Úlohy a problémy

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 83 (1958), No. 1, 101--102

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108190`

ÚLOHY A PROBLÉMY

1. Budiž P množina všech posloupností $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, kde $a_k = 0$ nebo 1. Nechť Q je množina všech posloupností $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$, kde $b_k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} a_i$, při čemž $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ probíhá množinu P. Rozhodněte, zda ke každému intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$ (kde $0 < \alpha \leqq \beta < 1$) existuje v Q posloupnost, jejíž množina hromadných hodnot je právě $\langle\alpha, \beta\rangle$. (Speciálně tedy: Lze každé číslo $\gamma \in (0, 1)$ pokládat za limitu jisté posloupnosti z Q?)

Dále vyšetřete, zda pro každou posloupnost z Q je množina hromadných hodnot intervalem.

Jiří Sedláček, Praha

2. V eukleidovském n-rozměrném prostoru je dáno $N = 2^n$ navzájem různých bodů $A_1, A_2, \ldots, A_N$ tak, že pro $i, j, k = 1, 2, \ldots, N$ ($i \neq j \neq k \neq i$) platí $\sphericalangle A_iA_jA_k \leqq \frac{\pi}{2}$. Rozhodněte, zda platí, že body $A_1, A_2, \ldots, A_N$ jsou vrcholy n-rozměrného kvádru (t. j. pravoúhlého rovnoběžnostěnu).

M. Fiedler, Praha

Řešení úlohy 4 (autor *M. Fiedler*) z č. 2 roč. 82 (1957), str. 229.

Bohuslav Míšek, Honice u Nového Strašecí, zaslal redakci řešení částí a), b) úlohy 4. Uveřejňujeme zde výsledky:

Řešením úl. 4 a) je prostorový čtyřúhelník $ABCD$, jehož všechny čtyři strany mají délku $\frac{1}{4}$ a pro který platí $ABC \perp CDA$, $BCD \perp DAB$.

Řešením úl. 4b) je prostorový pětiúhelník $ABCDE$, pro který $AB = BC = DE = EA = \frac{3}{16}$, $CD = \frac{1}{4}$, $AC = AD = \frac{\sqrt{5}}{8}$ a dále $ABC \perp ACD \perp ADE$, při čemž rovina ACD odděluje body B, E. Tomuto pětiúhelníku nelze opsat kulovou plochu.

*

K úlohám 4c) a 4d) sděluje autor:

Řešení úlohy 4d) je v článku E. Egerváry, On the smallest convex cover of a simple arc of space-curve, Publ. Math. Debrecen *1* (1949—50), 65—70. Výsledkem je oblouk šroubovice (v pravoúhlých souřadnicích)

$$x = \frac{\cos t}{\sqrt{6}\pi}, \quad y = \frac{\sin t}{\sqrt{6}\pi}, \quad z = \frac{t}{2\sqrt{3}\pi}, \quad 0 \leqq t \leqq 2\pi .$$

Tento oblouk rovněž neleží na kulové ploše.

Řešení úl. 4c) není dosud známo, avšak v předběžném sdělení Z. A. MELZAK, Convex hulls of a class of closed space curves, BAMS *63* (1957), 250 se uvádí, že úloha je ekvivalentní řešení isoperimetrického problému, jehož Lagrange-Eulerovy rovnice jsou

$$z' = xy\,, \quad x'' = -\,xy^2\,, \quad y'' = -\,yx^2\,,$$

kde x, y, z jsou pravoúhlé souřadnice a nezávisle proměnná je délka oblouku křivky.

Redakce