen wir einen echten Zyklus A des Automorphismus f. Für ein beliebiges $x \in A$ und für alle ν gilt offenbar $f^k(x) \geqq f_\nu^k(x)$ für ein beliebiges ganzes positives k und $f^k(x) \leqq f_\nu^k(x)$ für ein beliebiges ganzes negatives k. Daraus folgt, dass jeder Automorphismus f_ν einen echten Zyklus A_ν hat, für den $A_\nu \supset A$. Daraus folgt, dass für ein Π die Relation $\Pi \supset A$ gilt. Wählen wir ein $y \in A$.

Für alle ν gilt $f \geqq f_\nu \Rightarrow f^{-1} \leqq f_\nu^{-1} \Rightarrow f^{-1}(y) \leqq f_\nu^{-1}(y) = x_\nu$; also ist $f^{-1}(y) \leqq \bigwedge x_\nu = x_0$. Daher ist $f(x_0) \geqq y$. Ist $f(x_0) > y = g_y(x_0)$, dann gilt $f > g_y$. Ist $f(x_0) = y = g_y(x_0)$, dann gilt nach (β) entweder $f = g_y$ oder f und g_y haben in x_0 $(= y)$ einen Fixpunkt. Der zweite Fall kann nicht eintreten, weil f keinen Punkt seines Zyklus A und also auch nicht y für einen Fixpunkt hat. Also ist immer $f \geqq g_y$. So ist auch im Falle IIb bestätigt, dass $g_y = \bigvee f_\nu$ gilt.

Es ist bewiesen, dass Γ eine vollständige einfach geordnete Gruppe ist. Also ist Γ archimedisch und nach dem Hahnschen Satze (siehe [3]) isomorph mit einer Untergruppe der einfach geordneten additiven Gruppe reeller Zahlen. Nach dem Hilfssatze 2 ist Γ ähnlich zu $\mathfrak{M}$.

Hat $\mathfrak{M}$ (und also auch Γ) einen Sprung, dann ist nach dem Satze 5 $\mathfrak{M}$ (und also auch Γ) vom Typus $\omega^* \oplus \omega$. Wie man leicht beweist (siehe z. B. [4], Theorem 2.4), ist Γ isomorph mit der einfach geordneten additiven Gruppe aller ganzen Zahlen.

Wenn $\mathfrak{M}$ (und also auch Γ) keinen Sprung besitzt, dann ist $\mathfrak{M}$, nach dem Hilfssatze 3, isomorph mit der einfach geordneten additiven Gruppe aller reellen Zahlen.

Wenn wir die Bezeichnungen aus dem Beweise des Hilfssatzes 2 benützen, gilt für eine von oben beschränkte Untermenge $\{f_\nu\} \subset \Gamma$ und für ein beliebiges $x \in \mathfrak{M} : \bigvee_\nu [f_\nu(x)] = \bigvee_\nu [\psi_x(f_\nu)] = \psi_x(\bigvee f_\nu) = (\bigvee f_\nu)(x)$ (siehe auch den Hilfssatz 1). Aus dem Satze 4 folgt dann $\bigwedge_\nu [f_\nu^{-1}(x)] = (\bigwedge f_\nu^{-1})(x)$. Der Satz 7 ist bewiesen.

Wesentlich ist im Satze 7 die Forderung der Lückenlosigkeit des $\mathfrak{M}$. Ein Beispiel gibt die einfach geordnete Menge $\mathfrak{M}$ aller rationalen Zahlen. Die Gruppe Γ aller rationalen Translationen auf $\mathfrak{M}$ ist einfach geordnet und weil sie abelsch und transitiv ist (die Eigenschaft e)), so hat sie auch die Eigenschaft (β) (siehe die Anmerkung C). Aber $\mathfrak{M}$ ist nicht ähnlich zu der einfach geordneten Menge aller reellen Zahlen, wie aus dem Satze 7 folgen würde, wäre die Lückenlosigkeit von $\mathfrak{M}$ im Satze 7 nicht vorausgesetzt.

Satz 8. *Γ sei eine transitive Gruppe mit einer der Eigenschaften* a) *bis* d). *$\mathfrak{M}$ enthälte mindestens zwei Punkte. Besitzt $\mathfrak{M}$ einen Sprung, dann ist Γ isomorph mit der einfach geordneten additiven Gruppe aller ganzen Zahlen. Besitzt $\mathfrak{M}$ keinen Sprung und keine Lücke, dann ist Γ isomorph mit der einfach geordneten additiven Gruppe aller reellen Zahlen. In beiden Fällen ist Γ ähnlich mit der einfach geordneten Menge $\mathfrak{M}$.*

Beweis. Nach dem Hilfssatze 2 ist Γ ähnlich mit $\mathfrak{M}$, also auch einfach geordnet. Hat $\mathfrak{M}$ keinen Sprung und keine Lücke, dann ist die Behauptung eine Folgerung des Satzes 7, denn die Gruppe mit einer der Eigenschaften a) bis d) hat die Eigenschaft (β) (s. Anmerkung C).

$\mathfrak{M}$ habe nun einen Sprung. Nach dem Satze 3 ist Γ archimedisch, also ist $\mathfrak{M}$ (und also auch Γ) nach dem Satze 5 vom Typus $\omega^* \oplus \omega$, so dass Γ isomorph mit der einfach geordneten additiven Gruppe aller ganzen Zahlen ist (s. z. B. [4], Theorem 2.4). Dadurch ist der Satz 8 bewiesen.

Es sei bemerkt, dass im Satze 8 der Fall, dass $\mathfrak{M}$ eine Lücke hat, nicht untersucht ist. Die Hypothese, dass in diesem Fall Γ isomorph mit der einfach geordneten additiven Gruppe aller rationalen Zahlen ist, ist falsch, wie das folgende Beispiel der Gruppe Γ bezeugt, die die verlangten Eigenschaften und die Mächtigkeit des Kontinuums hat.

Es sei M die um ein Element verkleinerte Hammelsche Base in der additiven Gruppe aller reellen Zahlen. Dann hat die von der Menge M erzeugte Gruppe $\mathfrak{M}$ die Mächtigkeit des Kontinuums.

Die Menge Γ aller von den Elementen der Menge $\mathfrak{M}$ erzeugten Translationen bildet offensichtlich eine transitive archimedisch geordnete Gruppe von Automorphismen auf der einfach geordneten Menge $\mathfrak{M}$. Die Menge $\mathfrak{M}$ hat eine Lücke: $\mathfrak{M}$ enthält nicht alle reellen Zahlen, also hat $\mathfrak{M}$ nach dem Hilfssatze 3 einen Sprung oder eine Lücke. Die erste Möglichkeit ist aber durch den Satz 5 ausgeschlossen. Durch dieses Beispiel ist die Hypothese widerlegt.

Korollar 1. *$\mathfrak{M}$ sei eine einfach geordnete, keine Lücke und keinen Sprung enthaltende Menge. Dann ist $\mathfrak{M}$ ähnlich mit der einfach geordneten Menge aller reellen Zahlen dann und nur dann, wenn auf $\mathfrak{M}$ eine transitive von* (e) *verschiedene Gruppe der monozyklischen Automorphismen existiert.*

Korollar 2. *Eine einfach geordnete Menge $\mathfrak{M}$, die keinen Sprung enthält, ist ähnlich mit der einfach geordneten Menge aller reellen Zahlen dann und nur dann, wenn auf $\mathfrak{M}$ eine vollständige transitive von* (e) *verschiedene l-Gruppe der Automorphismen existiert.*

Beweis der Notwendigkeit. Die einfach geordnete Gruppe aller reellen Translationen auf $\mathfrak{M}$ hat die verlangten Eigenschaften.

Die Bedingung ist hinreichend. Die vollständige l-Gruppe ist abelsch und archimedisch, so dass, nach dem Hilfssatze 2, Γ archimedisch geordnet ist. Der Rest der Behauptung folgt aus dem Satze 8.

3

In diesem Absatze werden die intransitiven Gruppen von Automorphismen studiert.

Γ sei eine Gruppe von Automorphismen auf $\mathfrak{M}$. Bezeichnen wir mit T ein System der Transitivität der Gruppe Γ. Es ist klar, dass jedes $f \in \Gamma$ die Menge T auf T abbildet. Also induziert jedes $f \in \Gamma$ auf T den Automorphismus f_T, der folgendermassen definiert ist: $f_T(x) = f(x)$ für ein beliebiges $x \in T$. Wir nennen f_T die Komponente des Automorphismus f auf T.

Das System aller f_T $(f \in \Gamma)$ ist eine auf T transitive Gruppe. Es gilt nämlich offenbar $f, g \in \Gamma \Rightarrow (fg)_T = f_T g_T$, $(f^{-1})_T = f_T^{-1}$. Die Transitivität folgt unmittelbar aus der Definition des Transitivitätssystems.

Wir bezeichnen mit Γ_T und nennen die transitive Komponente der Gruppe Γ (auf dem Systeme der Transitivität T) die Gruppe aller f_T. Es ist klar, dass Γ_T eine teilweise geordnete Gruppe ist und aus dem vorhergehenden folgt, dass die Abbildung ψ_T, die einem Elemente $f \in \Gamma$ das Element $f_T \in \Gamma_T$ zuordnet, eine homomorphe Abbildung der teilweise geordneten Gruppe Γ auf die teilweise geordnete Gruppe Γ_T ist. Der Homomorphismus bezieht sich auf die Gruppenoperation und auch auf die teilweise Ordnung.

Ist Γ eine l-Gruppe, dann ist — wie man leicht erkennt — die erwähnte Abbildung ψ_T ein Homomorphismus der l-Gruppe (d. h. der Gruppe und des Verbandes) Γ auf die l-Gruppe Γ_T.

Zusammenfassung der bisherigen Betrachtungen:

Hilfssatz 4. *Ist Γ eine teilweise geordnete Gruppe (l-Gruppe) von Automorphismen auf $\mathfrak{M}$, T ihr System der Transitivität, dann ist die Abbildung ψ_T, die einem beliebigen $f \in \Gamma$ das Element $\psi_T(f) = f_T \in \Gamma_T$ zuordnet, ein Homomorphismus der teilweise geordneten Gruppe (der l-Gruppe) Γ auf die teilweise geordnete Gruppe (die l-Gruppe) Γ_T.*

Hilfssatz 5. *Ist T ein System der Transitivität der Gruppe Γ, $f \in \Gamma$ und ist A ein Zyklus des Elementes f (auf $\mathfrak{M}$), für den $T \cap A \neq 0$, dann ist $T \cap A$ ein Zyklus des Elementes f_T (auf T).*

Die Behauptung ist klar.

Satz 9. 1. *Die teilweise geordnete Gruppe Γ ist ein subdirektes Produkt aller ihrer transitiven Komponenten (teilweise geordneter Gruppen) Γ_T.*

2. *Die l-Gruppe Γ ist ein subdirektes Produkt aller ihrer transitiven Komponenten (l-Gruppen) Γ_T.*

Anmerkung. *Eine teilweise geordnete Gruppe (l-Gruppe) Γ ist ein subdirektes Produkt eines Systems teilweise geordneter Gruppen (l-Gruppen) $\{\Gamma_T\}$, wenn Γ isomorph mit einer Untergruppe (l-Untergruppe) Γ' des vollständigen direkten ($\equiv$ kartesischen $\equiv$ kardinalen) Produktes $\tilde{\Pi}\, \Gamma_T$ des Systems $\{\Gamma_T\}$ ist und wenn die Menge solcher Komponenten der Elemente aus Γ', die zu Γ_T gehören, gleich Γ_T ist* ([1], VI, § 6). Der in dieser Definition erforderte Isomorphismus bezieht sich auf die Gruppenoperation und auch auf die teilweise Ordnung (auf die Verbandsoperationen).

Für die ungeordneten Gruppen Γ ist die Behauptung bekannt. Den leichten Beweis des Ordnungsisomorphismus (Verbandsisomorphismus) ergänzen wir.

Beweis. Jedem $f \in \Gamma$ ordnet man das System $\{f_T\}$ aller seiner Komponenten zu; die zugehörige Abbildung φ ist eineindeutig: für $f, g \in \Gamma$ sei $f_T = g_T$ für alle T, d. h. $\{f_T\} = \{g_T\}$. Wählen wir ein beliebiges $x \in \mathfrak{M}$; es gilt $x \in T$ für ein

System der Transitivität T. Dann ist $f(x) = f_T(x) = g_T(x) = g(x)$. Also gilt $f = g$. Mit Rücksicht darauf, dass die algebraischen Operationen und Relationen auf dem vollständigen direkten Produkte $\tilde{\Pi}\, \Gamma_T$ komponentenweise durchgeführt werden, ist die Abbildung φ ein Isomorphismus der teilweise geordneten Gruppe Γ in die l-Gruppe $\tilde{\Pi}\, \Gamma_T$. Ist Γ eine l-Gruppe, so ist $\varphi(\Gamma)$ offenbar eine l-Untergruppe in $\tilde{\Pi}\, \Gamma_T$ (denn $\{f_T\} \vee \{g_T\} = \{f_T \vee g_T\} = \{(f \vee g)_T\} = \varphi(f \vee g)$). Die Isotonie der Abbildung φ^{-1} ist auch klar. Im Falle 1. und 2. ist es klar, dass f_T die ganze Gruppe Γ_T durchläuft, wenn f die ganze Γ durchläuft.

Satz 10. *T sei ein Transitivitätssystem der Gruppe Γ der Automorphismen auf $\mathfrak{M}$. Ist die Gruppe Δ aller Automorphismen auf T eine abelsche, dann ist $\Gamma_T = \Delta$.*

Beweis. Wenn T nur einen Punkt enthält, dann gilt $\Delta = (e_T) = \Gamma_T$. Nun enthälte T mindestens zwei Punkte. Es gilt $\Gamma_T \subset \Delta$. Weil Γ_T transitiv auf T ist, ist Δ transitiv auf T.

Es sei $t \in \Delta$, $x \in T(\Delta)$ $(= T)$. Weil Γ_T transitiv auf T ist, existiert ein $f_T \in \Gamma_T$ so, dass $t(x) = f_T(x)$ gilt; aus der Anmerkung B, die auf Δ angewendet wird, folgt $t = f_T$. Also ist $\Delta \subset \Gamma_T$. Zusammen mit der Relation $\Delta \supset \Gamma_T$ bekommt man $\Delta = \Gamma_T$.

Satz 11. *T sei ein Transitivitätssystem einer monozyklischen Gruppe Γ der Automorphismen auf $\mathfrak{M}$. Die Menge*[4]*) aller monozyklischen Automorphismen auf T sei eine Gruppe. Dann ist $\Gamma_T = \Delta$.*

Beweis. Wenn T nur einen Punkt enthält, dann gilt $\Delta = (e_T) = \Gamma_T$.

Nun enthälte T mindestens zwei Punkte. Nach dem Hilfssatze 5 gilt $\Gamma_T \subset \Delta$. Also ist Δ transitiv auf T. Es sei $t \in \Delta$, $x \in T(\Delta)$ $(= T)$. Weil Γ_T transitiv auf T ist, existiert ein solches $f_T \in \Gamma_T$, dass $t(x) = f_T(x)$. Nach der Anmerkung B, die auf Δ angewendet wird[5]), gilt $t = f_T$, also $\Gamma_T \supset \Delta$. Daraus die Behauptung.

Satz 12. *Γ sei eine archimedisch geordnete Gruppe der Automorphismen auf $\mathfrak{M}$. Dann sind alle echten*[6]*) Transitivitätssysteme T der Gruppe Γ ähnlich mit der einfach geordneten Menge Γ und jede einfach geordnete Gruppe Γ_T (für ein echtes T) ist isomorph mit der einfach geordneten Gruppe Γ.*

Beweis. Γ_T ist offenbar einfach geordnet und nach dem Hilfssatze 2 ist Γ_T ähnlich mit T.

T sei ein echtes Transitivitätssystem der Gruppe Γ. Bezeichnen wir ψ_T die Abbildung, die dem Elemente $f \in \Gamma$ das Element $f_T \in \Gamma_T$ zuordnet. Die Abbildung ψ_T ist nach dem Hilfssatze 4 ein Homomorphismus der Gruppe und des Verbandes Γ auf Γ_T.

---

[4]) Siehe die Anmerkung hinter der Definition des monozyklischen Automorphismus.

[5]) Die monozyklische Gruppe Δ ist nach dem Satze 3 archimedisch geordnet, also abelsch.

[6]) Ein System der Transitivität heisst echt, wenn es mindestens zwei Punkte enthält.

Wir zeigen, dass sie eineindeutig ist. Es sei $f, g \in \Gamma$, $\psi_T(f) = \psi_T(g)$. Dann gilt für alle $x \in T$ $f(x) = g(x)$. Weil $T \subset \mathfrak{M}(\Gamma)$ offenbar gilt, ist nach der Anmerkung B $f = g$. Also sind die einfach geordneten Gruppen Γ_T und Γ isomorph. Die Ähnlichkeit der einfach geordneten Mengen T und Γ folgt aus der Ähnlichkeit der einfach geordneten Mengen T, Γ_T und Γ_T, Γ.

Analog zum Begriffe des subdirekten Produktes teilweise geordneter Gruppen führen wir den Begriff des subdirekten Produktes teilweise geordneter Mengen ein:

Eine teilweise geordnete Menge Γ ist ein subdirektes Produkt des Systems $\{T\}$ von teilweise geordneten Mengen, wenn sie der Untermenge Γ' des Kardinalproduktes des Systems $\{T\}$ ähnlich ist und wenn die Menge der Komponenten der Elemente aus Γ', die in T liegen, gleich T ist.

Satz 13. *Γ sei eine abelsche Gruppe der Automorphismen auf $\mathfrak{M}$. Dann ist die teilweise geordnete Menge Γ ein subdirektes Produkt aller Transitivitätssysteme der Gruppe Γ.*

Beweis. Gemäss dem Hilfssatze 2 ist die teilweise geordnete Menge Γ_T ähnlich mit T. Nach dem Satze 9 ist Γ ein subdirektes Produkt des Systems aller seiner transitiven Komponenten. Daraus die Behauptung.

T sei ein Transitivitätssystem der l-Gruppe Γ von Automorphismen.

Bezeichnen wir mit Γ^T die Menge aller solcher $f \in \Gamma$, dass $f(x) = x$ für $x \in \mathfrak{M} - T$ gilt.

Hilfssatz 6. *Γ^T ist ein l-Ideal in der l-Gruppe Γ.*

Beweis. Γ^T ist offenbar eine Untergruppe in Γ. Es sei $f \in \Gamma^T$, $g \in \Gamma$. Wählt man ein beliebiges $x \in \mathfrak{M} - T$, dann ist $g(x) \in \mathfrak{M} - T$, also gilt $g^{-1}fg(x) = g^{-1}g(x) = x$, daher ist $g^{-1}fg \in \Gamma^T$, d. h. Γ^T ist ein Normalteiler in Γ. Es sei nun $f \in \Gamma^T$, $g \in \Gamma$, $|f| \geqq |g|$.[7] Für $x \in \mathfrak{M} - T$ gilt offensichtlich $|f|(x) = (f \vee f^{-1})(x) = f(x) \vee f^{-1}(x) = x$, so dass $x = |f|(x) \geqq |g|(x) = (g \vee g^{-1})(x) = g(x) \vee g^{-1}(x)$ ist. Ist $g(x) > x$, dann ist $g^{-1}(x) < x$, also gilt $g(x) \vee g^{-1}(x) > x$, was ein Widerspruch ist. Ist $g(x) < x$, dann ist $g^{-1}(x) > x$, also ist $g(x) \vee g^{-1}(x) > x$. Aus diesem Widerspruch folgt $g(x) = x$. Also gilt $g \in \Gamma^T$. Γ^T ist also ein l-Ideal in der l-Gruppe Γ.

Hilfssatz 7. *Wenn die Zerlegung auf die Transitivitätssysteme der l-Gruppe Γ genau zwei echte Systeme T, S enthält, und wenn Γ_T, Γ_S einfach geordnet sind, dann ist $J = \Gamma^T\Gamma^S$ ein solches l-Ideal in Γ, dass die l-Faktorgruppe Γ/J einfach geordnet ist.*

Beweis. Ist ψ_T die Abbildung aus dem Hilfssatze 4, bezeichnet man $\psi_T(\Gamma^T) = \Gamma_T^T$. Unter der Voraussetzung, dass Γ_T^T ein l-Ideal in Γ_T ist, wird bewiesen, dass $\Gamma/\Gamma^T\Gamma^S \cong \Gamma_T/\Gamma_T^T$ gilt. ψ_T bildet die l-Gruppe Γ homomorph auf die l-Gruppe Γ_T ab. Die natürliche Abbildung χ bildet die l-Gruppe Γ_T

[7]) $|f|$ bezeichnet den absoluten Wert des Elementes f und zwar $|f| = f \vee f^{-1}$.

auf die l-Gruppe Γ_T/Γ_T^T ab. Der Kern der Abbildung χ (die Menge aller Urbilder des Einheitselementes in der Abbildung χ) ist Γ_T^T, der Kern der Abbildung ψ_T ist Γ^S. Weil $\psi_T(\Gamma^T) = \Gamma_T^T$ gilt, ist $\Gamma^T\Gamma^S$ der Kern der Abbildung $\chi\psi_T$. Daher gilt $\Gamma/\Gamma^T\Gamma^S \cong \Gamma_T/\Gamma_T^T$. Weil Γ_T einfach geordnet ist, ist Γ_T/Γ_T^T und auch $\Gamma/\Gamma^T\Gamma^S$ einfach geordnet. Wir beweisen, dass Γ_T^T ein l-Ideal in Γ_T ist. Γ_T^T ist ein Normalteiler in Γ_T, weil ψ_T homomorph Γ auf Γ_T, Γ_T auf Γ_T^T abbildet und Γ^T ein Normalteiler in Γ ist. Man zeigt weiter, dass Γ_T^T konvex in Γ_T ist: Es sei $h_T \in \Gamma_T$, $f_T, g_T \in \Gamma_T^T$, $f_T \geqq h_T \geqq g_T$. Es existieren solche f, $g \in \Gamma^T$, $h \in \Gamma$, dass $\psi_T(f) = f_T$, $\psi_T(g) = g_T$, $\psi_T(h) = h_T$ ist. Ist $h_S \geqq e_S$ ($e_S =$ das Einheitselement in Γ_S, $h_S = \psi_S(h)$), dann gilt für $x \in \mathfrak{M} - T$ (wir bemerken, dass $\mathfrak{M}(\Gamma) = T \cup S$) $(f \wedge h)(x) = f(x) \wedge h(x) = x \wedge h(x) = x$, also $f \wedge h \in \Gamma_T$, also gilt $\Gamma_T^T \ni (f \wedge h)_T = f_T \wedge h_T = h_T$. Ist $e_S \geqq h_S$, dann gilt für $x \in \mathfrak{M} - T$ $(g \vee h)(x) = g(x) \vee h(x) = x \vee h(x) = x$, also $g \vee h \in \Gamma^T$, also $\Gamma_T^T \ni (g \vee h)_T = g_T \vee h_T = h_T$. In beiden Fällen ist daher $h_T \in \Gamma_T^T$. So ist bewiesen, dass Γ_T^T ein l-Ideal in Γ_T ist und der Beweis des Hilfssatzes ist erbracht.

Satz 14. *Γ sei eine archimedische l-Gruppe, Γ habe genau zwei echte Transitivitätssysteme T, S. Dann ist Γ dann und nur dann einfach geordnet, wenn $\Gamma^T = (e) = \Gamma^S$.*

Beweis. Γ sei eine archimedische l-Gruppe; Γ habe genau zwei echte Transitivitätssysteme T, S.

1. Γ sei einfach geordnet. Nach der Anmerkung hinter dem Satze 3 besitzen alle Elemente $\neq e$ aus Γ dieselbe Zyklenzerlegung. Daraus folgt, dass jedes echte Transitivitätssystem der Gruppe Γ ein Teil eines echten Zyklus A ist. Ist T, $S \subset A$, dann ist Γ monozyklisch und offenbar $\Gamma^T = (e) = \Gamma^S$.

Ist $T \subset A$, $S \subset B$, wo A, B zwei verschiedene Zyklen sind, dann ist offenbar $T = A$, $S = B$. Dann gilt aber wieder $\Gamma^T = (e) = \Gamma^S$, weil kein $f \in \Gamma$, $f \neq e$, fix auf A ($= T$) bzw. auf B ($= S$) ist.

2. Umgekehrt sei $\Gamma^T = (e) = \Gamma^S$. Weil die l-Gruppe Γ archimedisch ist, ist sie abelsch, also sind Γ^T bzw. Γ^S abelsch; da sie transitiv (auf T bzw. auf S) sind, sind sie nach dem Korollar des Satzes 1 einfach geordnet. Gemäss Hilfssatz 7 ist Γ/J, wo $J = \Gamma^T\Gamma^S$, einfach geordnet. Da aber $J = \Gamma^T\Gamma^S = (e)$ gilt, ist Γ einfach geordnet.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] *G. Birkhoff:* Lattice Theory, New York, rev. ed. 1948.

[2] *A. H. Clifford:* Note on Hahn's theorem on ordered abelian groups, Proc. Am. Math. Soc. *5* (1954), 860—863.

[3] *H. Hahn:* Über nichtarchimedische Grössensysteme, Sitzber. d. Ak. d. Wiss. Wien, *116* (1907), Abt. IIa, Heft 3.

[4] *F. Loonstra:* Discrete groups, Indagationes math. *13* (1951), 162—168.

[5] *L. Rieger:* O uspořádaných a cyklicky uspořádaných grupách I—III, Věstník Král. č. spol. nauk, tř. mat.-přír. I *6* (1946), 1—31; II *7* (1947), 1—33; III *8* (1948), 1—26.

Výtah

AUTOMORFISMY USPOŘÁDANÝCH MNOŽIN

FRANTIŠEK ŠIK, Brno

(Došlo dne 9. června 1956)

1. $\mathfrak{M}$ všude znamená jednoduše uspořádanou množinu, Γ nějakou grupu automorfismů na $\mathfrak{M}$. Grupa Γ vzhledem k přirozenému uspořádání ($f \leqq g \Leftrightarrow f(x) \leqq g(x)$ pro všechna $x \in \mathfrak{M}$) tvoří částečně uspořádanou grupu.

Prvky f, $g \in \Gamma$ nazveme *stejně orientovanými*, jestliže pro libovolné $x \in \mathfrak{M}$ platí: $f(x) > x \Rightarrow g(x) \geqq x$; $g(x) > x \Rightarrow f(x) \geqq x$.

V práci jsou dokázány tyto hlavní věty:

Věta 1. *Transitivní grupa Γ automorfismů na $\mathfrak{M}$ je jednoduše uspořádána, když a jen když konjugované prvky jsou stejně orientovány.*

Je-li $x \in \mathfrak{M}$, $f \in \Gamma$, pak sjednocení (přes všechna přirozená n) intervalů s koncovými body $f^n(x)$, $f^{-n}(x)$ se nazývá *cyklus* automorfismu f. Obsahuje-li cyklus aspoň dva prvky z $\mathfrak{M}$, nazývá se *vlastní*. Grupa Γ je *monocyklická*, jestliže každý prvek $f \in \Gamma$ má nejvýš jeden vlastní cyklus. Pod $\mathfrak{M}(\Gamma)$ rozumíme sjednocení všech vlastních cyklů všech $f \in \Gamma$. Má-li automorfismus f vlastní cyklus A, pak automorfismus g, definovaný $x \in A \Rightarrow g(x) = f(x)$, $x \bar{\in} A \Rightarrow g(x) = x$, se nazývá *fáze* automorfismu f. Grupa Γ automorfismů má vlastnost (α), jestliže s každým prvkem $f \in \Gamma$, $f \neq e$, obsahuje nenulovou mocninu aspoň jedné jeho fáze. Grupa Γ je *divergentní*, existuje-li k libovolným $x, y \in \mathfrak{M}(\Gamma)$, $x < y$, takové $f \in \Gamma$, že $f(x) \geqq y$.

Věta 3. *Na grupě Γ jsou ekvivalentní následující vlastnosti:* a) *monocykličnost,* b) *archimedovské uspořádání a divergence,* c) *$\mathfrak{M}(\Gamma)$ je cyklem každého automorfismu $\neq e$ z Γ,* d) *jednoduché uspořádání a vlastnost* (α).

2. Množina $\mathfrak{M}$ je *shora* (*zdola*) *slabě úplná* vzhledem ke Γ, když ke každé shora (zdola) omezené množině automorfismů $\{f_\nu\} \subset \Gamma$ existuje v $\mathfrak{M}$ prvek $\bigvee[f_\nu(x)]$ ($\bigwedge[f_\nu(x)]$) pro libovolné $x \in \mathfrak{M}$.

$\mathfrak{M}$ je *slabě úplná* vzhledem ke Γ, je-li shora i zdola slabě úplná vzhledem ke Γ.

Věta 4. *Je-li některá z následujících podmínek* 1, 2, 3 *splněna pro libovolnou shora omezenou část $\{f_\nu\}$ grupy Γ automorfismů na $\mathfrak{M}$, pak jsou splněny i ostatní, Γ je úplná l-grupa a pro zobrazení s a t níže definovaná platí $s = \bigvee f_\nu$, $t = \bigwedge f_\nu^{-1}$.*

1. $\mathfrak{M}$ *je shora slabě úplná vzhledem ke* Γ *a zobrazení* $s(x) = \bigvee_{\nu}[f_{\nu}(x)]$ *je automorfismus na* $\mathfrak{M}$;

2. $\mathfrak{M}$ *je zdola slabě úplná vzhledem ke* Γ *a zobrazení* $t(x) = \bigwedge_{\nu}[f_{\nu}^{-1}(x)]$ *je automorfismus na* $\mathfrak{M}$;

3. $\mathfrak{M}$ *je slabě úplná vzhledem ke* Γ *a pro libovolné* $x \in \mathfrak{M}$ *platí*

$$\bigvee_{\nu}\{f_{\nu}(\bigwedge_{\mu}[f_{\mu}^{-1}(x)])\} \geqq \bigwedge_{\nu}\{f_{\nu}^{-1}(\bigvee_{\mu}[f_{\mu}(x)])\}.$$

Věta 8. *Ať* Γ *je transitivní grupa automorfismů s některou z vlastností* a) *až* d) *z věty* 3 (*vlastnost* b) *bez divergence*). *Ať* $\mathfrak{M}$ *obsahuje aspoň dva prvky. Pak* Γ *je isomorfní s jednoduše uspořádanou aditivní grupou všech celých čísel resp. všech reálných čísel podle toho, má-li* $\mathfrak{M}$ *skok resp. nemá-li skok ani mezeru. V obou případech je* Γ (*co do uspořádání*) *podobná s jednoduše uspořádanou množinou* $\mathfrak{M}$.

Důsledek 2. *Jednoduše uspořádaná množina* $\mathfrak{M}$ *bez skoků je podobná s jednoduše uspořádanou množinou všech reálných čísel, když a jen když na* $\mathfrak{M}$ *existuje úplná transitivní l-grupa automorfismů, různá od* (e).

Věta 5. *Jednoduše uspořádaná množina* $\mathfrak{M}$ *se skokem je typu* $\omega^* \oplus \omega$, *když a jen když na* $\mathfrak{M}$ *existuje archimedovsky uspořádaná transitivní grupa automorfismů.*

3. Je-li T systém transitivity grupy Γ, pak pod Γ_T rozumíme grupu všech automorfismů na T indukovaných na T automorfismy grupy Γ a pod Γ^T grupu všech automorfismů z Γ, jež jsou fixní vně T.

Věta 10. *Ať* T *je systém transitivity grupy* Γ *automorfismů na* $\mathfrak{M}$. *Ať grupa* Δ *všech automorfismů na* T *je abelovská; pak* $\Gamma_T = \Delta$.

Věta 12. *Ať* Γ *je archimedovsky uspořádaná grupa automorfismů na* $\mathfrak{M}$. *Pak všechny vlastní systémy transitivity* T *grupy* Γ *jsou podobné s jednoduše uspořádanou množinou* Γ *a každá jednoduše uspořádaná grupa* Γ_T (*pro* T *vlastní*) *je isomorfní s jednoduše uspořádanou grupou* Γ.

Věta 14. *Ať* Γ *je archimedovská l-grupa, ať* Γ *má právě dva vlastní systémy transitivity* T, S. *Pak* Γ *je jednoduše uspořádaná, když a jen když* $\Gamma^T = (e) = \Gamma^S$.

Резюме

АФТОМОРФИЗМЫ УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ

ФРАНТИШЕК ШИК, Брно
(Поступило в редакцию 9/VI 1956 г.)

1. $\mathfrak{M}$ означает просто упорядоченное множество, Γ — какую-нибудь группу афтоморфизмов на $\mathfrak{M}$. Естественное упорядочение ($f \leqq g \Leftrightarrow f(x) \leqq g(x)$ для всех $x \in \mathfrak{M}$) превращает группу Γ в частично упорядоченную группу. Два элемента $f, g \in \Gamma$ называются одинаково ориентированными, если для любого $x \in \mathfrak{M}$ $f(x) > x \Rightarrow g(x) \geqq x$; $g(x) > x \Rightarrow f(x) \geqq x$.

В работе доказаны следующие главные теоремы.

Теорема 1. *Транзитивная группа Γ афтоморфизмов на $\mathfrak{M}$ просто упорядочена тогда и только тогда, если сопряженные элементы одинаково ориентированы.*

Если $x \in \mathfrak{M}$, $f \in \Gamma$, то соединение (для всех натуральных n) интервалов, ограниченных точками $f^n(x)$, $f^{-n}(x)$, называется *циклом* афтоморфизма f. Если цикл содержит по крайней мере два элемента из $\mathfrak{M}$, то он называется *истинным циклом*. Группа Γ — *моноциклическая*, если каждый элемент $f \in \Gamma$ обладает самое больше одним истинным циклом. Под $\mathfrak{M}(\Gamma)$ подразумевается соединение всех инстинных циклов всех $f \in \Gamma$. Если афтоморфизм f обладает истинным циклом A, то афтоморфизм g называется *фазой* афтоморфизма f, если он обладает следующим свойством: $x \in A \Rightarrow g(x) = f(x)$; $x \bar{\in} A \Rightarrow g(x) = x$. Группа Γ афтоморфизмов обладает свойством (α), если с каждым элементом $f \in \Gamma$, $f \neq e$, содержит от нуля отличную степень по крайней мере одной его фазы. Группа Γ *дивергентна*, если к любым $x, y \in \mathfrak{M}$, $x < y$, существует такое $f \in \Gamma$, что $f(x) \geqq y$.

Теорема 3. *На группе Γ эквивалентны следующие свойства* а) *моноцикличность*, б) *архимедово простое упорядочение и дивергенция*, в) $\mathfrak{M}(\Gamma)$ *является циклом каждого афтоморфизма $\neq e$ из Γ*, д) *простое упорядочение и свойство* (α).

2. Множество $\mathfrak{M}$ — *сверху* (*снизу*) *слабо полное* относительно Γ, если для каждого сверху (снизу) ограниченного множества афтоморфизмов $\{f_\nu\} \subset \Gamma$ существует в $\mathfrak{M}$ элемент $\bigvee_\nu [f_\nu(x)]$ ($\bigwedge_\nu [f_\nu(x)]$) для любого $x \in \mathfrak{M}$. $\mathfrak{M}$ — слабо полное относительно Γ, если $\mathfrak{M}$ — сверху и снизу слабо полное относительно Γ.

Теорема 4. *Если некоторое из условий* 1, 2, 3 *выполнено для любого сверху ограниченного подмножества $\{f_\nu\}$ группы Γ афтоморфизмов на $\mathfrak{M}$, то выполнены тоже остальные, Γ — полная l-группа, и для определенных в условиях* 1 *и* 2 *преобразований s и t $s = \bigvee f_\nu$, $t = \bigwedge f_\nu^{-1}$.*

1. $\mathfrak{M}$ — *сверху слабо полное относительно Γ, и преобразование* $s(x) = \bigvee_{\nu}[f_\nu(x)]$ *является афтоморфизмом на* $\mathfrak{M}$;

2. $\mathfrak{M}$ — *снизу слабо полное относительно Γ, и преобразование* $t(x) = \bigwedge_{\nu}[f_\nu^{-1}(x)]$ *является афтоморфизмом на* $\mathfrak{M}$;

3. $\mathfrak{M}$ — *слабо полное относительно Γ, и для любого $x \in \mathfrak{M}$ имеет место* $\bigvee_{\nu}\{f_\nu(\bigwedge_{\mu}[f_\mu^{-1}(x)])\} \geqq \bigwedge_{\nu}\{f_\nu^{-1}(\bigvee_{\mu}[f_\mu(x)])\}$.

Теорема 8. *Пусть Γ — транзитивная группа афтоморфизмов, обладающая некоторым из свойств* а)—д) *из теоремы* 3 (*свойство* б) *без дивергенции*). *Пусть $\mathfrak{M}$ содержит по крайней мере два элемента. Тогда Γ изоморфна просто упорядоченной аддитивной группе всех целых чисел, соотв. всех действительных чисел, смотря по тому, обладает ли $\mathfrak{M}$ скачком, соотв. не обладает ли $\mathfrak{M}$ ни скачком ни просветом. В обоих случаях Γ подобна просто упорядоченному множеству $\mathfrak{M}$.*

Следствие 2. *Просто упорядоченное множество $\mathfrak{M}$ без скачков подобно просто упорядоченному множеству всех действительных чисел тогда и только тогда, если существует на $\mathfrak{M}$ полная транзитивная l-группа афтоморфизмов, отличная от* (e).

Теорема 5. *Просто упорядоченное множество $\mathfrak{M}$, обладающее скачком, является множеством типа $\omega^* \oplus \omega$ тогда и только тогда, если существует на $\mathfrak{M}$ архимедова просто упорядоченная транзитивная группа афтоморфизмов.*

3. Если T — система транзитивности группы Γ, то под Γ_T подразумевается группа всех афтоморфизмов на T, индуцированных на T афтоморфизмами группы Γ, а под Γ^T — группа всех афтоморфизмов из Γ, для которых точки вне T неподвижны.

Теорема 10. *Пусть T — система транзитивности группы Γ афтоморфизмов на $\mathfrak{M}$. Пусть группа Δ всех афтоморфизмов на T абелева. Тогда* $\Gamma_T = \Delta$.

Теорема 12. *Пусть Γ — архимедова просто упорядоченная группа афтоморфизмов на $\mathfrak{M}$. Тогда каждая истинная система транзитивности T группы Γ подобна просто упорядоченному множеству Γ, и каждая просто упорядоченная группа Γ_T (для истинных T) изоморфна просто упорядоченной группе Γ.*

Теорема 14. *Пусть Γ — архимедова l-группа, пусть Γ обладает двумя истинными системами транзитивности T, S. Группа Γ просто упорядочена тогда и только тогда, если имеют место равенства* $\Gamma^T = (e) = \Gamma^S$.