Časopis pro pěstování matematiky

Václav Metelka

O jistých rovinných konfiguracích $(12_4, 16_3)$, které obsahují aspoň jeden bod typu D

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 80 (1955), No. 2, 146--151

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108176`

O JISTÝCH ROVINNÝCH KONFIGURACÍCH $(12_4, 16_3)$, KTERÉ OBSAHUJÍ ASPOŇ JEDEN BOD TYPU D

VÁCLAV METELKA, Liberec.

(Došlo dne 14. ledna 1955.) DT:513.84

Věnováno akademiku Bohumilu Bydžovskému k jeho 75. narozeninám.

Úkolem tohoto článku je stručně informovat čtenáře o jistých nových konfiguracích $(12_4, 16_3)$, které obsahují aspoň jeden bod typu D a navázat tak na předchozí článek mého bratra.[1]) Výsledky, které zde uvádím jsou původní a dosud neuveřejněné, přesto se však omezuji pouze na jejich citaci bez důkazů, jež podám v nejbližší době.

V předchozím článku[1]) nastínil můj bratr program, který jsme si stanovili pro sestavení tabulky všech možných konfigurací $(12_4, 16_3)$, jež se dají realisovat body a přímkami v projektivní rovině nad tělesem komplexních čísel. Ačkoliv druhý bod tohoto programu není ještě zcela uzavřen, chtěl bych přesto v tomto článku čtenáře aspoň stručně informovat o některých nových konfiguracích $(12_4, 16_3)$, obsahujících body typu D a naznačit postup hledání příslušných schemat.

1. Schemata. Vycházíme z předpokladu existence aspoň jednoho bodu typu D (dále stručně D-bodu). Nechť *9* je D-bodem a nechť je oddělen od bodů *10, 11, 12,* při čemž body *10, 11* jsou spojeny konfigurační přímkou. Pak také bod *12* je D-bodem, odděleným od bodů *9, 10, 11.* Třetí bod na spojnici *10, 11* označme *1.* Stručně to zapíšeme *9 : 10*; *9 : 11*; *9 : 12*; *12 : 10*; *12 : 11*; *1—10—11.*

Z těchto vztahů především plyne, že bod *10* musí být oddělen ještě od jednoho bodu, kterým nemůže být bod *1* ani *11* (neboť s nimi je spojen) a označme ho tedy *2* (čili *10 : 2*).

Dokažme nyní, že za těchto předpokladů musí být bod *11* spojen s bodem *2* konfigurační přímkou.

Ze 4 konfiguračních přímek incidentních s bodem *9* prochází jediná bodem *2* (čili *9—2*);

---

[1]) *J. Metelka*: „O rovinných konfiguracích $(12_4, 16_3)$". Časopis pro pěstování matematiky *80* (1955), 133—145. — Užívám zde symboliky a terminologie článku právě citovaného.

ze 4 konfiguračních přímek incidentních s bodem *12* prochází jediná bodem *2* (čili *12—2*);

ze 4 konfiguračních přímek bodem *10* neprochází žádná bodem *2* (protože *10* : *2*), a tedy

ze 4 konfiguračních přímek incidentních s bodem *11* musí jediná procházet bodem *2*, což plyne takto:

Z právě uvedených šestnácti konfiguračních přímek je patnáct navzájem různých (přímku *1—10—11* jsme počítali dvakrát) a z nich tedy musí (aspoň) tři být incidentní s bodem *2*. Tím je proveden důkaz, že skutečně *11—2*. Prozatím víme, že bod *11* je oddělen od bodů *9*, *12* a musí být tudíž oddělen ještě od jednoho dalšího bodu (různého od bodů *1*, *2*, *10*). Nazveme si tento bod *3* (tedy *11* : *3*). Z uvedených patnácti různých konfiguračních přímek procházejí právě tři bodem *2* a musí jím také procházet přímka šestnáctá, kterou si zatím nazveme p. Bodem *3* procházejí z těchto patnácti konfiguračních přímek (různých od p) jen tři, totiž *3—9*, *3—10*, *3—12* (neboť *11* : *3*), z čehož plyne, že bod *3* je incidentní také s přímkou p. Právě tak bodem *1* procházejí jen tři z konfiguračních přímek různých od přímky p (totiž přímky *1—9*, *1—12*, *1—10—11*) a nalezli jsme tak třetí bod na přímce p a konfigurační přímka $p \equiv 1—2—3$ je tím určena.

Bodem *9* procházejí *4* (navzájem různé) konfigurační přímky *9—1—a*, *9—2—b*, *9—3—c*, *9—d—e*, kde o číslicích a, b, c, d, e ovšem platí, že jsou navzájem různé a také různé od *1*, *2*, *3*, *9*, *10*, *11*, *12*. Možno je tedy nahradit dosud neobsazenými číslicemi *4*, *5*, *6*, *7*, *8*, což učiníme a zjistíme, že každá z hledaných konfigurací má schema tvaru podobného tomuto:

$$9\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 7 \\ 4, 5, 6, 8 \end{pmatrix}; \quad 1\begin{pmatrix} 2, 10 \\ 3, 11 \end{pmatrix}; \quad 12\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ 6, 7, 5, 8 \end{pmatrix}; \quad 10\begin{pmatrix} 3, 4, 6 \\ 7, 5, 8 \end{pmatrix}; \quad 11\begin{pmatrix} 2, 4, 5 \\ 8, 6, 7 \end{pmatrix}.$$

Toto schema má obdobný smysl, jako schema uvedené v odstavci 3 citovaného článku. Všechna incidenční schemata pak dostaneme, když v závorkách za čísly *12*, *10*, *11* najdeme všechny možné sestavy čísel v těchto závorkách se vyskytujících (ovšem s příslušnou opatrností, jako v citovaném třetím odstavci předchozího článku). Poznamenávám zde výslovně, že vzhledem k daným předpokladům (*1—2—3*, *1—10—11*, ... atd.) nemůžeme již přemísťovat čísla v závorce za jedničkou a není třeba ani měnit čísla v závorce za devítkou.

Podrobný výpočet těchto schemat zde neprovádím, neboť je velmi rozsáhlý a pracný; po vyloučení schemat ekvivalentních[2]) konfigurací dostaneme ještě značný počet (přes 90) možností. Veliká část těchto schemat se však nedá geometrickými konfiguracemi realisovat, což se ovšem musí dokazovat téměř u každého schematu zvláště.[3]) Přesto se mně podařilo najít asi 40 realisovatel-

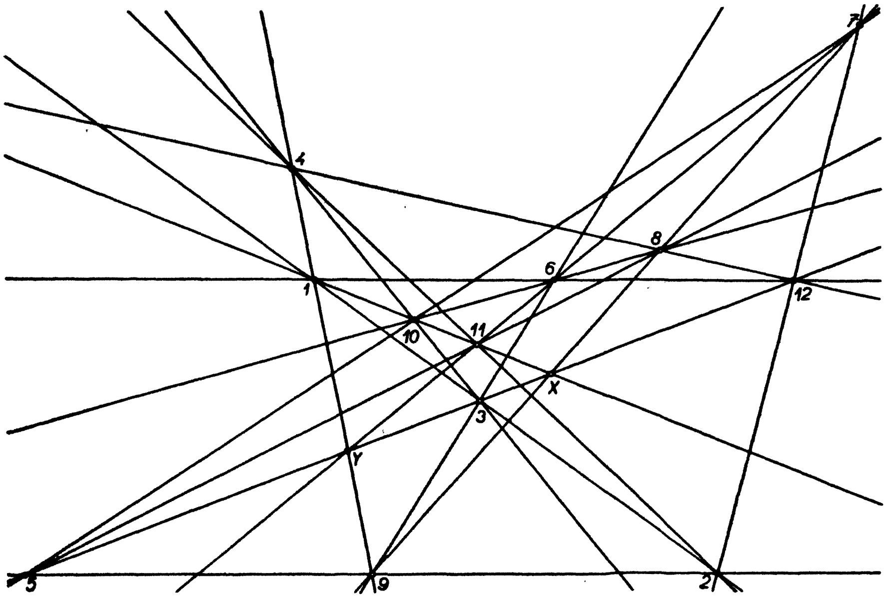
[2]) „*Ekvivalentní*" ve smyslu definice z citovaného článku.

[3]) Tyto důkazy se provádějí ve vhodně zvoleném souřadnicovém systému obdobným způsobem, jako je proveden důkaz věty 9 v citovaném článku mého bratra.

ných schemat a tento počet bude — jak se předběžným zkoumáním jeví — ještě překročen.

2. Některé konfigurace (12_4, 16_3) s D-body. Současně s D-body se ve všech schematech vyskytují vždy C-body a aspoň jeden B-bod, nikdy však A-body, jak ostatně ukazují také výsledky mého bratra. D-body vystupují v těchto schematech vždy jen dva, s výjimkou jediného případu:

$$9\begin{pmatrix}1, 2, 3, 7\\4, 5, 6, 8\end{pmatrix}; \quad 1\begin{pmatrix}2, 10\\3, 11\end{pmatrix}; \quad 12\begin{pmatrix}1, 2, 3, 4\\6, 7, 5, 8\end{pmatrix}; \quad 10\begin{pmatrix}3, 4, 6\\7, 5, 8\end{pmatrix}; \quad 11\begin{pmatrix}2, 4, 5\\8, 7, 6\end{pmatrix},$$



Obr. 1.

který je typu $B_1C_7D_4$ (D-body jsou *1, 5, 9, 12*), k němuž patří geometrická konfigurace s těmito body:

$$1(a, 1, a);\ 2(0, 1, 0);\ 3(1, 1, 1);\ 4(7a^2 - 6a + 3, 2, 2a);\ 5(1, 1, 0);$$
$$6(a, 1, 1);\ 7(0, -7a^2 + 2a + 1, 1);\ 8(1 - a, -7a^2 + 2a + 1, 1);$$
$$9(1, 0, 0);\ 10(1, -7a^2 + 2a + 2, 2);\ 11(1 - a, 2 - 2a, 1);\ 12(0, 0, 1),$$

kde a je kořenem rovnice $7x^3 - 9x^2 + 5x - 1 = 0$.

Ve všech ostatních schematech (i v těch, která dosud nejsou prozkoumána) jsou již jen dva D-body a počet E-bodů není vyšší než dvě.

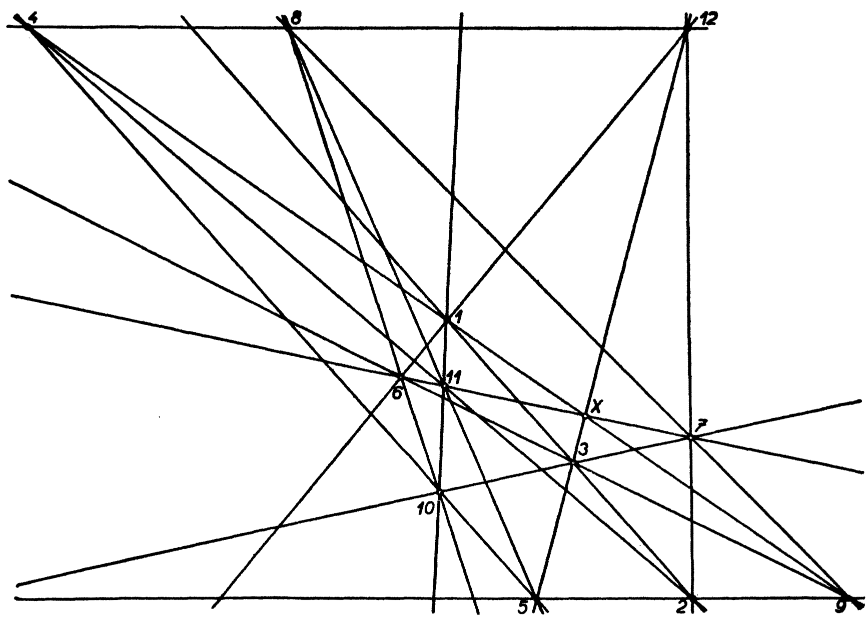
Existují pouze tři konfigurace se dvěma E-body (jež obsahují zároveň D-body). Uvádím zde dvě z nich. Jedna z těchto konfigurací má body o souřadnicích:

1(1, 2, 1); *2*(0, 1, 0); *3*(1, 1, 1); *4*(4, 10, 5); *5*(1, 1, 0); *6*(1, 2, 2);
7(0, 2, 3); *8*(4, 10, 15); *9*(1, 0, 0); *10*(8, 14, 9); *11*(4, 6, 5); *12*(0, 0, 1) ,

jejíž úplné schema zní:

$$\mathit{9}\begin{pmatrix} \mathit{1}, \mathit{2}, \mathit{3}, \mathit{7} \\ \mathit{4}, \mathit{5}, \mathit{6}, \mathit{8} \end{pmatrix}; \quad \mathit{1}\begin{pmatrix} \mathit{2}, \mathit{10} \\ \mathit{3}, \mathit{11} \end{pmatrix}; \quad \mathit{12}\begin{pmatrix} \mathit{1}, \mathit{2}, \mathit{3}, \mathit{4} \\ \mathit{6}, \mathit{7}, \mathit{5}, \mathit{8} \end{pmatrix}; \quad \mathit{10}\begin{pmatrix} \mathit{3}, \mathit{5}, \mathit{6} \\ \mathit{4}, \mathit{7}, \mathit{8} \end{pmatrix}; \quad \mathit{11}\begin{pmatrix} \mathit{2}, \mathit{5}, \mathit{6} \\ \mathit{4}, \mathit{8}, \mathit{7} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Nakreslil jsem tuto konfiguraci na obr. 1. Chtěl bych na tomto místě čtenáře upozornit na další „náhodné" incidence, které se u této konfigurace objevují.



Obr. 2.

Tři z konfiguračních přímek (*1—10—11*, *7—8—9*, *3—5—12*) se zde protínají v jediném bodě, který jsem na obrázku označil X, a další tři přímky (*6—7—11*, *1—4—9*, *3—5—12*) procházejí jediným bodem, označeným na obr. Y. (Doporučuji čtenáři, aby si tuto incidenci ověřil výpočtem.)

Druhá z konfigurací se dvěma E-body, jež obsahuje zároveň D-body, jest

1(3, 2, 3); *2*(0, 1, 0); *3*(1, 1, 1); *4*(4, 2, 3); *5*(1, 1, 0); *6*(3, 2, 2);
7(0, 2, 5); *8*(4, 2, 5); *9*(1, 0, 0); *10*(8, 6, 3); *11*(20,14, 15); *12*(0, 0, 1);

její úplné schema zní

$$\mathit{9}\begin{pmatrix} \mathit{1}, \mathit{2}, \mathit{3}, \mathit{7} \\ \mathit{4}, \mathit{5}, \mathit{6}, \mathit{8} \end{pmatrix}; \quad \mathit{1}\begin{pmatrix} \mathit{2}, \mathit{10} \\ \mathit{3}, \mathit{11} \end{pmatrix}; \quad \mathit{12}\begin{pmatrix} \mathit{1}, \mathit{2}, \mathit{3}, \mathit{4} \\ \mathit{6}, \mathit{7}, \mathit{5}, \mathit{8} \end{pmatrix}; \quad \mathit{10}\begin{pmatrix} \mathit{3}, \mathit{4}, \mathit{6} \\ \mathit{7}, \mathit{5}, \mathit{8} \end{pmatrix}; \quad \mathit{11}\begin{pmatrix} \mathit{2}, \mathit{5}, \mathit{6} \\ \mathit{4}, \mathit{8}, \mathit{7} \end{pmatrix} \quad (2)$$

a tuto jsem nakreslil na obr. 2. Také zde třeba upozornit na „náhodnou" incidenci konfiguračních přímek *6—7—11*, *3—5—12*, *1—4—9*, protínajících se v jediném bodě, označeném X.

Tyto dvě poslední konfigurace se dají konstruovat *lineárně* (pravítkem bez odměřování), protože při nich není žádná adjunkce iracionality.

Obě jmenované konfigurace jsou typu $B_3C_5D_2E_2$ a jejich schemata až na dvě přímky bodem *10* jsou shodná. Přesto však tyto konfigurace nejsou ekvivalentní, neboť neexistuje permutace čísel 1, ..., 12, která by schema (1) převáděla na schema (2), protože žádnou takovou permutací nemůže se změnit počet incidencí — ani „náhodných". Že obě konfigurace skutečně nejsou ekvivalentní, lze dokázat znovu ještě jiným způsobem, jak zde naznačím.

Kdyby existovala permutace čísel *1*, ..., *12* převádějící schema (1) na schema (2), musely by se touto permutací zřejmě také převádět E-body jednoho schematu na E-body druhého. Ve schematu (1) jsou dva E-body a to *2*, *8*. Bod *8* je oddělen od bodů *1*, *2*, *3* a existují právě dvě konfigurační přímky, na kterých neleží ani bod *8* ani body *1*, *2*, *3*. Jsou to přímky *5—7—10*, *6—7—11*, obě incidentní s konfiguračním bodem *7*. Bod *2* je oddělen od bodů *6*, *8*, *10* a opět existují právě dvě konfigurační přímky, na kterých body *2*, *6*, *8*, *10* neleží. Jsou to přímky *1—4—9*, *3—5—12*, které se však neprotínají v žádném konfiguračním bodě. Zřejmě jsou oba E-body *2*, *8* dle tohoto jemnějšího třídění různého druhu.[4]) Velmi snadno zjistíme, že ve schematu (2) jsou oba E-body (také *2*, *8*) stejného druhu (a to téhož, jako bod *2* ve schematu (1)). Neexistuje však permutace číslic *1*, ..., *12*, kterou by se měnil druh bodu[5]) a tím je opět důkaz proveden.

Rád bych ještě čtenáře upozornil, že všechny tři konfigurace, které zde uvádím, jsou „čisté" a tak je tomu u převážné většiny konfigurací s body typu D (zatím jsem nalezl jen dvě konfigurace s „cizími" přímkami), což dokáži spolu s úplným řešením tohoto bodu programu v nejbližší době.

Резюме

О НЕКОТОРЫХ ПЛОСКИХ КОНФИГУРАЦИЯХ $(12_4, 16_3)$, СОДЕРЖАЩИХ ХОТЯ БЫ ОДНУ ТОЧКУ ТИПА D

ВАЦЛАВ МЕТЕЛКА (Václav Metelka), Либерец.

(Поступило в редакцию 14/I 1955 г.)

Автор приводит здесь (пока без доказательства) несколько новых результатов из области плоских конфигураций $(12_4, 16_3)$ и строит два новых

[4]) Viz obdobu jemnějšího dělení čtveřin v 3. odstavci citovaného článku mého bratra.
[5]) Viz obdobu věty první citovaného článku.

примера этих конфигураций (см. рис. 1 и 2 и соответственно схемы инциденций (1) и (2)), при которых не требуется адъюнкции иррациональности. Подробное описание последует в ближайшее время.

Zusamenfassung

ÜBER GEWISSE EBENE KONFIGURATIONEN $(12_4, 16_3)$, WELCHE MINDESTENS EINEN D-PUNKT ENTHALTEN

VÁCLAV METELKA, Liberec.

(Eingegangen am 14. Jänner 1955.)

Autor zitiert hier (vorläufig ohne Beweis) einige neue Ergebnisse über ebene Konfigurationen $(12_4, 16_3)$ und konstruiert besonders zwei neue Beispiele von diesen Konfigurationen (siehe Fig. 1, resp. 2 und Inzidenzschema (1), resp. (2)) in welchen keine Irrationalitätsadjunktion gebrauchen wird. Eine Detailbeschreibung wird bald nachfolgen.