Časopis pro pěstování matematiky

Ladislav Kosmák

Poznámka o řešeních rovnice $\sum_{i=1}^{k} r_i = n$ celými nezápornými čísly

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 83 (1958), No. 1, 80--82

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108191

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1958

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958), Praha

POZNÁMKA O ŘEŠENÍCH ROVNICE $\sum_{i=1}^{k} r_i = n$ CELÝMI NEZÁPORNÝMI ČÍSLY

LADISLAV KOSMÁK, Brno

DT: 519 1

(Došlo dne 16. února 1957)

Článek pojednává o jistých extremálních vlastnostech t. zv. hlavního řešení rovnice (1) (srv. práci [1]).

V článku [1] se K. ČULÍK zabývá otázkou, pro která nezáporná celá čísla $r_1, r_2, \ldots, r_k$, jež vyhovují rovnici

$$\sum_{i=1}^{k} r_i = n \quad (k, n \text{ přirozená čísla}) , \tag{1}$$

nabude součet $\sum_{i=1}^{k} \binom{r_i}{c}$ ($c \geqq 0$ celé) minimální hodnoty. Dokazuje, že to nastane pro t. zv. hlavní řešení $h_1, h_2, \ldots, h_k$ rovnice (1), které je definováno tak, že z čísel $h_1, h_2, \ldots, h_k$ je $k - n + k\left[\frac{n}{k}\right]$ rovno $\left[\frac{n}{k}\right]$ a ostatní jsou rovna $\left[\frac{n}{k}\right] + 1$; toto řešení je (viz [1]) charakterisováno vztahem

$$\max_{1 \leqq i \leqq k} h_i - \min_{1 \leqq i \leqq k} h_i \leqq 1 .$$

Při důkazu používá Čulík pomocných vztahů mezi celými nezápornými čísly c, p, r:

$$2\binom{r}{c} \leqq \binom{p}{c} + \binom{2r-p}{c} \quad (\text{při } p \leqq 2r) , \tag{2}$$

$$\binom{r}{c} + \binom{r+1}{c} \leqq \binom{p}{c} + \binom{2r-p+1}{c} \quad (\text{při } p \leqq 2r+1) . \tag{3}$$

V této poznámce je podán jednoduchý důkaz těchto vztahů, který zároveň umožňuje zesílit tvrzení uvedené věty.

Pišme nerovnost (2) ve tvaru

$$\binom{r}{c} - \binom{p}{c} \leqq \binom{2r-p}{c} - \binom{r}{c} ;$$

pro důkaz můžeme předpokládat, že $p < r$. Označme $b_t = \binom{t}{c}$ pro $t = 0, 1, \ldots$; posloupnost $\{b_t\}_{t=0}^{\infty}$ zřejmě neklesá a pro $c > 0$ vybraná posloupnost $\{b_{t+c-1}\}_{t=0}^{\infty}$ roste. Položme $d_t = b_{t+1} - b_t$, $t = 0, 1, \ldots$, takže $d_t = \binom{t}{c-1}$. Pak je

$$\binom{2r-p}{c} - \binom{r}{c} = b_{2r-p} - b_r = d_{2r-p-1} + d_{2r-p-2} + \ldots + d_r \geqq$$
$$\geqq d_{r-1} + d_{r-2} + \ldots + d_p = b_r - b_p = \binom{r}{c} - \binom{p}{c}.$$

Ostrá nerovnost platí právě tehdy, když $p \neq r$, $2 \leqq c \leqq \max\{p, 2r-p\}$. Obdobně se dokáže (3), kde ostrá nerovnost platí právě tehdy, je-li $p \neq r$, $p \neq r+1$, $2 \leqq c \leqq \max\{p, 2r-p+1\}$. Odtud plyne (viz důkaz věty 2 v citované Čulíkově práci):

Nechť $h_1, h_2, \ldots, h_k$ je hlavní řešení rovnice (1) *a nechť $r_1, r_2, \ldots, r_k$ je libovolné další řešení (různé od hlavního). Pak nerovnost*

$$\sum_{i=1}^{k} \binom{h_i}{c} < \sum_{i=1}^{k} \binom{r_i}{c}$$

platí právě tehdy, když $2 \leqq c \leqq \max\limits_{1 \leqq i \leqq k} r_i$; jinak je

$$\sum_{i=1}^{k} \binom{h_i}{c} = \sum_{i=1}^{k} \binom{r_i}{c}$$

pro každé řešení $r_1, r_2, \ldots, r_k$ rovnice (1).

LITERATURA

[1] *K. Čulík:* O jedné vlastnosti nezáporných celočíselných řešení rovnice $\sum_{i=1}^{k} r_i = n$, Čas. pro pěstování matematiky, *82* (1957), 353—359.

Резюме

ЗАМЕТКА О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ $\sum_{i=1}^{k} r_i = n$ В ЦЕЛЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЛАХ

ЛАДИСЛАВ КОСМАК (Ladislav Kosmák), Брно

(Поступило в редакцию 16/II 1957 г.)

Пусть k, n — натуральные числа и пусть $h_1, h_2, \ldots, h_k$ — целые неотрицательные числа, определенные условиями $\sum_{i=1}^{k} h_i = n$, $\max\limits_{1 \leqq i \leqq k} h_i - \min\limits_{1 \leqq i \leqq k} h_i \leqq 1$;

пусть $r_1, r_2, \ldots, r_k$ — произвольные целые неотрицательные числа, для которых $\sum_{i=1}^{k} r_i = n$. В работе доказывается теорема (см. Чулик [1]):

Неравенство $\sum_{i=1}^{k} \binom{h_i}{c} < \sum_{i=1}^{k} \binom{r_i}{c}$ *справедливо тогда и только тогда, если* $2 \leqq c \leqq \max_{1 \leqq i \leqq k} r_i > 1 + \min_{1 \leqq i \leqq k} r_i$; *в противном случае* $\sum_{i=1}^{k} \binom{h_i}{c} = \sum_{i=1}^{k} \binom{r_i}{c}$.

Zusammenfassung

BEMERKUNG ÜBER DIE NICHTNEGATIVEN GANZZAHLIGEN LÖSUNGEN DER GLEICHUNG $\sum_{i=1}^{k} r_i = n$

LADISLAV KOSMÁK, Brno

(Eingelangt 16. 2. 1957)

Es seien k, n beliebige natürliche Zahlen und $h_1, h_2, \ldots, h_k$ die nichtnegativen ganzen Zahlen, welche durch die Bedingungen $\sum_{i=1}^{k} h_i = n$, $\max_{1 \leqq i \leqq k} h_i - \min_{1 \leqq i \leqq k} h_i \leqq 1$ bestimmt werden; ferner seien $r_1, r_2, \ldots, r_k$ beliebige nichtnegative ganze Zahlen, für welche $\sum_{i=1}^{k} r_i = n$ gilt. In der vorliegenden Arbeit wird folgender Satz bewiesen (vgl. ČULÍK [1]):

Die Ungleichung $\sum_{i=1}^{k} \binom{h_i}{c} < \sum_{i=1}^{k} \binom{r_i}{c}$ *gilt dann und nur dann, wenn* $2 \leqq c \leqq \max_{1 \leqq i \leqq k} r_i > 1 + \min_{1 \leqq i \leqq k} r_i$; *sonst ist* $\sum_{i=1}^{k} \binom{h_i}{c} = \sum_{i=1}^{k} \binom{r_i}{c}$.