Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958), Praha

RŮZNÉ

DIRICHLETOVA ÚLOHA

RUDOLF VÝBORNÝ, Praha

DT: 517.947.42

(Došlo dne 19. června 1957)

V článku se vyšetřuje funkcionální prodloužení Dirichletovy úlohy.

Je dobře známo, že pro $m \geqq 3$ nemusí být Dirichletova úloha řešitelná v m-rozměrné oblasti ani tehdy, je-li hraniční funkce spojitá. O. PERRONEM a N. WIENEREM [1], [2] byly vypracovány metody, podle nichž je každé spojité hraniční funkci f přiřazena harmonická funkce W_f, která splývá s řešením Dirichletovy úlohy, jestliže řešení existuje. Je známo, že Perronova i Wienerova konstrukce vede k témuž zobecněnému řešení Dirichletovy úlohy (viz na př. [3]).

A. F. MONNA [4] předložil problém, zda toto zobecněné řešení je jediným funkcionálním prodloužením klasické Dirichletovy úlohy. Přesněji řečeno: nechť

1. A_f je operátor, přiřazující každé funkci spojité na hranici omezené oblasti G funkci harmonickou*) v G;

2. $A_f(P)$ splývá s řešením Dirichletovy úlohy, je-li pro funkci f Dirichletova úloha řešitelná;

3. A_f je distributivní operátor, t. j. $A_{c_1f_1+c_2f_2} = c_1A_{f_1} + c_2A_{f_2}$;

4. $m \leqq A_f(P) \leqq M$ v G, je-li $m \leqq f(P) \leqq M$ na hranici G.

Je $A_f(P) = W_f(P)$ v G? Problém rozřešil M. V. KELDYŠ [5], který dokázal správnost této rovnice.

Ukažme, že požadavky 1—4 možno zeslabit. Tak na př. lze podmínky 1, 2, 4 nechat beze změny a podmínku 3 nahradit slabší podmínkou

3'. $A_{f_1+f_2} = A_{f_1} + A_{f_2}$.

To lze dokázat tak, že z 3' odvodíme 3 pro racionální c_1 a c_2 a 4 použijeme k limitnímu přechodu od racionálních čísel c_1 a c_2 k iracionálním. Tak vzniká přirozeně otázka, zda podmínku 3 není možno vůbec opustit. Dokážeme, že to je možné, když požadavek 4 nahradíme požadavkem poněkud silnějším.

*) Jejíž hodnotu v bodě P značíme $A_f(P)$.

Věta. *Buď $W_f(P)$ Perronovo zobecněné řešení Dirichletovy úlohy. Buď A_f operátor, který splňuje podmínky 1 a 2 a pro nějž platí:*

4'. Je-li K konstanta a $f_1 \leqq f_2 + K$ na hranici oblasti G, potom $A_{f_1}(P) \leqq \leqq A_{f_2}(P) + K$ v G.

Potom $W_f(P) = A_f(P)$ v G.

Poznámka. Splňuje-li operátor A_f podmínky 1—4, splňuje i 4'. Není však ihned patrno (plyne teprve z dokazované věty), že operátor splňující požadavky 1, 2 a 4' splňuje i podmínky 1—4.

Důkaz věty. Stačí dokázat, že $W_f(P) = A_f(P)$ ve všech regulárních bodech hranice, neboť dvě omezené harmonické funkce splývají v G, jestliže mají ve všech regulárních bodech hranice oblasti stejné limitní hodnoty, jak dokázali Evans a Kellog. Buď Q regulární bod, potom existuje funkce V_Q harmonická v G, spojitá v $\bar{G}$ a taková, že $V_Q(Q) = 0$, $V_Q(P) > 0$ pro $P \neq Q$. Hraniční hodnoty funkce V_Q v bodě P označme $\varphi(P)$. Buď ε libovolné kladné číslo. K němu existuje okolí U bodu Q tak, že pro body $P \in U$ platí $f(P) < f(Q) + \varepsilon$. Protože funkce V_Q má vně U kladné infimum, a protože funkce f je omezená, lze zvolit konstantu C tak, že vně U platí $f(P) < C\varphi(P) + f(Q) + \varepsilon$. Tedy všude na hranici oblasti G platí $f(P) < C\,\varphi(P) + f(Q) + \varepsilon$. Podle 4' je $A_f(P) \leqq A_{C\varphi}(P) + f(Q) + \varepsilon$, avšak dle 2 je $A_{C\varphi} = CV_Q$ a tedy $A_f(P) \leqq \leqq C.V_Q(P) + f(Q) + \varepsilon$; uvědomíme-li si, že $\lim\limits_{P \to Q} V_Q(P) = 0$, dostaneme $\overline{\lim\limits_{P \to Q}}\, A_f(P) \leqq f(Q) + \varepsilon$. Analogicky se dokáže $\underline{\lim\limits_{P \to Q}}\, A_f(P) \geqq f(Q) - \varepsilon$ a tedy a tedy $A_f(Q) = f(Q) = W_f(Q)$ c. b. d.

LITERATURA

[1] *O. Perron;* Eine neue Behandlung der ersten Randwertaufgabe für $\Delta u = 0$. Math. Zeitschrift *18* (1923), 42—54.

[2] *N. Wiener;* Certain Notions in Potential Theory. Journal of Mathematics and Physics *3* (1924), 24—51.

[3] *М. В. Келдыш:* О разрешимости и устойчивости задачи Дирихле. Успехи мат. наук *8* (1941), 171—231.

[4] *A. F. Monna;* Het Problem van Dirichlet. Niew Archief voor Wiskunde *19* (1938), 249—256.

[5] *М. В. Келдыш:* О задаче Дирихле. ДАН СССР, *32* (1941), 308.