SOUVISLOST HLAVNÍCH ELEMENTŮ ROVINNÉ SYMETRICKÉ INVOLUCE 5. STUPNĚ S PŘÍMKAMI KUBICKÉ PLOCHY

SVATAVA KUBÁLKOVÁ, Praha.

(Došlo dne 22. prosince 1954.) DT:513.17

Věnováno akademiku Bohumilu Bydžovskému k jeho 75. narozeninám.

Obsah předloženého článku navazuje na práci L. VAŇATOVÉ „*O jednom druhu grup involutorních Cremonových transformací v rovině*“. Hlavní elementy rovinné symetrické involuce 5. stupně lze totiž pokládat, vzhledem k jejich seskupení, za rovinné obrazy 27 přímek jisté kubické plochy $\varkappa^3$ bez dvojnásobných bodů. V práci jsou uvedeny podmínky, kterým musí vyhovovat kubická plocha $\varkappa^3$, aby se její přímky zobrazovaly do konfigurace hlavních bodů *1*, ..., *6*, vedoucí ke grupě $\mathfrak{G}_8$, resp. $\mathfrak{G}_{72}$ rovinných transformací.[1]) Během vyšetřování se ukázalo, že grupa $\mathfrak{G}_8$, resp. $\mathfrak{G}_{72}$ rovinných transformací, reprodukujících trojrozměrný systém rovinných kubik s jednoduchými body *1*, ..., *6*, je podgrupou jistých grup rovinných transformací $\mathfrak{G}_{24}$, $\mathfrak{G}_{120}$, resp. $\mathfrak{G}_{648}$, které mají tutéž vlastnost. V článku jsou dále určeny všechny rovinné transformace, které jsou prvky grup $\mathfrak{G}_{24}$, $\mathfrak{G}_{120}$, $\mathfrak{G}_{648}$.

1. Rovinné řezy kubické plochy $\varkappa^3$ bez dvojnásobných bodů (v této práci budeme písmenem $\varkappa^3$ označovat vždy kubickou plochu bez dvojnásobných bodů), která obsahuje dvacet sedm přímek, se zobrazují do roviny známým způsobem[2]) v trojrozměrný systém rovinných kubik, které procházejí šesti pevnými body *1*, ..., *6*, jež jsou hlavními body zobrazení v obrazové rovině. Těchto šest bodů neleží na téže kuželosečce a žádné tři z nich neleží na téže přímce.

Body *1*, ..., *6* určují tedy šest kuželoseček k_i^2 (k_i^2 označujeme kuželosečku neprocházející bodem i, $i = 1, \ldots, 6$) a patnáct přímek $\overline{ik}$ ($i \neq k$; $i, k = 1, \ldots, 6$). Dvaceti sedmi přímkám kubické plochy $\varkappa^3$ odpovídá při tomto zobrazení do

[1]) Viz *L. Vaňatová* [2]. (Seznam literatury je uveden na konci článku.)

[2]) Viz na příklad *B. Bydžovský* [1], str. 651 a dál. Pokud je v tomto článku kdykoli řeč o zobrazení kubické plochy (resp. přímek kubické plochy) do roviny, je tím vždy míněno algebraické zobrazení právě citované.

roviny právě šest hlavních bodů *1*, ..., *6*, šest kuželoseček k_i^2 ($i = 1, \ldots, 6$) a patnáct přímek $\overline{ik}$ ($i \neq k$; $i, k = 1, \ldots, 6$).

Protnou-li se v obrazové rovině dvě přímky $\overline{ik}$, $\overline{jl}$ ($i \neq k$; $i, k = 1, \ldots, 6$; $j \neq l$; $j, l = 1, \ldots, 6$), nebo dvě kuželosečky k_i^2, k_j^2 ($i \neq j$; $i, j = 1, \ldots, 6$), nebo přímka $\overline{ik}$ a kuželosečka k_i^2 mimo hlavní bod zobrazení *1*, ..., *6*, potom přímky kubické plochy $\varkappa^3$, odpovídající těmto elementům zobrazení, se rovněž protínají. Neboť každé z přímek $\overline{ik}$, $\overline{jl}$ odpovídá přímka kubické plochy $\varkappa^3$; společnému bodu obou přímek $\overline{ik}$, $\overline{jl}$, který není, podle předpokladu, hlavním bodem, odpovídá bod kubické plochy $\varkappa^3$, který leží na obou odpovídajících přímkách plochy $\varkappa^3$. Obdobně pro zbývající dva případy.

Procházejí-li přímky $\overline{ik}$ (nebo kuželosečky k_i^2) hlavními body *1*, ..., *6*, znamená to, že se přímka kubické plochy $\varkappa^3$, odpovídající takovému hlavnímu bodu a přímka kubické plochy $\varkappa^3$, odpovídající přímce $\overline{ik}$ (nebo kuželosečce k_i^2) protínají, což je evidentní.

Protnou-li se přímky $\overline{ik}$, $\overline{ij}$ nebo kuželosečky k_i^2, k_j^2 v hlavním bodě *1*, ..., *6* bez dotyku, jsou příslušné odpovídající přímky na ploše $\varkappa^3$ mimoběžné. To plyne takto: přímka p kubické plochy $\varkappa^3$ odpovídající přímce $\overline{ik}$, protíná přímku q plochy $\varkappa^3$, odpovídající hlavnímu bodu i. Rovina ϱ, určená těmito dvěma přímkami, protne plochu $\varkappa^3$ ještě v další přímce r, která odpovídá kuželosečce k_k^2. Přímka s plochy $\varkappa^3$, odpovídající přímce $\overline{ij}$ obrazové roviny, protíná přímku q, leží tedy v rovině, která jde přímkou q a je různá od roviny ϱ. Jsou proto přímky p a s mimoběžné. Analogicky by se dokázalo druhé tvrzení o průsečíku dvou kuželoseček k_i^2, k_j^2.

Dotýká-li se kuželosečka k_i^2 přímky $\overline{ik}$ v hlavním bodě k, protínají se tři přímky plochy $\varkappa^3$, které odpovídají těmto třem prvkům zobrazení, v jediném bodě a leží v téže rovině. Toto tvrzení je mezním případem tvrzení uvedeného v předcházejícím odstavci.

Regulární bod kubické plochy, v němž se protínají tři její přímky, nazýváme jejím *planárním bodem*.

Z toho, co bylo řečeno, plyne: planární bod na kubické ploše $\varkappa^3$ existuje tehdy a jen tehdy, jestliže v jejím obraze v rovině buďto:

1. tři přímky $\overline{ik}$, jejichž indexy jsou různé, procházejí jedním bodem, nebo
2. kuželosečka k_i^2 se dotýká přímky $\overline{ik}$ v bodě k.

Uvažujme nyní seskupení šesti bodů *1*, ..., *6* v rovině, vedoucí ke grupě rovinných transformací $\mathfrak{G}_{72}$.[3]) Mají-li body *3*, *4*, *5*, *6* postupně souřadnice $(1, 1, 1)$, $(-1, 1, 1)$, $(1, -1, 1)$, $(1, 1, -1)$, jsou souřadnice bodů *1*, *2* dány rovnicemi

$$x_1^2 \pm x_1 x_2 + x_2^2 = 0\,, \qquad x_3 = 0\,. \tag{1}$$

[3]) Veškerá terminologie a symbolika je tu převzata z práce *L. Vaňatové* [2], kde čtenář nalezne definice potřebných pojmů i důkazy, které zde vynechávám (pokud ovšem není uvedena jiná literatura).

Vyhovují-li body *1, …, 6* této podmínce, tvoří skupinu hlavních bodů šesti symetrických involucí 5. stupně J_i^{I} ($i = 1, \dots, 6$) prvního druhu

$$\begin{array}{ll} J_1^{\mathrm{I}} \dots 12, 34, 56\,, & J_4^{\mathrm{I}} \dots 16, 25, 34 \\ J_2^{\mathrm{I}} \dots 12, 35, 46\,, & J_5^{\mathrm{I}} \dots 13, 25, 46 \\ J_3^{\mathrm{I}} \dots 13, 24, 56\,, & J_6^{\mathrm{I}} \dots 16, 24, 35 \end{array}$$

a zároveň šesti symetrických involucí 5. stupně J_i^{II} ($i = 1, \dots, 6$) druhého druhu

$$\begin{array}{ll} J_1^{\mathrm{II}} \dots 14, 2356\,, & J_4^{\mathrm{II}} \dots 23, 1456 \\ J_2^{\mathrm{II}} \dots 15, 2346\,, & J_5^{\mathrm{II}} \dots 26, 1345 \\ J_3^{\mathrm{II}} \dots 45, 1236\,, & J_6^{\mathrm{II}} \dots 36, 1245\,. \end{array}$$

V celém odstavci **1** předpokládáme, že body *1, …, 6* mají uvedenou už polohu, takže na př. souřadnice bodů *1, 2* vyhovují podmínce (1). Existuje tedy v rovině bodů *1, …, 6* šest bodů $\overline{M}_i$ ($i = 1, \dots, 6$), jimiž prochází po třech přímkách spojujících páry hlavních bodů involucí J_i^{I} ($i = 1, \dots, 6$). Kuželosečky k_i^2 se dotýkají přímek $\overline{ij}, \overline{ik}$ v bodech j, k ($i \neq k \neq j \neq i$ probíhají buď čísla 1, 4, 5 nebo 2, 3, 6). Protože tedy nutná a postačující podmínka pro existenci planárního bodu na ploše je splněna celkem *osmnáctkrát*, můžeme body *1, …, 6*, přímky $\overline{ik}$ ($i \neq k$; $i, k = 1, \dots, 6$) a kuželosečky k_i^2 ($i = 1, \dots, 6$) pokládat za rovinné obrazy přímek kubické plochy α^3, která má osmnáct planárních bodů.

Kubická plocha α^3 s osmnácti planárními body má při vhodné volbě soustavy souřadnic rovnici

$$\alpha^3 \equiv x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 0 \text{ [4]} \tag{2}$$

a nazývá se kubická plocha *ekvianharmonická*. Z této úvahy plyne věta:

Věta 1. *Seskupení bodů 1, …, 6, přímek* $\overline{ik}$ ($i \neq k$; $i, k = 1, \dots, 6$) *a kuželoseček* k_i^2 ($i = 1, \dots, 6$), *vedoucí ke grupě* $\mathfrak{G}_{72}$ *z práce* [2], *dostaneme zobrazením přímek kubické plochy ekvianharmonické* α^3 *do roviny.*

Poznámka 1. Planární bod kubické plochy α^3 je dvojnásobným bodem jejího Hessiánu H[5])

$$H \equiv x_1 x_2 x_3 x_4 = 0\,,$$

který se rozpadá ve čtyři roviny.

Na základě této poznámky lze určit souřadnice všech osmnácti planárních bodů kubické plochy α^3. Souřadnice dvojnásobného bodu Hessiánu H jsou řešením rovnic

$$x_2 x_3 x_4 = 0\,, \quad x_1 x_2 x_4 = 0\,, \quad x_1 x_3 x_4 = 0\,, \quad x_1 x_2 x_3 = 0\,,$$

které jsou splněny na př. pro $x_1 = 0$, $x_4 = 0$. Souřadnice planárního bodu plochy α^3 musí pak vyhovovat rovnici plochy α^3 pro $x_1 = x_4 = 0$, t. j. rovnici

$$x_2^3 + x_3^3 = 0\,.$$

[4]) *J. Metelka* [3], str. 155.
[5]) *J. Metelka* [3], str. 148 a 155.

Tato rovnice jest splněna pro $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, resp. $x_2 = 1$, $x_3 = -\varepsilon$, resp. $x_2 = \varepsilon$, $x_3 = -1$, kde ε je imaginární třetí odmocnina z jedné. Jsou tedy souřadnice tří planárních bodů plochy α^3, ležících na hraně o_{23} souřadného čtyřstěnu, $(0, 1, -1, 0)$, $(0, 1, -\varepsilon, 0)$, $(0, \varepsilon, -1, 0)$. Obdobně dostaneme souřadnice dalších patnácti planárních bodů kubické plochy α^3.

Kubická plocha α^3 má tedy těchto osmnáct planárních bodů

$$
\begin{array}{llll}
M_1(0, 1, -1, 0)\,, & M_2(1, 0, 0, -1)\,, & M_3(\varepsilon, 0, 0, -1)\,, & M_4(1, 0, 0, -\varepsilon)\,, \\
M_5(0, 1, -\varepsilon, 0)\,, & M_6(0, \varepsilon, -1, 0)\,, & M_7(1, 0, -1, 0)\,, & M_8(0, 0, \varepsilon, -1)\,, \\
M_9(1, -1, 0, 0)\,, & M_{10}(0, \varepsilon, 0, -1)\,, & M_{11}(1, 0, -\varepsilon, 0)\,, & M_{12}(0, 0, 1, -1)\,, \\
M_{13}(0, 1, 0, -1)\,, & M_{14}(1, \varepsilon, 0, 0)\,, & M_{15}(0, 0, 1, -\varepsilon)\,, & M_{16}(\varepsilon, 0, -1, 0)\,, \\
M_{17}(0, 1, 0, -\varepsilon)\,, & M_{18}(\varepsilon, -1, 0, 0)\,. & &
\end{array}
\tag{3}
$$

P o z n á m k a 2. Tři přímky kubické plochy α^3, které se protínají v jejím planárním bodě, leží v tečné rovině τ tohoto bodu.[6])

Pomocí této poznámky můžeme snadno napsat rovnice všech dvaceti sedmi přímek kubické plochy α^3. Tečná rovina τ_1 kubické plochy α^3 v planárním bodě $M_1(0, 1, -1, 0)$ má rovnici

$$x_2 + x_3 = 0$$

a protne plochu α^3 v těchto třech přímkách

$$
\left.\begin{aligned} x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_4 &= 0 \end{aligned}\right\}
\quad
\left.\begin{aligned} x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + \varepsilon x_4 &= 0 \end{aligned}\right\}
\quad
\left.\begin{aligned} x_2 + x_3 &= 0 \\ \varepsilon x_1 + x_4 &= 0 \end{aligned}\right\}.
$$

Analogickým způsobem, pomocí dalších planárních bodů M_i $(i = 2, 3, \ldots, 18)$, obdržíme rovnice zbývajících přímek kubické plochy α^3. Rovnice všech dvaceti sedmi přímek této plochy, sestaveny přehledně v tabulku, jsou

$$
\begin{aligned}
p_1 &\equiv x_1 + x_3 = 0\,, & x_2 + x_4 &= 0 \\
p_2 &\equiv \varepsilon x_1 + x_2 = 0\,, & x_3 + \varepsilon x_4 &= 0 \\
p_3 &\equiv x_1 + x_2 = 0\,, & \varepsilon x_3 + x_4 &= 0 \\
p_4 &\equiv x_1 + \varepsilon x_3 = 0\,, & x_2 + \varepsilon x_4 &= 0 \\
p_5 &\equiv \varepsilon x_1 + x_3 = 0\,, & \varepsilon x_2 + x_4 &= 0 \\
p_6 &\equiv x_1 + \varepsilon x_2 = 0\,, & x_3 + x_4 &= 0 \\
p_7 &\equiv \varepsilon x_1 + x_3 = 0\,, & x_2 + \varepsilon x_4 &= 0 \\
p_8 &\equiv x_1 + x_2 = 0\,, & x_3 + x_4 &= 0 \\
p_9 &\equiv x_1 + \varepsilon x_2 = 0\,, & x_3 + \varepsilon x_4 &= 0 \\
p_{10} &\equiv x_1 + x_3 = 0\,, & \varepsilon x_2 + x_4 &= 0 \\
p_{11} &\equiv x_1 + \varepsilon x_3 = 0\,, & x_2 + x_4 &= 0 \\
p_{12} &\equiv \varepsilon x_1 + x_2 = 0\,, & \varepsilon x_3 + x_4 &= 0 \\
p_{13} &\equiv x_1 + x_4 = 0\,, & x_2 + x_3 &= 0 \\
p_{14} &\equiv x_1 + \varepsilon x_4 = 0\,, & \varepsilon x_2 + x_3 &= 0
\end{aligned}
\tag{4}
$$

[6]) Srovnej *B. Bydžovský* [1], str. 513 a *J. Metelka* [3], str. 143.

$$
\begin{aligned}
p_{15} &\equiv x_1 + x_3 = 0\,, & x_2 + \varepsilon x_4 &= 0 \\
p_{16} &\equiv \varepsilon x_1 + x_3 = 0\,, & x_2 + x_4 &= 0 \\
p_{17} &\equiv \varepsilon x_1 + x_4 = 0\,, & x_2 + \varepsilon x_3 &= 0 \\
p_{18} &\equiv x_1 + x_2 = 0\,, & x_3 + \varepsilon x_4 &= 0 \\
p_{19} &\equiv x_1 + \varepsilon x_4 = 0\,, & x_2 + \varepsilon x_3 &= 0 \\
p_{20} &\equiv \varepsilon x_1 + x_4 = 0\,, & \varepsilon x_2 + x_3 &= 0 \\
p_{21} &\equiv \varepsilon x_1 + x_2 = 0\,, & x_3 + x_4 &= 0 \\
p_{22} &\equiv \varepsilon x_1 + x_4 = 0\,, & x_2 + x_3 &= 0 \\
p_{23} &\equiv x_1 + x_4 = 0\,, & x_2 + \varepsilon x_3 &= 0 \\
p_{24} &\equiv x_1 + \varepsilon x_2 = 0\,, & \varepsilon x_3 + x_4 &= 0 \\
p_{25} &\equiv x_1 + \varepsilon x_3 = 0\,, & \varepsilon x_2 + x_4 &= 0 \\
p_{26} &\equiv x_1 + x_4 = 0\,, & \varepsilon x_2 + x_3 &= 0 \\
p_{27} &\equiv x_1 + \varepsilon x_4 = 0\,, & x_2 + x_3 &= 0\,.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Přiřazení přímek kubické plochy α^3 a jejich obrazů v rovině provedeme takto: planárnímu bodu M_1, průsečíku přímek p_{13}, p_{22}, p_{27}, přiřadíme v rovině průsečík přímek $\overline{12}$, $\overline{34}$, $\overline{56}$, který označíme $\overline{M}_1$; obdobně dále, jak ukazuje snadno srozumitelné schema (vlnovka $\sim$ symbolisuje naše přiřazení)

$$
\begin{aligned}
M_2 &= p_{13} \cdot p_{23} \cdot p_{26} \sim \overline{M}_2 = \overline{12}\,.\,\overline{35}\,.\,\overline{46} \\
M_3 &= p_{14} \cdot p_{19} \cdot p_{27} \sim \overline{M}_3 = \overline{13}\,.\,\overline{24}\,.\,\overline{56} \\
M_4 &= p_{17} \cdot p_{20} \cdot p_{22} \sim \overline{M}_4 = \overline{16}\,.\,\overline{25}\,.\,\overline{34} \\
M_5 &= p_{14} \cdot p_{20} \cdot p_{26} \sim \overline{M}_5 = \overline{13}\,.\,\overline{25}\,.\,\overline{46} \\
M_6 &= p_{17} \cdot p_{19} \cdot p_{23} \sim \overline{M}_6 = \overline{16}\,.\,\overline{24}\,.\,\overline{35}\,.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Přímky p_{13}, p_{14}, p_{17} protínají přímku p_1; z uvedeného schematu je vidět, že přímka p_1 odpovídá tedy bodu *1*. Analogicky se dokáže, že přímka p_i odpovídá bodu i, pro $i = 2, \dots, 6$.

Zbývajícím planárním bodům M_r ($r = 7, \dots, 18$) odpovídá v rovině dotyk kuželosečky k_i^2 s přímkou $\overline{ij}$ v bodě j. Tak planárnímu bodu M_7, průsečíku přímek p_{10}, p_{15}, p_1 odpovídá dotyk kuželosečky k_4^2 a přímky $\overline{14}$ v bodě *1*; analogicky

$$
\begin{aligned}
M_8 &= p_9 \cdot p_{18} \cdot p_2 \sim \text{dotyk } k_3^2 \text{ a přímky } \overline{23} \text{ v bodě } 2 \\
M_9 &= p_8 \cdot p_{18} \cdot p_3 \sim \text{dotyk } k_2^2 \text{ a přímky } \overline{23} \text{ v bodě } 3 \\
M_{10} &= p_7 \cdot p_{15} \cdot p_4 \sim \text{dotyk } k_1^2 \text{ a přímky } \overline{14} \text{ v bodě } 4 \\
M_{11} &= p_7 \cdot p_{16} \cdot p_5 \sim \text{dotyk } k_1^2 \text{ a přímky } \overline{15} \text{ v bodě } 5 \\
M_{12} &= p_8 \cdot p_{21} \cdot p_6 \sim \text{dotyk } k_2^2 \text{ a přímky } \overline{26} \text{ v bodě } 6 \\
M_{13} &= p_{11} \cdot p_{16} \cdot p_1 \sim \text{dotyk } k_5^2 \text{ a přímky } \overline{15} \text{ v bodě } 1 \\
M_{14} &= p_{12} \cdot p_{21} \cdot p_2 \sim \text{dotyk } k_6^2 \text{ a přímky } \overline{26} \text{ v bodě } 2 \\
M_{15} &= p_{12} \cdot p_{24} \cdot p_3 \sim \text{dotyk } k_6^2 \text{ a přímky } \overline{36} \text{ v bodě } 3 \\
M_{16} &= p_{11} \cdot p_{25} \cdot p_4 \sim \text{dotyk } k_5^2 \text{ a přímky } \overline{45} \text{ v bodě } 4 \\
M_{17} &= p_{10} \cdot p_{25} \cdot p_5 \sim \text{dotyk } k_4^2 \text{ a přímky } \overline{45} \text{ v bodě } 5 \\
M_{18} &= p_9 \cdot p_{24} \cdot p_6 \sim \text{dotyk } k_3^2 \text{ a přímky } \overline{36} \text{ v bodě } 6\,.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Výsledné přiřazení přímek kubické plochy α^3 bodům i ($i = 1, \ldots, 6$), přímkám $\overline{ik}$ ($i \neq k$; $i, k = 1, \ldots, 6$) a kuželosečkám k_i^2 ($i = 1, \ldots, 6$) v obrazové rovině je tedy toto

$$
\begin{array}{lll}
p_i \sim i \text{ pro } i = 1, \ldots, 6 & & \\
p_7 \sim k_1^2 , & p_{14} \sim \overline{13} , & p_{21} \sim \overline{26} , \\
p_8 \sim k_2^2 , & p_{15} \sim \overline{14} , & p_{22} \sim \overline{34} , \\
p_9 \sim k_3^2 , & p_{16} \sim \overline{15} , & p_{23} \sim \overline{35} , \\
p_{10} \sim k_4^2 , & p_{17} \sim \overline{16} , & p_{24} \sim \overline{36} , \\
p_{11} \sim k_5^2 , & p_{18} \sim \overline{23} , & p_{25} \sim \overline{45} , \\
p_{12} \sim k_6^2 , & p_{19} \sim \overline{24} , & p_{26} \sim \overline{46} , \\
p_{13} \sim \overline{12} , & p_{20} \sim \overline{25} , & p_{27} \sim \overline{56} .
\end{array} \tag{7}
$$

Při tomto zobrazení kubické plochy α^3 do roviny odpovídá jejím rovinným řezům trojrozměrný systém kubik, procházejících jednoduše body *1*, ..., *6*. Všechny rovinné symetrické involuce 5. stupně $J_i^{\mathrm{I}}, J_i^{\mathrm{II}}$ ($i = 1, \ldots, 6$) s hlavními body *1*, ..., *6*, reprodukují trojrozměrný systém rovinných kubik procházejících jednoduše všemi těmito hlavními body. To znamená, že v prostoru odpovídají involucím $J_i^{\mathrm{I}}, J_i^{\mathrm{II}}$ ($i = 1, \ldots, 6$) algebraické transformace (involuce), které každé rovině přiřazují opět rovinu; jsou to tedy involutorní kolineace. Z této úvahy plyne věta

Věta 2. *Grupě $\mathfrak{G}_{72}$, která vznikne v rovině skládáním rovinných symetrických involucí 5. stupně $J_i^{\mathrm{I}}, J_i^{\mathrm{II}}$ ($i = 1, \ldots, 6$), odpovídá v prostoru jistá podgrupa grupy kolineací a to té grupy kolineací, která reprodukuje ekvianharmonickou kubickou plochu α^3.*

Věta 3. *Kubická plocha ekvianharmonická α^3 je v prostoru reprodukována 648 kolineacemi, které tvoří grupu $\overline{\mathfrak{G}}_{648}$.*

Důkaz. Kubická plocha α^3 určená rovnicí (2) se totiž reprodukuje kolineacemi tvaru

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = x_i' : x_j' : x_k' : x_l' ,$$

kde i, j, k, l je libovolná permutace indexů 1, 2, 3, 4. Kolineací tohoto tvaru je $4! = 24$. Z každé z nich dostaneme kolineaci téže vlastnosti tím, že kterékoli z členů x_i', x_j', x_k', x_l' v posledních rovnicích násobíme číslem ε nebo ε^2, kde ε je imaginární třetí odmocnina z jedné. To vede u každého případu k dvaceti sedmi různým kolineacím, jak se snadno přesvědčíme. Existuje tedy celkem $24 \cdot 27 = 648$ kolineací, které reprodukují naši plochu a které zřejmě tvoří grupu; označme ji $\overline{\mathfrak{G}}_{648}$.

Tím známe řád grupy prostorových kolineací, které reprodukují kubickou plochu α^3, periodu jednotlivých transformací i způsob, jak se skládají. To vše se beze změny přenáší do obrazové roviny. Grupě $\overline{\mathfrak{G}}_{648}$ prostorových kolineací odpovídá v rovině grupa rovinných transformací $\mathfrak{G}_{648}$, která je s $\overline{\mathfrak{G}}_{648}$ co do skladby isomorfní. Každá transformace grupy $\mathfrak{G}_{648}$ reprodukuje trojrozměrný systém rovinných kubik, procházejících jednoduše body *1*, ..., *6*. Platí proto věta

Věta 4. *Trojrozměrný lineární systém rovinných kubik, procházejících jednoduše body 1, ..., 6 z věty 1, je zachováván rovinnými transformacemi, které tvoří grupu* $\mathfrak{G}_{648}$.

Grupa $\mathfrak{G}_{72}$ je ovšem podgrupou grupy $\mathfrak{G}_{648}$, jak ostatně vyplývá i z dalšího.

Rovinné transformace, které tvoří grupu $\mathfrak{G}_{72}$, známe:[7]) je to třicet šest transformací 5. stupně a třicet šest kolineací. Jde nyní o to, určit ty rovinné transformace, které leží v grupě $\mathfrak{G}_{648}$, ale nikoliv v její podgrupě $\mathfrak{G}_{72}$. Tyto transformace odpovídají těm prostorovým kolineacím grupy $\overline{\mathfrak{G}}_{648}$, které neleží v podgrupě $\overline{\mathfrak{G}}_{72}$, odpovídající v prostoru grupě $\mathfrak{G}_{72}$.

Dle (5), (6), (7) není těžké napsat rovnice prostorových kolineací, které odpovídají základním transformacím grupy $\mathfrak{G}_{72}$ v rovině. Na př. involuce J_1^{I} má samodružné body $\overline{M}_1$ a $\overline{M}_2$, invariantní přímky $\overline{12}$, $\overline{34}$, $\overline{56}$ a přímky $\overline{36}$, $\overline{45}$ tvoří pár. Protože obrazy těchto prvků v prostoru musí mít pro hledanou kolineaci tytéž vlastnosti jako jejich vzory v rovině, má prostorová kolineace, odpovídající involuci J_1^{I}, rovnice

$$x_1 = x_1', \; x_2 = x_3', \; x_3 = x_2', \; x_4 = x_4' \, .$$

Podobně najdeme, že rovnice prostorové kolineace odpovídající involuci J_2^{I}, jsou

$$x_1 = x_4', \; x_2 = x_2', \; x_3 = x_3', \; x_4 = x_1' \, ;$$

složením obou uvedených kolineací dostaneme prostorovou kolineaci o rovnicích

$$x_1 = x_4', \; x_2 = x_3', \; x_3 = x_2', \; x_4 = x_1' \quad \text{atd.}$$

Obráceně, k rovnicím prostorové kolineace grupy $\overline{\mathfrak{G}}_{648}$ určíme příslušnou rovinnou transformaci grupy $\mathfrak{G}_{648}$ tímto způsobem: nejprve zjistíme periodu uvažované prostorové kolineace, potom zkoumáme, jak transformuje přímky $p_1, \ldots, p_6$ a podle (5), (6), (7) určíme, jaké elementy odpovídají v hledané rovinné transformaci z grupy $\mathfrak{G}_{648}$ bodům *1*, ..., *6*. Na př. kolineace

$$x_1 = x_1', \; x_2 = x_2', \; x_3 = x_4', \; x_4 = x_3'$$

je periody dvě; přímky $p_1, \ldots, p_6$ transformuje v $p_{13}, p_{12}, p_{18}, p_{19}, p_{20}, p_6$. Odpovídající transformace v rovině, označme ji třeba L_1, přiřazuje bodům *1, 3, 4, 5* přímky $\overline{12}$, $\overline{23}$, $\overline{24}$, $\overline{25}$, bodu *2* kuželosečku k_6^2 a bod *6* je pro ni samodružný. Body *1, 2, 3, 4, 5* jsou hlavními body: čtyři z nich jsou jednoduché a jeden dvojnásobný, takže L_1 je transformace stupně třetího, periody dvě.

Není ovšem možné vypsati rovnice všech 648 transformací, obsažených v grupě $\mathfrak{G}_{648}$. Lze však přesto zjistit, kolik má grupa $\mathfrak{G}_{648}$ transformací toho kterého stupně a udat ty známé rovinné transformace, jejichž složením obdržíme všechny transformace grupy $\mathfrak{G}_{648}$.

[7]) *L. Vaňatová* [2].

Grupa $\mathfrak{G}_{72}$ obsahuje třicet šest kolineací a třicet šest transformací 5. stupně. Utvořme rozklad grupy $\mathfrak{G}_{648}$ ve *třídy* podle podgrupy $\mathfrak{G}_{72}$. Transformace $\mathbf{L}_1$ neleží v grupě $\mathfrak{G}_{72}$, neboť je to transformace třetího stupně, tvoří tedy $\mathbf{L}_1\mathfrak{G}_{72}$ jednu třídu.

Věta 5. *Třída $\mathbf{L}_1\mathfrak{G}_{72}$ obsahuje sedmdesát dvě transformace třetího stupně s jednoduchými hlavními body v bodech 1, 3, 4, 5; z tohoto počtu má jedna polovina transformací dvojnásobný bod v bodě 2 a druhá polovina v bodě 6.*

Důkaz. Kubická transformace $\mathbf{L}_1$ má body *1*, *3*, *4*, *5* za jednoduché hlavní body a bod *2* za dvojnásobný. Skládáme-li tuto transformaci s třiceti šesti kolineacemi grupy $\mathfrak{G}_{72}$, dostaneme třicet šest kubických transformací, které mají tytéž hlavní body jako $\mathbf{L}_1$, neboť kolineací odpovídá bodu bod, přímce přímka a kuželosečce kuželosečka. Složíme-li $\mathbf{L}_1$ s libovolnou transformací 5. stupně z grupy $\mathfrak{G}_{72}$, obdržíme opět kubickou transformaci s jednoduchými hlavními body *1*, *3*, *4*, *5* a s dvojnásobným hlavním bodem v bodě *6*. Transformace 5. stupně transformuje totiž přímky $\overline{ik}$ opět v přímky $\overline{jl}$, body i v kuželosečky k_i^2 a kuželosečky k_i^2 v body i ($i \neq k$, $j \neq l$ probíhají indexy 1, ..., 6). Tím je tvrzení věty 5 dokázáno.

Prostorové kolineaci

$$x_1 = x_1', \; x_2 = x_4', \; x_3 = x_3', \; x_4 = x_2',$$

odpovídá v rovině kubická transformace $\mathbf{L}_2$ s jednoduchými hlavními body *2*, *3*, *4*, *6* a s dvojnásobným hlavním bodem v bodě *5*. $\mathbf{L}_2$ neleží ve třídě $\mathbf{L}_1\mathfrak{G}_{72}$, určuje tedy analogicky další třídu $\mathbf{L}_2\mathfrak{G}_{72}$, která obsahuje sedmdesát dvě kubické transformace s týmiž jednoduchými hlavními body jako má $\mathbf{L}_2$; polovina z nich má dvojnásobný hlavní bod v bodě *5*, druhá polovina v bodě *1*.

Úmluva. Rovinnou kubickou transformaci $\mathbf{L}$ s jednoduchými hlavními body i, j, k, l a dvojnásobným hlavním bodem m, budeme značit $\mathbf{L}(i, j, k, l; m)$ nebo stručně $(i, j, k, l; m)$.

Další čtyři třídy různé od tříd $\mathbf{L}_1\mathfrak{G}_{72}$, $\mathbf{L}_2\mathfrak{G}_{72}$, jsou

$$\mathbf{L}_3\mathfrak{G}_{72}\,, \quad \mathbf{L}_4\mathfrak{G}_{72}\,, \quad \mathbf{L}_5\mathfrak{G}_{72}\,, \quad \mathbf{L}_6\mathfrak{G}_{72}\,;$$

kde $\mathbf{L}_3(1, 4, 5, 6; 2)$, $\mathbf{L}_4(3, 4, 5, 6; 2)$, $\mathbf{L}_5(1, 2, 4, 5; 3)$, $\mathbf{L}_6(1, 2, 3, 6; 4)$ jsou kubické transformace rovinné, odpovídající postupně prostorovým kolineacím

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_2', & x_2 &= x_1', & x_3 &= x_3', & x_4 &= x_4',\\
x_1 &= x_3', & x_2 &= x_2', & x_3 &= x_1', & x_4 &= x_4',\\
x_1 &= \varepsilon x_1', & x_2 &= x_3', & x_3 &= x_4', & x_4 &= x_2',\\
x_1 &= x_4', & x_2 &= x_1', & x_3 &= \varepsilon x_2', & x_4 &= \varepsilon x_3'.
\end{aligned}$$

Kolineaci

$$x_1 = x_2', \quad x_2 = x_1', \quad x_3 = x_4', \quad x_4 = x_3'$$

odpovídá v rovině kvadratická transformace $\mathbf{Q}_1$, periody dvě, s hlavními body *2*, *3*, *6*. Třída $\mathbf{Q}_1\mathfrak{G}_{72}$ obsahuje třicet šest transformací druhého stupně s hlavními body *2, 3, 6* a třicet šest transformací čtvrtého stupně s dvojnásobnými hlavními body *1, 4, 5* a jednoduchými hlavními body *2, 3, 6*.

Kolineaci

$$x_1 = \varepsilon x_1', \quad x_2 = x_2', \quad x_3 = x_3', \quad x_4 = x_4'$$

odpovídá v rovině transformace $\mathbf{B}_1$ čtvrtého stupně, pro níž jsou hlavní body *1, 4, 5* jednoduché a hlavní body *2, 3, 6* dvojnásobné. Třída $\mathbf{B}_1\mathfrak{G}_{72}$ obsahuje třicet šest transformací čtvrtého stupně s týmiž hlavními body jako má $\mathbf{B}_1$ a třicet šest transformací druhého stupně s hlavními body *1, 4, 5*.

Tím dostaneme následující rozklad grupy $\mathfrak{G}_{648}$ ve třídy podle podgrupy $\mathfrak{G}_{72}$

$\mathfrak{G}_{72}$ obsahuje 36 transformací 5. stupně a
36 transformací 1. stupně;

$\mathbf{L}_1\mathfrak{G}_{72}$ obsahuje 36 transformací 3. stupně (*1, 3, 4, 5*; *6*) a
36 transformací 3. stupně (*1, 3, 4, 5*; *2*);

$\mathbf{L}_2\mathfrak{G}_{72}$ obsahuje 36 transformací 3. stupně (*2, 3, 4, 6*; *1*) a
36 transformací 3. stupně (*2, 3, 4, 6*; *5*);

$\mathbf{L}_3\mathfrak{G}_{72}$ obsahuje 36 transformací 3. stupně (*1, 4, 5, 6*; *3*) a
36 transformací 3. stupně (*1, 4, 5, 6*; *2*);

$\mathbf{L}_4\mathfrak{G}_{72}$ obsahuje 36 transformací 3. stupně (*2, 3, 5, 6*; *1*) a
36 transformací 3. stupně (*2, 3, 5, 6*; *4*);

$\mathbf{L}_5\mathfrak{G}_{72}$ obsahuje 36 transformací 3. stupně (*1, 2, 4, 5*; *6*) a
36 transformací 3. stupně (*1, 2, 4, 5*; *3*);

$\mathbf{L}_6\mathfrak{G}_{72}$ obsahuje 36 transformací 3. stupně (*1, 2, 3, 6*; *5*) a
36 transformací 3. stupně (*1, 2, 3, 6, 4*);

$\mathbf{Q}_1\mathfrak{G}_{72}$ obsahuje 36 transformací 2. stupně s jedn. hlav. body *2, 3, 6* a
36 transformací 4. stupně s jedn. hlav. body *2, 3, 6* a
s dvojn. hlav. body *1, 4, 5*;

$\mathbf{B}_1\mathfrak{G}_{72}$ obsahuje 36 transformací 2. stupně s jedn. hlav. body *1, 4, 5* a
36 transformací 4. stupně s jedn. hlav. body *1, 4, 5* a
s dvojn. hlav. body *2, 3, 6*.

Tím je dokázána

Věta 6. *Grupa $\mathfrak{G}_{648}$ rovinných transformací, které zachovávají trojrozměrný systém rovinných kubik, procházejících jednoduše body 1, …, 6 z věty 1, obsahuje třicet šest transformací 5. stupně, sedmdesát dvě transformace 4. stupně, 432 transformací 3. stupně, sedmdesát dvě transformace 2. stupně a třicet šest transformací 1. stupně.*

Tím je prostudována grupa $\mathfrak{G}_{648}$ rovinných transformací, která má za podgrupu grupu $\mathfrak{G}_{72}$ z práce L. VAŇATOVÉ [2].

Poznámka 3. Při rozkladu grupy $\mathfrak{G}_{648}$ ve třídy podle podgrupy $\mathfrak{G}_{72}$ se zjistí, že podgrupa $\mathfrak{G}_{72}$ není normální, neboť kdyby byla normální, muselo by na př. platit $L_1^{-1}U_1L_1 = U_1$, t. j. $U_1L_1 = L_1U_1$, kde $U_1 = J_1^{\mathrm{I}}J_1^{\mathrm{II}}$ seřazuje body $1, \ldots, 6$ v cykly $(1, 2)$, (3465).[8]) Ale tomu tak není, neboť transformace U_1L_1 přiřazuje bodu $1 \sim k_6^2$, $2 \sim \overline{12}$, $3 \sim \overline{24}$, $4 \sim 6$, $5 \sim \overline{23}$, $6 \sim \overline{25}$, kdežto transformace L_1U_1 přiřazuje bodu $1 \sim \overline{12}$, $2 \sim k_5^2$, $3 \sim \overline{14}$, $4 \sim \overline{16}$, $5 \sim \overline{13}$, $6 \sim 5$.

2. Jestliže jsme našli grupu rovinných transformací $\mathfrak{G}_{648}$, jejíž podgrupou je grupa rovinných transformací $\mathfrak{G}_{72}$ z práce [2], lze očekávat, že i grupa rovinných transformací $\mathfrak{G}_8$ z téže práce [2] bude podgrupou jisté širší grupy rovinných transformací stejného významu.

Vyšetřování provedeme opět pomocí kubické plochy. Nejdříve zjistíme, která kubická plocha má tu vlastnost, že se její přímky zobrazují do roviny do seskupení bodů $1, \ldots, 6$, přímek $\overline{ik}$ $(i \neq k;\ i, k = 1, \ldots, 6)$ a kuželoseček k_i^2 $(i = 1, \ldots, 6)$ příslušného ke grupě $\mathfrak{G}_8$. Analogie s odstavcem 1 dovoluje vyjadřovat se zde už stručněji.

V grupě $\mathfrak{G}_8$ jsou dvě symetrické involuce 5. stupně prvního druhu J_i^{I} $(i = 1, 2)$, a to

$$J_1^{\mathrm{I}} \ldots 12, 34, 56\,, \quad J_2^{\mathrm{I}} \ldots 12, 35, 46\,,$$

a dvě symetrické involuce 5. stupně druhého druhu J_i^{II} $(i = 1, 2)$, a to

$$J_1^{\mathrm{II}} \ldots 45, 1236\,, \quad J_2^{\mathrm{II}} \ldots 36, 1245\,.$$ [9])

To znamená, že přímky $\overline{12}$, $\overline{34}$, $\overline{56}$, resp. $\overline{12}$, $\overline{35}$, $\overline{46}$ procházejí jedním bodem $\overline{M}_1$, resp. $\overline{M}_2$, kuželosečka k_4^2, resp. k_5^2 se dotýká přímky $\overline{45}$ v bodě 5, resp. v bodě 4, a kuželosečka k_3^2, resp. k_6^2 se dotýká přímky $\overline{36}$ v bodě 6, resp. v bodě 3. To je celkem šest případů, jež vedou k planárním bodům na kubické ploše. Jestliže další takové případy už nenastanou (druhá možnost je probrána v odst. 3), můžeme body $1, \ldots, 6$, přímky $\overline{ik}$ $(i \neq k;\ i, k = 1, \ldots, 6)$ a kuželosečky k_i^2 $(i = 1, \ldots, 6)$ pokládat za obrazy přímek kubické plochy φ^3, která obsahuje právě šest planárních bodů. Taková plocha φ^3 skutečně existuje a má rovnici

$$\varphi^3 \equiv x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + ax_4^3 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^3 = 0\,, \qquad \text{kde } a \neq 1\,. \tag{8}$$ [10])

Její příslušné zobrazení do roviny ihned provedeme.

Šest planárních bodů kubické plochy φ^3 dané rovnicí (8) určíme podobně jako u plochy α^3 v odstavci 1. Zjistíme, že mají souřadnice

$$M_1(1, 0, 0, 0)\,, \quad M_2(0, 1, -1, 0)\,, \quad M_3(0, 0, 1, 0)\,,$$
$$M_4(1, -1, 0, 0)\,, \quad M_5(1, 0, -1, 0)\,, \quad M_6(0, 1, 0, 0)\,.$$

Přiřazení přímek kubické plochy φ^3 bodům $1, \ldots, 6$, přímkám $\overline{ik}$ $(i \neq k;\ i, k = 1, \ldots, 6)$ a kuželosečkám k_i^2 $(i = 1, \ldots, 6)$ v obrazové rovině provedeme

[8]) *L. Vaňatová* [2].
[9]) *L. Vaňatová* [2].
[10]) *J. Metelka* [3], str. 151.

takto: jediné tři přímky kubické plochy φ^3, které obsahují po dvou planárních bodech, jsou přímky

$$x_2 + x_3 = 0\,, \quad x_4 = 0 \quad (\text{jež obsahuje body } M_1, M_2)\,,$$
$$x_1 + x_3 = 0\,, \quad x_4 = 0 \quad (\text{jež obsahuje body } M_5, M_6)\,,$$
$$x_1 + x_2 = 0\,, \quad x_4 = 0 \quad (\text{jež obsahuje body } M_3, M_4)\,.$$

Těmto přímkám přiřadíme v obrazové rovině postupně přímky $\overline{12}$, $\overline{36}$, $\overline{45}$ (pořadí by mohlo být i jiné). Dalším dvěma přímkám kubické plochy φ^3, které procházejí planárním bodem M_1, přiřadíme v obrazové rovině přímky $\overline{34}$, resp. $\overline{56}$; konečně těm dvěma přímkám kubické plochy φ^3, které procházejí planárním bodem M_2, přiřadíme přímky $\overline{35}$, resp. $\overline{46}$. Ze dvou dalších přímek kubické plochy φ^3, které jdou planárním bodem M_6, jedna neprotíná v prostoru přímku, které jsme přiřadili přímku $\overline{46}$; té přiřadíme bod *3*. Druhá ji protíná, té přiřadíme kuželosečku k_6^2 atd. Tedy platí

Věta 7. *Seskupení bodů 1, ..., 6, přímek $\overline{ik}$ ($i \neq k$; $i, k = 1, \ldots, 6$) a kuželoseček k_i^2 ($i = 1, \ldots, 6$) v rovině, vedoucí ke grupě rovinných transformací $\mathfrak{G}_8$, dostaneme zobrazením přímek kubické plochy φ^3 se šesti planárními body do roviny.*

Věta 8. *Kubická plocha φ^3 se šesti planárními body se reprodukuje dvaceti čtyřmi prostorovými kolineacemi (pokud $a \neq 1$).*

Důkaz. Šest prostorových kolineací, které zachovávají kubickou plochu (8), má tvar

$$x_1 = x_i'\,, \quad x_2 = x_j'\,, \quad x_3 = x_k'\,, \quad x_4 = x_4'\,,$$

kde i, j, k jsou permutace čísel 1, 2, 3. Další kolineace s touto vlastností jsou

$$x_1 = -(x_1' + x_2' + x_3' + x_4')\,, \quad x_2 = x_r'\,, \quad x_3 = x_s'\,, \quad x_4 = x_4'\,,$$

kde r, s jsou variace druhé třídy z čísel 1, 2, 3. Těch je také šest. Potom lze čtyřčlen $[-(x_1' + x_2' + x_3' + x_4')]$ položit roven x_2 a x_3; tak dostaneme dalších dvanáct kolineací, které reprodukují kubickou plochu φ^3. Tím je důkaz věty 8 proveden.

Existuje tedy grupa rovinných transformací $\mathfrak{G}_{24}$, řádu dvacet čtyři, která reprodukuje trojrozměrný systém rovinných kubik, procházejících jednoduše body *1*, ..., *6* z věty 7. $\mathfrak{G}_{24}$ má za podgrupu grupu $\mathfrak{G}_8$ rovinných transformací, která má tutéž vlastnost.

Na problém lze však jíti také jinou, výhodnější cestou. Kubická plocha φ^3 se šesti planárními body se dá zobrazit ještě jiným způsobem.[11]) Tento druhý způsob zobrazení kubické plochy φ^3 vede k takové konfiguraci bodů *1*, ..., *6*, která dává současně vznik šesti prvním charakteristickým polohám, t. j. body *1*, ..., *6* jsou hlavními body šesti symetrických involucí 5. stupně prvního druhu J_i^{I} ($i = 1, \ldots, 6$)

[11]) *J. Metelka* [3], str. 151.

$$J_1^{\mathrm{I}} \dots 12, 34, 56\,, \quad J_4^{\mathrm{I}} \dots 15, 24, 36$$
$$J_2^{\mathrm{I}} \dots 12, 35, 46\,, \quad J_5^{\mathrm{I}} \dots 14, 25, 36$$
$$J_3^{\mathrm{I}} \dots 13, 26, 45\,, \quad J_6^{\mathrm{I}} \dots 16, 23, 45\,.$$

Těchto šest symetrických involucí 5. stupně prvního druhu dává vznik grupě $\overline{\mathfrak{G}}_{24}$, řádu dvacet čtyři, kterou plně prostudoval J. Metelka v práci [4], jakožto čtvrtý případ.

Poněvadž seskupení bodů $1, \dots, 6$, vedoucí ke grupě $\mathfrak{G}_8$, a seskupení bodů $1, \dots, 6$, vedoucí ke grupě $\overline{\mathfrak{G}}_{24}$, dostaneme různým zobrazením téže kubické plochy φ^3 se šesti planárními body do roviny, jsou tato seskupení biracionálně ekvivalentní. Existuje proto Cremonova transformace S, která převádí jedno seskupení bodů $1, \dots, 6$ ve druhé. Abychom obdrželi hledanou grupu $\mathfrak{G}_{24}$, mající $\mathfrak{G}_8$ za podgrupu, stačí aplikovat na každou známou transformaci grupy $\overline{\mathfrak{G}}_{24}$ příbuznost S, neboť grupy $\mathfrak{G}_{24}$ a $\overline{\mathfrak{G}}_{24}$ jsou spolu isomorfní.

Písmenem ϱ, resp. σ označme rovinu, ve které leží konfigurace šesti bodů $1, \dots, 6$, vedoucí ke grupě $\mathfrak{G}_8$, resp. $\overline{\mathfrak{G}}_{24}$. Transformace S má v rovině ϱ dvojnásobný bod 1 a jednoduché body $3, 4, 5, 6$ za hlavní body. Je to kubická transformace a body $1, \dots, 6$ roviny ϱ se transformují do roviny σ postupně v k_2^2, 2, $\overline{13}$, $\overline{14}$, $\overline{15}$, $\overline{16}$. Transformace S^{-1} je totožná s S, je proto S involutorní příbuznost. Můžeme vyslovit větu

Věta 9. *Seskupení bodů $1, \dots, 6$ z věty 7, vedoucí ke grupě rovinných transformací $\mathfrak{G}_8$ a seskupení bodů $1, \dots, 6$, vedoucí ke grupě $\overline{\mathfrak{G}}_{24}$, jsou biracionálně ekvivalentní a dají se na sebe převést kubickou involutorní transformací S.*

Na příklad: involuci $J_3^{\mathrm{I}} \in \overline{\mathfrak{G}}_{24}$ v rovině σ odpovídá v rovině ϱ kubická transformace $SJ_3^{\mathrm{I}}S^{-1}$ s jednoduchými hlavními body $1, 2, 4, 5$ a s dvojnásobným hlavním bodem 6; involuci $J_4^{\mathrm{I}} \in \overline{\mathfrak{G}}_{24}$ v rovině σ, odpovídá v rovině ϱ opět kubická transformace $SJ_4^{\mathrm{I}}S^{-1}$ s jednoduchými hlavními body $1, 2, 3, 6$ a s dvojnásobným hlavním bodem 4.

Abychom určili všechny prvky grupy $\mathfrak{G}_{24}$ utvoříme její rozklad ve *třídy* podle podgrupy $\mathfrak{G}_8$. Kubická transformace $SJ_3^{\mathrm{I}}S^{-1}$ neleží v grupě $\mathfrak{G}_8$, určuje proto třídu $SJ_3^{\mathrm{I}}S^{-1}\mathfrak{G}_8$, která obsahuje osm kubických transformací s jednoduchými hlavními body $1, 2, 4, 5$, z nichž čtyři mají dvojnásobný bod v bodě 3 a čtyři v bodě 6. Poněvadž kubická transformace $SJ_4^{\mathrm{I}}S^{-1}$ neleží v této třídě, je $SJ_4^{\mathrm{I}}S^{-1}\mathfrak{G}_8$ další třída, která obsahuje osm kubických transformací s jednoduchými hlavními body $1, 2, 3, 6$. Polovina z těchto transformací má bod 5, druhá polovina bod 4 za dvojnásobný hlavní bod. Přihlédneme-li k výsledkům práce [2], můžeme vyslovit větu

Věta 10. *Grupa $\mathfrak{G}_8$ rovinných transformací, které zachovávají systém kubik, procházejících jednoduše body $1, \dots, 6$ z věty 7, je podgrupou grupy rovinných transformací $\mathfrak{G}_{24}$, řádu dvacet čtyři, jejíž prvky reprodukují tytéž kubiky. Grupa $\mathfrak{G}_{24}$ obsahuje: dvě symetrické involuce 5. stupně prvního druhu J_i^{I} $(i = 1, 2)$, dvě symetrické involuce 5. stupně druhého druhu J_i^{II} $(i = 1, 2)$, jednu centrální ko-*

lineaci $\boldsymbol{H}_1$, *dvě kolineace* $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}$ *s periodou čtyři, šestnáct kubických transformací (a to čtyři involuce, osm transformací s periodou tři a čtyři s periodou šest) a transformaci identickou.*

3. Skupina šesti bodů, vedoucí ke grupě $\mathfrak{G}_8$, se dá ještě specialisovat. To je vidět z toho, že s ní biracionálně ekvivalentní skupina bodů *1*, ..., *6*, která dává čtvrtý případ z práce [4], se dá specialisovat na skupinu bodů, vedoucí ke grupě rovinných transformací $\mathfrak{G}_{120}$.[12]) Tato vlastnost vyplývá také z toho, že kubická plocha φ^3 se šesti planárními body, jejímž zobrazením do roviny tuto speciální skupinu obdržíme, má ještě jeden neurčený koeficient a. Položíme-li $a = 1$, přejde plocha (8) v kubickou plochu Clebschovu (diagonální) s desíti planárními body o rovnici

$$\psi^3 \equiv x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^3 = 0\,.^{13)} \tag{9}$$

Věta 11. *Kubická plocha* ψ^3 *s desíti planárními body se reprodukuje sto dvaceti prostorovými kolineacemi, které tvoří grupu* $\mathfrak{G}_{120}$.

Důkaz. Dvacet čtyři kolineací, které reprodukují plochu (9), má tvar

$$x_1 = x_i', \quad x_2 = x_j', \quad x_3 = x_k', \quad x_4 = x_m',$$

kde i, j, k, m jsou permutace čísel 1, 2, 3, 4; dalších dvacet čtyři kolineací s toutéž vlastností má tvar

$$x_1 = -(x_1' + x_2' + x_3' + x_4'), \quad x_2 = x_r', \quad x_3 = x_s', \quad x_4 = x_t',$$

kde r, s, t jsou variace třetí třídy z čísel 1, 2, 3, 4. Plocha (9) je dále reprodukována sedmdesáti dvěma kolineacemi, které dostaneme, když čtyřčlen $[-(x_1' + x_2' + x_3' + x_4')]$ položíme roven x_2, resp. x_3, resp. x_4. Tím je důkaz věty 11 proveden.

Ukažme nyní, že skupinu bodů *1*, ..., *6*, vedoucí ke grupě $\mathfrak{G}_8$, lze tak specialisovat, aby tato skupina byla biracionálně ekvivalentní se skupinou šesti bodů, vedoucí k šestému případu z práce [4], t. j. aby tato skupina byla zobrazením přímek kubické plochy ψ^3 Clebschovy s desíti planárními body.

Existuje-li taková speciální skupina bodů *1*, ..., *6* vedoucí ke grupě $\mathfrak{G}_8$ (její rovinu označíme písmenem ϱ), pak ji lze převést v konfiguraci bodů *1*, ..., *6* vedoucí k šestému případu z práce [4] (její rovinu označme σ) toutéž Cremonovou transformací $\boldsymbol{S}$ jako v předcházejícím případě (srovnej s odst. 2). Přitom involuci J_7^{I} s páry hlavních bodů *13, 24, 56* z roviny σ, odpovídá v rovině ϱ kubická transformace $\boldsymbol{S}J_7^{\mathrm{I}}\boldsymbol{S}^{-1}$ (*1, 2, 5, 6; 4*), involuci J_8^{I} s páry hlavních bodů *16, 25, 34* z roviny σ, odpovídá v rovině ϱ kubická transformace $\boldsymbol{S}J_8^{\mathrm{I}}\boldsymbol{S}^{-1}$ (*1, 2, 3, 4; 5*), dále involuci J_9^{I} s páry hlavních bodů *14, 26, 35* z roviny σ, odpovídá v rovině ϱ kubická transformace $\boldsymbol{S}J_9^{\mathrm{I}}\boldsymbol{S}^{-1}$ (*1, 2, 3, 5; 6*) a analogicky involuci J_{10}^{I}

[12]) *J. Metelka* [4], šestý případ.
[13]) *J. Metelka* [3], str. 152.

s páry hlavních bodů *15, 23, 46* z roviny σ, odpovídá v rovině ϱ kubická transformace $\boldsymbol{SJ}_{10}^{\mathrm{I}}\boldsymbol{S}^{-1}$ *(1, 2, 4, 6; 3)*.

Aby v rovině ϱ existovaly kubické transformace $\boldsymbol{SJ}_7^{\mathrm{I}}\boldsymbol{S}^{-1}$, resp. $\boldsymbol{SJ}_8^{\mathrm{I}}\boldsymbol{S}^{-1}$, resp. $\boldsymbol{SJ}_9^{\mathrm{I}}\boldsymbol{S}^{-1}$, resp. $\boldsymbol{SJ}_{10}^{\mathrm{I}}\boldsymbol{S}^{-1}$, musí se kuželosečky k_4^2, resp. k_5^2, resp. k_6^2, resp. k_3^2 dotýkati přímky $\overline{34}$ v bodě *3*, resp. přímky $\overline{56}$ v bodě *6*, resp. přímky $\overline{46}$ v bodě *4*, resp. přímky $\overline{35}$ v bodě *3*, t. j. přímky $\overline{35}, \overline{46}, \overline{34}, \overline{56}$, jsou postupně polárami bodů *4, 5, 6, 3* vzhledem ke kuželosečkám $k_4^2, k_5^2, k_6^2, k_3^2$. To vše lze realisovat zobrazením plochy ψ^3 do roviny ϱ.

Obrazy desíti planárních bodů kubické plochy ψ^3 Clebschovy jsou jednak dotykové body *j, k* přímek $\overline{ij}, \overline{ik}$ na kuželosečce k_i^2 (kde $i \neq j \neq k \neq i$ probíhají čísla 3, 4, 5, 6), jednak průsečík přímek $\overline{12}, \overline{34}, \overline{56}$ a průsečík přímek $\overline{12}, \overline{35}, \overline{46}$.

Přiřadíme-li postupně bodům *3, 4, 5, 6* souřadnice (1, 1, 1), (1, −1, 1), (1, 1, −1), (−1, 1, 1), má kuželosečka k_4^2, dotýkající se přímky $\overline{34}$ v bodě *3* a přímky $\overline{45}$ v bodě *5*, rovnici

$$k_4^2 \equiv x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3 = 0 .$$

Aby body *1, …, 6* tvořily seskupení vedoucí ke grupě $\mathfrak{G}_8$, musí body *1, 2* ležet na jedné ze souřadných os, na př. na ose o_1.[14]) Protože body *1, 2* leží také na kuželosečce k_4^2, vyhovují rovnicím

$$x_2^2 - x_3^2 - x_2x_3 = 0 , \quad x_1 = 0 .$$

V těchže bodech protínají osu o_1 také kuželosečky k_3^2, k_5^2, k_6^2.

Body *1, 2* jsou tím jednoznačně určeny a existence i konstrukce příslušné speciální skupiny bodů *1, …, 6* vedoucí ke grupě $\mathfrak{G}_8$ potvrzena. Zapišme to stručně následující větou:

Věta 12. *Ke skupině šesti bodů, vedoucí k šestému případu z práce* [4], *existuje biracionálně ekvivalentní skupina bodů 1, …, 6, vedoucí ke grupě* $\mathfrak{G}_8$; *lze ji určit zobrazením přímek kubické plochy Clebschovy* ψ^3 *do roviny.*

Grupě kolineací z věty 11 odpovídá touto cestou grupa $\mathfrak{G}_{120}^*$ rovinných transformací $\boldsymbol{T}_i$ roviny σ a ovšem i grupa $\mathfrak{G}_{120}$ rovinných transformací $\boldsymbol{ST}_i\boldsymbol{S}^{-1}$ v rovině ϱ. Všechny tyto grupy jsou mezi sebou isomorfní. Tedy

Věta 13. *Budiž* $\mathfrak{G}_8$ *grupa transformací z věty 12. Potom* $\mathfrak{G}_8$ *je podgrupou grupy* $\mathfrak{G}_{120}$ *rovinných transformací, jež reprodukují kubiky procházející jednoduše body 1, …, 6 z věty 12. Grupa* $\mathfrak{G}_{120}$ *obsahuje tyto transformace: tři kolineace; osm kvadratických transformací periody dvě, šestnáct kvadratických transformací periody čtyři, osm kvadratických transformací periody pět; dvanáct kubických transformací periody dvě, dvanáct kubických transformací periody tři, dvanáct kubických transformací periody čtyři, dvanáct kubických transformací periody šest; osm bikvadratických transformací periody tři, šestnáct bikvadratických transformací periody pět, osm bikvadratických transformací periody šest; čtyři transformace 5. stupně periody dvě a identickou transformaci.*

[14]) *L. Vaňatová* [2].

Tvrzení věty 13 o tom, které transformace grupa $\mathfrak{G}_{120}$ obsahuje, lze dokázat rozkladem grupy $\mathfrak{G}_{120}$ ve třídy podle podgrupy $\mathfrak{G}_8$, jejíž všechny transformace známe.

4. Výsledky této práce můžeme stručně shrnout takto:

Jsou-li body $1, \ldots, 6$ hlavními body právě dvou symetrických involucí J_i^{I} ($i = 1, 2$) 5. stupně prvního druhu a současně dvou symetrických involucí J_i^{II} ($i = 1, 2$) 5. stupně druhého druhu, existuje grupa $\mathfrak{G}_{24}$ rovinných transformací, reprodukující trojrozměrný systém rovinných kubik, procházejících jednoduše pevnými body $1, \ldots, 6$, jejíž podgrupou je grupa $\mathfrak{G}_8$, mající tytéž vlastnosti.

Jestliže tyto body $1, \ldots, 6$ mají speciální polohu, charakterisovanou větou 12, je grupa $\mathfrak{G}_8$ rovinných transformací, reprodukujících trojrozměrný systém kubik, které procházejí jednoduše body $1, \ldots, 6$, podgrupou grupy $\mathfrak{G}_{120}$, jejíž každá transformace má tutéž vlastnost.

Grupa $\mathfrak{G}_{72}$, jejíž prvky (které obdržíme složením šesti symetrických involucí J_i^{I} 5. stupně prvního druhu a šesti symetrických involucí J_i^{II} ($i = 1, \ldots, 6$) 5. stupně druhého druhu) reprodukují trojrozměrný systém rovinných kubik, procházejících jednoduše body $1, \ldots, 6$ z věty 1, je podgrupou grupy $\mathfrak{G}_{648}$ rovinných transformací, které všechny mají tutéž vlastnost.

LITERATURA

[1] *B. Bydžovský:* Úvod do algebraické geometrie, JČMF Praha, 1948.

[2] *L. Vaňatová:* O jednom druhu grup involutorních Cremonových transformací v rovině. Časopis pro pěstování matematiky, ročník *80* (1955), č. 2.

[3] *J. Metelka*: Sur les points planaires des surfaces cubiques. Académie royale de Belgique; Bulletin de la classe des sciences, 5e série — Tome XXXIII.

[4] *J. Metelka*: O jistých konečných grupách složených z Cremonových transformací prvého a pátého stupně. Věstník Král. české společnosti nauk, třída matematicko-přírodovědecká, 1946.

Резюме

СВЯЗЬ ГЛАВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ИНВОЛЮЦИИ 5-ОЙ СТЕПЕНИ С ПРЯМЫМИ КУБИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

СВАТАВА КУБАЛКОВА (Svatava Kubálková), Прага.

(Поступило в редакцию 22/XII 1954 г.)

Статья является продолжением работы Л. Ванятовой, помещенной в настоящем номере журнала (Časopis pro pěstování matematiky, т. *80* (1955), No 2).

Главные элементы плоской симметрической инволюции 5-ой степени можно считать, по их группировке, плоскими образами 27 прямых некоторой кубической поверхности $\varkappa^3$, не имеющей двойных точек. В статье исследуются условия, которым должна удовлетворять кубическая поверхность $\varkappa^3$, для того, чтобы ее прямые отображались в конфигурацию главных точек *1*, ..., *6*, приводящую к группе $\mathfrak{G}_8$ или $\mathfrak{G}_{72}$ из упомянутой статьи Л. Ванятовой. Оказалось, что группы $\mathfrak{G}_8$ и $\mathfrak{G}_{72}$ плоских преобразований, сохраняющих трехмерное семейство плоских кубик с неподвижными точками *1*, ..., *6*, являются подгруппами некоторых групп плоских преобразований высших порядков с теми же свойствами.

Работа состоит из трех глав. В первой главе изучена связь группы плоских преобразований $\mathfrak{G}_{72}$ с группой плоских преобразований $\mathfrak{G}_{648}$ при помощи эквиангармонической кубической поверхности α^3. Глава содержит следующие результаты

I. Главные элементы симметрической инволюции 5-ой степени, приводящие к группе $\mathfrak{G}_{72}$ плоских преобразований, получаются путем отображения прямых кубической эквиангармонической поверхности α^3, данной уравнением

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 0$$

на плоскость.

II. Эквиангармоническая кубическая поверхность α^3 воспроизводится в пространстве 648-ью коллинеациями, образующими группу $\overline{\mathfrak{G}}_{648}$. Группе $\overline{\mathfrak{G}}_{648}$ соответствует в плоскости группа плоских преобразований $\mathfrak{G}_{648}$, изоморфная с $\overline{\mathfrak{G}}_{648}$. Каждое преобразование группы $\mathfrak{G}_{648}$ сохраняет трехмерное семейство плоских кубик, проходящих по одному разу через точки 1, ..., 6. Группа $\mathfrak{G}_{72}$, обладающая тем же свойством, является подгруппой группы $\mathfrak{G}_{648}$.

Группа $\mathfrak{G}_{648}$ содержит следующие плоские преобразования: 36 преобразований 1-ой степени, 72 преобразования 2-ой степени, 432 преобразования 3-ьей степени, 72 преобразования 4-ой степени и 36 преобразований 5-ой степени.

Во второй главе исследуются свойства группы $\mathfrak{G}_{24}$ плоских преобразований, содержащей группу $\mathfrak{G}_8$ из работы Л. Ванятовой в виде своей подгруппы. Справедливы следующие теоремы

III. Группировку главных элементов, приводящую к группе $\mathfrak{G}_8$, можно получить отображением прямых кубической поверхности φ^3 с шестью планарными точками на плоскость.

IV. Кубическая поверхность φ^3 в пространстве воспроизводится 24-мя коллинеациями, образующими группу $\overline{\mathfrak{G}}_{24}$. Группе $\overline{\mathfrak{G}}_{24}$ отвечает в плоскости изоморфная ей группа $\mathfrak{G}_{24}$ плоских преобразований, сохраняющих трех-

мерное семейство плоских кубик. Группа $\mathfrak{G}_8$ является подгруппой группы $\mathfrak{G}_{24}$.

Группа $\mathfrak{G}_{24}$ содержит следующие плоские преобразования: 2 инволюции 5-ой степени первого рода, 2 инволюции 5-ой степени второго рода, одну центральную коллинеацию, 2 циклические коллинеации, 16 кубических преобразований и тождественное преобразование.

Третья глава содержит следующие результаты

V. Если координаты главных точек 3, 4, 5, 6 суть соответственно $(1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1), (-1, 1, 1)$ и *если координаты главных точек 1, 2 удовлетворяют уравнению*

$$x_2^2 - x_3^2 - x_2x_3 = 0\,, \quad x_1 = 0\,,$$

то главные элементы соответствующей симметрической инволюции 5-ой степени можно считать проекциями прямых кубической поверхности Клебша ψ^3 с десятью планарными точками.

VI. Кубическая поверхность ψ^3 воспроизводится 120-ью пространственными коллинеациями, образующими группу $\overline{\mathfrak{G}}_{120}$. Ей соответствует в плоскости группа $\mathfrak{G}_{120}$ плоских преобразований, сохраняющих трехмерное семейство плоских кубик, которые проходят по одному разу через шесть неподвижных точек 1, ..., 6. Каждое преобразование группы $\mathfrak{G}_8$ обладает тем же свойством, и $\mathfrak{G}_8$ является подгруппой группы $\mathfrak{G}_{120}$.

Группа $\mathfrak{G}_{120}$ содержит 3 коллинеации, 32 преобразования 2-ой степени, 48 преобразований 3-ьей степени, 32 преобразования 4-ой степени, 4 симметрические инволюции 5-ой степени и тождественное преобразование.

Zusammenfassung

ZUSAMMENHANG DER HAUPTELEMENTE EINER SYMMETRISCHEN INVOLUTION 5-TEN GRADES MIT DEN GERADEN EINER KUBISCHEN FLÄCHE

SVATAVA KUBÁLKOVÁ, Prag.

(Angenommen den 22. Dezember 1954.)

Diese Arbeit ist eine Fortsetzung des Aufsatzes von L. VAŇATOVÁ, der in dieser Nummer des Zeitschriftes publiziert ist (Časopis pro pěstování matematiky 80 (1955), Nr. 2).

Die Hauptelemente einer symmetrischen Involution 5-ten Grades können wir für die Abbilde der 27 Geraden einer kubischen Fläche $\varkappa^3$ ohne Doppelpunkte auf die Ebene halten. In dieser Arbeit untersucht man die Bedingungen, welche eine kubische Fläche $\varkappa^3$ erfüllen muss, damit sich ihre Geraden in die Konfiguration der Hauptpunkte *1*, ..., *6* abbilden, die zur Gruppe $\mathfrak{G}_8$ oder $\mathfrak{G}_{72}$ aus der vorstehenden Arbeit von L. Vaňatová führt. Bei der Untersuchung hat man festgestellt, dass die Gruppen $\mathfrak{G}_8$ und $\mathfrak{G}_{72}$ der Transformationen die Untergruppen bestimmter Gruppen von höherer Ordnung sind.

Die eigene Arbeit besteht aus drei Kapiteln. Im ersten Kapitel studiert man, mit Hilfe der ekvianharmonischen kubischen Fläche α^3, den Zusammenhang der Gruppe $\mathfrak{G}_{72}$ mit der Gruppe $\mathfrak{G}_{648}$ der Transformationen. Das Kapitel enthält folgende Ergebnisse

I. *Die Hauptelemente der symmetrischen Involution 5-ten Grades, die zur Gruppe* $\mathfrak{G}_{72}$ *der Transformationen führen, gewinnen wir durch die Abbildung der Geraden der ekvianharmonischen kubischen Fläche* α^3 *mit der Gleichung*

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 0$$

auf die Ebene.

II. *Die ekvianharmonische kubische Fläche* α^3 *ist im Raume durch 648 Kollineationen, die die Gruppe* $\overline{\mathfrak{G}}_{648}$ *bilden, reproduziert. In der Ebene entspricht der Gruppe* $\overline{\mathfrak{G}}_{648}$ *die Gruppe* $\mathfrak{G}_{648}$ *der Transformationen, die mit* $\overline{\mathfrak{G}}_{648}$ *isomorph ist. Jede Transformation der Gruppe* $\mathfrak{G}_{648}$ *reproduziert ein dreidimensionales System der ebenen Kurven dritten Grades, die einfach durch die Punkte 1, ..., 6 gehen. Die Gruppe* $\mathfrak{G}_{72}$*, die dieselbe Eigenschaft besitzt, ist eine Untergruppe der Gruppe* $\mathfrak{G}_{648}$.

$\mathfrak{G}_{648}$ enthält folgende Transformationen: 36 Transformationen ersten Grades, 72 Transformationen zweiten Grades, 432 Transformationen dritten Grades, 72 Transformationen vierten Grades und 36 Transformationen fünften Grades.

Im zweiten Kapitel dieser Arbeit untersucht man die Eigenschaften der Gruppe $\mathfrak{G}_{24}$, die die Gruppe $\mathfrak{G}_8$ aus der vorstehenden Arbeit von L. Vaňatová als Untergruppe enthält. Man hat festgestellt

III. *Die zur Gruppe* $\mathfrak{G}_8$ *führende Gruppe der Hauptelemente gewinnen wir durch Abbildung der Geraden der kubischen Fläche* φ^3 *mit sechs Planarpunkten auf die Ebene.*

IV. *Die kubische Fläche* φ^3 *ist durch 24 Raumkollineationen, die die Gruppe* $\overline{\mathfrak{G}}_{24}$ *bilden, reproduziert. In der Ebene entspricht der Gruppe* $\overline{\mathfrak{G}}_{24}$ *eine isomorphe Gruppe* $\mathfrak{G}_{24}$ *der Transformationen. Ihre Elemente reproduzieren ein dreidimensionales System der ebenen Kurven dritten Grades und* $\mathfrak{G}_8$ *ist die Untergruppe dieser Gruppe.*

Die Gruppe $\mathfrak{G}_{24}$ enthält folgende Transformationen: zwei Involutionen fünften Grades erster Gattung, zwei Involutionen fünften Grades zweiter Gattung, eine Zentralkollineation, zwei zyklische Kollineationen, sechzehn Transformationen dritten Grades und eine identische Transformation.

Im dritten Kapitel sind diese Ergebnisse enthalten

V. *Wenn die Hauptpunkte 3, 4, 5, 6 fortschreitend die Koordinaten* (1, 1, 1), (1, −1, 1), (1, 1, −1) *und* (−1, 1, 1) *haben und die Koordinaten der Hauptpunkte 1, 2 der Gleichung*

$$x_2^2 - x_3^2 - x_2 x_3 = 0\,, \quad x_1 = 0$$

genügen, können wir die Hauptelemente der erwägten symmetrischen Involution fünften Grades für die Abbilde der Geraden der kubischen Fläche ψ^3 *mit 10 Planarpunkten auf die Ebene halten.*

VI. *Die kubische Fläche* ψ^3 *ist durch 120 Raumkollineationen, die die Gruppe* $\overline{\mathfrak{G}}_{120}$ *bilden, reproduziert. In der Ebene entspricht der Gruppe* $\overline{\mathfrak{G}}_{120}$ *die Gruppe* $\mathfrak{G}_{120}$ *der Transformationen, die das dreidimensionale System der ebenen Kurven dritten Grades reproduzieren. Diese kubischen Kurven gehen einfach durch sechs feste Punkte 1, ..., 6. Jedes Element der Gruppe* $\mathfrak{G}_8$ *besitzt dieselbe Eigenschaft wie die Elemente der Gruppe* $\mathfrak{G}_{120}$ *und* $\mathfrak{G}_8$ *ist die Untergruppe der Gruppe* $\mathfrak{G}_{120}$.

Die Gruppe $\mathfrak{G}_{120}$ enthält diese Transformationen: 3 Kollineationen, 32 Transformationen zweiten Grades, 48 Transformationen dritten Grades, 32 Transformationen vierten Grades, 4 symmetrische Involutionen fünften Grades und eine identische Transformation.