Lada Vaňatová

O jednom druhu grup involutorních Cremonových transformací v rovině

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 80 (1955), No. 2, 152--171

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 80 (1955)

O JEDNOM DRUHU GRUP INVOLUTORNÍCH CREMONOVÝCH TRANSFORMACÍ V ROVINĚ

LADA VAŇATOVÁ, Praha.

(Došlo dne 11. června 1954.) DT:513.17

Věnováno akademiku Bohumilu Bydžovskému k jeho 75. narozeninám.

V práci „Sur une espèce particulière de groupes d'involutions planes de Cremona" předložil prof. B. Bydžovský problém, zda existuje v rovině šest bodů, které by tvořily současně skupinu hlavních bodů více než jedné symetrické involuce pátého stupně prvního, resp. druhého druhu.*) V této své práci dokázal, že skupina šesti bodů se může vyskytovat v druhé charakteristické poloze dvojím nebo trojím způsobem současně, což dává vznik grupě transformací 4. nebo 6. řádu. Na tuto práci navázal J. Metelka svou prací „O jistých konečných grupách složených z Cremonových transformací prvního a pátého stupně", v níž dokázal, že skupina šesti bodů v rovině může být v první charakteristické poloze dvěma, třemi, čtyřmi, šesti nebo konečně desíti různými způsoby. Ukázal také, že jiné možnosti již neexistují.

Nerozřešena zůstala ještě otázka, zda je možné, aby skupina šesti bodů byla v první i v druhé charakteristické poloze, jaké jsou tu možnosti a které grupy transformací tak vznikají. Upozorněna prof. Bydžovským na tento problém, došla jsem k následujícím výsledkům: Je-li skupina šesti bodů v rovině současně v první i v druhé charakteristické poloze, potom je v každé z těchto poloh buď dvěma, nebo šesti různými způsoby (věty 2 a 15). Jiné možnosti neexistují (poznámky 4 a 5). První možnost vede ke grupě $\mathfrak{G}_8$ řádu 8 (věta 3) a druhá ke grupě $\mathfrak{G}_{72}$ řádu 72 (věta 16), které se skládají z involucí a cyklických transformací prvního a pátého stupně. Vůči všem transformacím obou grup existují jednoduché invariantní sextiky (věty 8, 10, 14, 17).

I.

Než přikročím k vlastnímu výkladu, uvedu ještě některé základní poznatky z theorie symetrických involucí pátého stupně.

*) Polohu hlavních bodů symetrické involuce prvního druhu nazval prof. Bydžovský první charakteristickou polohou, skupinu hlavních bodů symetrické involuce druhého druhu druhou charakteristickou polohou.

V involuci pátého stupně odpovídá síti přímek v rovině síť racionálních kvintik (homaloidních křivek), jejichž basi tvoří šest pevných dvojnásobných bodů (z nichž žádné tři neleží v přímce), které jsou hlavními body symetrické involuce. Těchto šest bodů, označíme je číslicemi *1, 2, 3, 4, 5, 6,* neurčuje jedinou kuželosečku, můžeme proto jimi proložit celkem šest kuželoseček k_i ($i = 1, 2, \ldots, 6$), kde k_i značí kuželosečku neprocházející bodem i. Kuželosečky k_i jsou hlavní kuželosečky symetrické involuce.

Hlavní body symetrické involuce pátého stupně jsou dvojího druhu:

1. Hlavní bod prvního druhu i leží na hlavní kuželosečce k_j ($i \neq j = 1, \ldots, 6$), která mu v symetrické involuci odpovídá. Říkáme, že hlavní body i, j tvoří *dvojici hlavních bodů prvního druhu.*

2. Hlavní bod druhého druhu i neleží na hlavní kuželosečce k_i, která mu odpovídá v symetrické involuci.

Podle druhu a polohy hlavních bodů rozeznáváme dva druhy symetrických involucí:

a) Involuce prvního druhu má tři páry hlavních bodů prvního druhu. Nutná a postačující podmínka, aby šest bodů v rovině tvořilo skupinu hlavních bodů této involuce je, aby ležely po dvou na třech přímkách procházejících týmž bodem M.

b) Involuce druhého druhu má čtyři hlavní body druhého druhu a pár hlavních bodů prvního druhu. Nutná a postačující podmínka, aby šest bodů v rovině tvořilo skupinu hlavních bodů involuce druhého druhu je, aby hlavní body prvního druhu byly polárně sdruženy vzhledem ke svazku kuželoseček určenému čtveřicí hlavních bodů druhého druhu. Involuce prvního druhu označíme J^{I}, involuce druhého druhu J^{II}.

Samodružné body involuce prvního druhu J^{I} vyplňují kubickou křivku c^3, která prochází všemi hlavními body a v každém z nich se dotýká té hlavní kuželosečky k_i, která mu odpovídá involucí. Vedle toho existuje ještě isolovaný samodružný bod M.

Involuce druhého druhu J^{II} má tyto samodružné body: všecky body spojnice hlavních bodů prvního druhu a diagonální vrcholy čtyrrohu určeného hlavními body druhého druhu.

II.

Předpokládejme, že body *1, 2, …, 6* jsou v první charakteristické poloze, t. j. že dvojice bodů *1, 2; 3, 4; 5, 6* tvoří páry hlavních bodů involuce J_1^{I}. Přímky *12, 34, 56* se protínají v jediném bodě M_1.

Poznámka 1. Mají-li být hlavní body involuce J_1^{I} současně v druhé charakteristické poloze, nemůžeme zvolit žádný z párů hlavních bodů této involuce za hlavní body prvního druhu involuce J^{II}. Kdybychom tak učinili, byl by bod M_1 jedním samodružným bodem Desarguesovy involuce vyťaté svazkem kuželoseček s basí ve zbývajících čtyřech hlavních bodech J_1^{I} na spojnici zvoleného páru a nemohly by jimi být tyto body.

Za hlavní body prvního druhu involuce J^{II} zvolme body *3, 6*. Složená kuželosečka *45, 12* svazku určeného body *1, 2, 4, 5* musí protnout přímku *36* v dvojici bodů, které harmonicky oddělují body *3, 6*. Z této podmínky a z vlastností úplného čtyrrohu určeného body *3, 6, 4, 5* plyne, že body *1, 2* leží na diagonální straně úplného čtyrrohu, protilehlé k diagonálnímu vrcholu $S_1 = 36 \cap 45$.

Věta 1: *Nutná podmínka, aby šest bodů v rovině bylo současně v první i v druhé charakteristické poloze je, aby dva z těchto šesti bodů ležely na některé straně diagonálního trojúhelníka úplného čtyrrohu zbývajících čtyř bodů.*

Tato podmínka není postačující, neboť zvolíme-li body *1, 2* libovolně na zmíněné diagonální straně, nemusí ještě složená kuželosečka *14,25* protínat přímku *36* v bodech, jež by harmonicky oddělovaly body *3, 6*. Je však nutná a postačující pro to, aby šest bodů tvořilo dvojím způsobem první charakteristickou polohu a to tak, že pár ležící na diagonální straně je pro obě polohy společný.

Abychom vyšetřili, jaké další podmínce musí vyhovovat body *1, 2*, zvolené dle věty 1, aby body *1, …, 6* byly v druhé charakteristické poloze, přiřadíme bodům *3, 4, 5, 6* souřadnice *3*(1, 1, 1), *4*(—1, 1, 1), *5*(1, —1, 1), *6*(1, 1, —1). Body *1, 2* leží na jedné ze souřadných os. Tuto osu zvolme za o_3, takže souřadnice bodů *1, 2* jsou $1(y_1, y_2, 0)$, $2(z_1, z_2, 0)$.

Aby body *3, 6* byly hlavními body involuce J^{II} prvního druhu, musí složená kuželosečka *14, 25* protínat *36* v bodech, které oddělují body *3, 6* harmonicky.

$$\begin{aligned} 14 &\equiv y_2x_1 - y_1x_2 + (y_1 + y_2)\, x_3 = 0\,, \\ 25 &\equiv z_2x_1 - z_1x_2 - (z_1 + z_2)\, x_3 = 0\,. \end{aligned}$$

Vezmeme-li na přímce *36* body *3, 6* za základní, jsou parametry průsečíků $14 \cap 36$ vzhledem k těmto bodům $\mu = y_1$, $\lambda = y_2$ a parametry průsečíku $25 \cap 36$ $\bar{\mu} = z_2$, $\bar{\lambda} = z_1$. Aby tyto dva průsečíky oddělovaly body *3, 6* harmonicky, musí platit

$$z_2 = y_1\,, \quad z_1 = -y_2\,. \tag{1}$$

Jestliže souřadnice bodů *1, 2* vyhovují podmínce (1), dá se snadno ukázat, že současně body *4, 5* jsou samodružnými body Desarguesovy involuce, vyťaté na jejich spojnici svazkem kuželoseček s basí v bodech *1, 2, 3, 6*. Body *1, …, 6* tvoří proto skupinu hlavních bodů dvou různých involucí druhého druhu $J_1^{\mathrm{II}}, J_2^{\mathrm{II}}$. J_1^{II} má body *3, 6* a J_2^{II} body *4, 5* za hlavní body prvního druhu.

Věta 2: *Nutná a postačující podmínka, aby body 1, …, 6 byly současně v první i v druhé charakteristické poloze je, aby souřadnice bodů* $1(y_1, y_2, y_3)$, $2(z_1, z_2, z_3)$ *při uvedené volbě systému souřadnic splňovaly rovnice*

$$z_i = -y_j\,, \; z_j = y_i, \; z_l = y_l = 0 \;\; (i \neq j \neq l \text{ probíhají čísla } 1, 2, 3)\,. \tag{2}$$

Je-li tato podmínka splněna, jsou body 1, ..., 6 v první i v druhé charakteristické poloze dvěma různými způsoby.

Poznámka 2. Rovnice (2) říkají, že bod *1*, resp. *2* můžeme na diagonální straně úplného čtyrrohu *3, 4, 5, 6* protější k diagonálnímu vrcholu S_1 volit zcela libovolně. Dá se proto očekávat, omezíme-li volbu bodu *1*, resp. *2* další podmínkou, že body *1*, ..., *6* budou v první i v druhé charakteristické poloze více než dvěma různými způsoby. Vyšetření této možnosti provedeme v dalším.

III. Grupa $\mathfrak{G}_8$

Mají-li body *1*, ..., *6* polohu uvedenou ve větě 2, tvoří skupinu hlavních bodů těchto symetrických involucí

$$\begin{aligned} &J_1^{\mathrm{I}}\ 12, 34, 56\,, \quad J_1^{\mathrm{II}}\ 36, 1245\,, \\ &J_2^{\mathrm{I}}\ 12, 35, 46\,, \quad J_2^{\mathrm{II}}\ 45, 1236\,. \end{aligned}$$

Skládáním involucí po dvou obdržíme kolineace, neboť takto složené transformace přiřazují přímkám opět přímky.

a) Složením dvou involucí téhož druhu dostaneme středovou involutorní kolineaci H_1. Neboť přímky *36* a *45* si odpovídají v obou involucích J_1^{I} i J_2^{I} navzájem, jsou proto obě samodružné pro H_1 a jejich průsečík S_1 je samodružný pro všechny tři transformace. Přímky *34*, *56* jsou samodružné pro J_1^{I} a odpovídají si navzájem v J_2^{I}, a tedy i v H_1. Jejich průsečík M_1, který leží na *12* je samodružný pro $J_1^{\mathrm{I}}, J_2^{\mathrm{I}}$, i H_1. Totéž platí pro bod M_2, průsečík přímek *12*, *35*, *46*. Bodu *1* odpovídá v J_1^{I} kuželosečka k_2 a té v J_2^{I} bod *1*. Je to tedy další samodružný bod pro H_1. Kolineace H_1 má tři samodružné body na přímce *12*, jsou proto všechny body této přímky pro ni samodružné a H_1 je středovou kolineací s osou *12* a středem S_1. Tutéž středovou kolineaci H_1 obdržíme složením obou involucí druhého druhu, jak se snadno dokáže. Poněvadž involuce $J_1^{\mathrm{I}}, J_2^{\mathrm{I}}$ jsou záměnné, stejně jako involuce $J_1^{\mathrm{II}}, J_2^{\mathrm{II}}$ platí (podle práce [1], [2]):

$$J_1^{\mathrm{I}}J_2^{\mathrm{I}} = H_1 = J_2^{\mathrm{I}}J_1^{\mathrm{I}}\,, \quad J_1^{\mathrm{II}}J_2^{\mathrm{II}} = H_1 = J_2^{\mathrm{II}}J_1^{\mathrm{II}}\,.$$

b) Složením jedné involuce prvního druhu a jedné druhého druhu obdržíme dvě cyklické kolineace U_1, V_1 s periodou čtyři. V složené transformaci $U_1 = J_1^{\mathrm{I}}J_1^{\mathrm{II}}$ si totiž hlavní body odpovídají následujícím způsobem. Bodu *1* odpovídá v J_1^{I} kuželosečka k_2 a té v J_1^{II} bod *2*; odpovídá proto v U_1 bodu *1* bod *2*. Stejně zjistíme, že U_1 přiřazuje bodu *2* bod *1*, $4 \sim 5$, $5 \sim 3$, $6 \sim 5$. Zapíšeme-li odpovídání v cyklech, platí $(3465)(12)$. Má tedy U_1 jeden nepřímočarý čtyrbodový cyklus a tudíž podle známých vět o cyklických kolineacích, je U_1 cyklická s periodou čtyři. Jeden samodružný bod U_1 je S_1, neboť v U_1 odpovídá přímce *36* přímka *45* a obráceně, přímce *45* přímka *36*. Přímka *12* je samodružná jak v J_1^{I}, tak i v J_1^{II}; je proto samodružná i v U_1 a U_1 na ní indukuje involuci, jejíž dva páry jsou *1, 2* a I, I', kde $I = 45 \cap 12$ a $I' = 12 \cap 36$. Samodružné body této involuce S_{I} a S_{II} jsou další dva samodružné body kolineace $\mathbf{U}_1$. Kolineace $\mathbf{V}_1 = (\mathbf{U}_{\mathrm{I}})^3$ má tytéž samodružné body jako kolineace $\mathbf{U}_1$.

Jaké vztahy platí mezi jednotlivými transformacemi, ukazuje nejlépe tato tabulka:

$\mathbf{E}$	J_1^{I}	J_2^{I}	J_1^{II}	J_2^{II}	$\mathbf{H}_1$	$\mathbf{U}_1$	$\mathbf{V}_1$
J_1^{I}	$\mathbf{E}$	$\mathbf{H}_1$	$\mathbf{U}_1$	$\mathbf{V}_1$	J_2^{I}	J_1^{II}	J_2^{II}
J_2^{I}	$\mathbf{H}_1$	$\mathbf{E}$	$\mathbf{V}_1$	$\mathbf{U}_1$	J_1^{I}	J_2^{II}	J_1^{II}
J_1^{II}	$\mathbf{V}_1$	$\mathbf{U}_1$	$\mathbf{E}$	$\mathbf{H}_1$	J_2^{II}	J_2^{I}	J_1^{I}
J_2^{II}	$\mathbf{U}_1$	$\mathbf{V}_1$	$\mathbf{H}_1$	$\mathbf{E}$	J_1^{II}	J_1^{I}	J_2^{I}
$\mathbf{H}_1$	J_2^{I}	J_1^{I}	J_2^{II}	J_1^{II}	$\mathbf{E}$	$\mathbf{V}_1$	$\mathbf{U}_1$
$\mathbf{U}_1$	J_2^{II}	J_1^{II}	J_1^{I}	J_2^{I}	$\mathbf{V}_1$	$\mathbf{H}_1$	$\mathbf{E}$
$\mathbf{V}_1$	J_1^{II}	J_2^{II}	J_2^{I}	J_1^{I}	$\mathbf{U}_1$	$\mathbf{E}$	$\mathbf{H}_1$

Věta 3: *Involuce pátého stupně* $J_1^{\mathrm{I}}, J_2^{\mathrm{I}}, J_1^{\mathrm{II}}, J_2^{\mathrm{II}}$ *a kolineace* $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{V}_1$ *s identickou transformací* $\mathbf{E}$ *tvoří grupu rovinných transformací osmého řádu* $\mathfrak{G}_8$.

Grupa $\mathfrak{G}_8$ není Abelova, má však tři Abelovy podgrupy řádu čtyři:

$$\mathfrak{G}_4(J_1^{\mathrm{I}}, J_2^{\mathrm{I}}, \mathbf{H}_1, \mathbf{E}), \quad \mathfrak{G}_4'(J_1^{\mathrm{II}}, J_2^{\mathrm{II}}, \mathbf{H}_1, \mathbf{E}), \quad \mathfrak{G}_4''(\mathbf{H}_1, \mathbf{U}_1, \mathbf{V}_1, \mathbf{E}).$$

Kleinovy čtyřgrupy cyklická grupa

V dalším pod pojmem „*samodružný element pro grupu* $\mathfrak{G}$“ rozumíme element, který je samodružný pro všechny transformace této grupy. Pod pojmem „*invariantní křivka pro* $\mathfrak{G}$“ rozumíme křivku, která je invariantní vzhledem ke všem transformacím grupy $\mathfrak{G}$.

IV. Samodružné elementy pro grupu $\mathfrak{G}_8$.

Podgrupa $\mathfrak{G}_4$ má podle práce [2] jen tři samodružné body S_1, M_1 a $M_2 = $ $= 12 \cap 35$ a jedinou samodružnou přímku *12*.

Podgrupa $\mathfrak{G}_4'$ má podle práce [1] tři samodružné body I, I', S_1 a tři samodružné přímky *12, 36, 45*.

Z vlastností kolineací $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{V}_1$ plyne, že podgrupa $\mathfrak{G}_4''$ má samodružný bod S_1 a dva samodružné body S_{I} a S_{II} kolineací $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{V}_1$. Tři samodružné přímky jsou spojnice zmíněných samodružných bodů.

Věta 4: *Grupa* $\mathfrak{G}_8$ *má jediný samodružný bod* S_1 *a jedinou samodružnou přímku 12.*

V. Invariantní křivky pro grupu $\mathfrak{G}_8$.

Podgrupa $\mathfrak{G}_4$ má podle práce [2] celý svazek invariantních kuželoseček a to svazek s basí v bodech *3, 4, 5, 6*. Abychom ukázali, které kuželosečky tohoto svazku se reprodukují $\mathfrak{G}_8$, stačí určit ty kuželosečky ze zmíněného svazku, které jsou invariantní pro jednu z involucí J^{II}, třeba J_1^{II}, poněvadž $\mathfrak{G}_4$ je v $\mathfrak{G}_8$ indexu dvě. Aby se kuželosečka svazku *3, 4, 5, 6* reprodukovala involucí J_1^{II}, musí protínat přímku *12* v bodech, které harmonicky oddělují samodružné body I a I' involuce J_1^{II} na této přímce. Body I, I' jsou proto polárně sdružené pro hledanou invariantní kuželosečku, a poněvadž přímka *12* je polárou bodu S_1 pro všechny kuželosečky svazku *3, 4, 5, 6*, je přímka IS_1 polárou bodu I' naší invariantní kuželosečky.

Věta 5: *Existuje jediná kuželosečka invariantní vůči grupě* $\mathfrak{G}_8$. *Je to kuželosečka* k_{I} *jdoucí body 3, 4, 5, 6 s tečnami 3I, 4I', 5I', 6I v těchto bodech.*

Studium nerozložitelných kubik invariantních pro $\mathfrak{G}_8$ nevede ke kladnému výsledku. Vyšetřování neprovedeme, není na něm nic zajímavého.

Dříve než přikročíme ke studiu invariantních sextik pro $\mathfrak{G}_8$, definujme si nejprve pojem bodové osmice a uveďme několik pomocných vět.

Definice: *Osm bodů, které obdržíme, když na libovolný bod roviny* Q_1 *aplikujeme všechny transformace* $\mathfrak{G}_8$, *tvoří bodovou osmici* (Q).

Nechť bodu Q_1 odpovídají transformacemi $J_1^{\mathrm{I}}, J_2^{\mathrm{I}}, J_1^{\mathrm{II}}, J_2^{\mathrm{II}}, H_1, U_1, V_1$ postupně body $Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6, Q_7, Q_8$. Z grupových zákonů $\mathfrak{G}_8$ se snadno odvodí věta:

Věta 6: *Zvolíme-li za bod* Q_1 *samodružný bod* S_1 *grupy* $\mathfrak{G}_8$ *redukuje se osmice bodů* (Q) *na jediný bod, na dva body, je-li* Q_1 *samodružný bod jen jedné z podgrup* $\mathfrak{G}_4$, $\mathfrak{G}_4'$, $\mathfrak{G}_4''$ *(nebo bod 1, či 2), na čtyři body, je-li* Q_1 *samodružný bod pouze jedné z transformací grupy* $\mathfrak{G}_8$, *různé od* E.

Platí i věta obrácená.

Neredukovaná osmice (Q) nemůže ležet v přímce, neboť jenom přímka *12* je samodružná v $\mathfrak{G}_8$, a pro její body se osmice redukuje na čtveřici nebo na dvojici (podle věty 6). Leží na regulární kuželosečce tehdy a jen tehdy, zvolíme-li za bod osmice (Q) bod kuželosečky k_{I}, která je invariantní pro $\mathfrak{G}_8$. Poněvadž všechny kuželosečky svazku s basí v hlavních bodech *3, 4, 5, 6* jsou invariantní pro $\mathfrak{G}_4$, znamená to, že kuželosečka k_{II} tohoto svazku, obsahující bod Q_1, obsahuje ještě další tři body Q_2, Q_3, Q_6 osmice (Q). Této kuželosečce odpovídá však v ostatních transformacích $\mathfrak{G}_8$ kuželosečka téhož svazku k'_{II}, která prochází body Q_4, Q_5, Q_7, Q_8. Můžeme proto vyslovit větu:

Věta 7: *Každá neredukovaná osmice* (Q) *leží na dvojici kuželoseček svazku, který má basi v bodech 3, 4, 5, 6. Tato dvojice kuželoseček splyne v jedinou, zvolíme-li za bod osmice bod kuželosečky* k_{I}, *která je invariantní pro* $\mathfrak{G}_8$.

Pro lepší přehled důkazů uvádíme tabulku, jak sobě odpovídají spojnice hlavních bodů v jednotlivých transformacích $\mathfrak{G}_8$

	J_1^{I}	J_2^{I}	J_1^{II}	J_2^{II}	H_1	U_1	V_1
13	24	25	16	13	16	24	25
14	23	26	14	15	15	26	23
15	26	23	15	14	14	23	26
16	25	24	13	16	13	25	24
23	14	15	26	23	26	14	15
24	13	16	24	25	25	16	13
25	16	13	25	24	24	13	16
26	15	14	23	26	23	15	14
34	34	56	46	35	56	46	35
35	46	35	56	34	46	34	56
36	45	45	36	36	36	45	45
45	36	36	45	45	45	36	36
46	35	46	34	56	35	56	34
56	56	34	35	46	34	35	46

(3)

V dalších pomocných větách nebereme v úvahu hlavní body *1, ..., 6*.

Pomocná věta I: *Spojnice hlavních bodů jdoucí bodem M_1, resp. M_2, různé od 12, obsahují každá jediný bod, pro nějž se (Q) redukuje na čtveřici.*

Kubika samodružných bodů c_1^3 involuce J_1^{I}, resp. c_2^3 involuce J_2^{I} prochází hlavními body *1, ..., 6* a bodem M_2, resp. M_1 [3]. Protíná proto spojnice hlavních bodů jdoucí bodem M_1, resp. M_2 v jediném bodě, kdežto spojnice hlavních bodů jdoucí M_2, resp. M_1 již vůbec neprotíná. Samodružné body ostatních transformací $\mathfrak{G}_8$ na těchto přímkách již neleží.

Pomocná věta II: *Spojnice hlavních bodů neprocházející ani bodem M_1 ani bodem M_2 a různé od přímek samodružných bodů involucí J_1^{II} a J_2^{II} obsahují každá tři body, pro něž se (Q) redukuje na čtveřici. Dva z těchto bodů náleží téže čtveřici.*

Kubiky c_1^3 a c_2^3 se protínají v bodech *1, ..., 6*, S_1 a v bodech *1, 2* se dotýkají [2]. Protíná je proto uvažovaná spojnice hlavních bodů ve dvou různých bodech, které náleží téže čtveřici (podle [3]). Každá z těchto přímek je stranou čtyrrohu *1, 2, 4, 5*, resp. čtyrrohu *1, 2, 3, 6*, obsahuje proto isolovaný samodružný bod $II = 14 \cap 25$, nebo $III = 24 \cap 15$, resp. $II' = 13 \cap 26$, nebo $III' = 16 \cap 23$ involuce J_1^{II}, resp. involuce J_2^{II}. Body II, II', III, III' náleží téže čtveřici, jak plyne z (3).

Pomocná věta III: *Kuželosečka k_{I} obsahuje tři redukované osmice, a to jednu dvojici $S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}$ a dvě čtveřice II, III, II', III' a C_1, C_2, C_1', C_2', kde C_1, C_2, resp. C_1', C_2' jsou průsečíky k_{I} s kubikou c_1^3, resp. c_2^3.*

Kuželosečka k_{I}, poněvadž je pro $\mathfrak{G}_8$ invariantní, protíná přímku *12* v redukované dvojici. Na přímce *12* leží tři dvojice, totiž I, I'; M_1, M_2; $S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}$. Nemůže to být dvojice I, I', ani M_1, M_2, zbývá proto jen dvojice $S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}$. Bod S_1 a přímka *12* jsou pól a polára pro k_{I}, proto tečny k_{I} v bodech $S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}$ jsou přímky

S_1S_{I}, S_1S_{II}. Spojnice hlavních bodů z pomocné věty II protínají k_{I} v jednom hlavním bodě a ještě v dalším bodě, takovém, že body mu odpovídající v transformacích $\mathfrak{G}_8$ neleží na téže přímce. Tuto podmínku splňují pouze isolované samodružné body involucí J_1^{II}, J_2^{II} totiž II, III, II', III', které tedy všechny leží na invariantní k_{I}. Kubika c_1^3, resp. c_2^3 protíná k_{I} vedle hlavních bodů ještě v bodech C_1, C_2, resp. C_1', C_2'. Vzhledem k invariantnosti k_{I} náleží body C_1, C_2, C_1', C_2' téže čtveřici.

Uvažujme nejprve podgrupu $\mathfrak{G}_4'$ grupy $\mathfrak{G}_8$. Tato podgrupa je téhož typu jako grupa prostudovaná v práci [1] prof. Bydžovským. V této práci je uvedena věta: Každá sextika s dvojnásobnými body $1, \ldots, 6$ procházející dvěma libovolnými dvojicemi jedné involuce J_1^{II} a stejně tak dvěma dvojicemi (různými od prvních dvou), které jim odpovídají v J_2^{II}, je invariantní pro $\mathfrak{G}_4$. (Připomínáme čtenáři, že sextika procházející šesti hlavními body přechází involucemi $J_1^{\mathrm{I}}, J_1^{\mathrm{II}}, J_2^{\mathrm{I}}, J_2^{\mathrm{II}}$ opět v sextiku.)

Nechť sextika s^6 mající dvojnásobné body $1, \ldots, 6$ prochází neredukovanou osmicí (Q). Poněvadž body (Q) tvoří čtyři dvojice (Q_1, Q_4), (Q_2, Q_7), (Q_3, Q_8), (Q_5, Q_6) pro J_1^{II} a současně čtyři dvojice (Q_1, Q_5), (Q_2, Q_8), (Q_3, Q_7), (Q_4, Q_6) pro J_2^{II} (dle (3)), lze mezi nimi vybrat vždy dvě dvojice jedné involuce tak, aby jim odpovídající dvojice druhé involuce grupy $\mathfrak{G}_4'$ byly různé od prvních dvou. Sextika s^6 splňuje předpoklady citované věty, a proto je invariantní pro všechny transformace $\mathfrak{G}_4'$. Invariantnost s^6 vůči $\mathfrak{G}_8$ bude dokázána, ukážeme-li, že s^6 je invariantní alespoň pro jednu involuci J^{I}. Kubika samodružných bodů c_i^3 involuce J_i^{I} má s s^6 společných šest hlavních bodů $1, \ldots, 6$ a ještě dalších šest bodů, kterými musí procházet $\bar{s}^6$ odpovídající s^6 v J_i^{I}. Tyto body jsou různé od bodů neredukované (Q), neboť pro ně se osmice redukuje na čtveřici. Křivky s^6 a $\bar{s}^6$ se protínají v hlavních bodech $1, \ldots, 6$, které jsou pro obě dvojnásobné, v bodech osmice (Q) a v šesti bodech c_i^3, což dává dohromady 38 průsečíků t. j. $\bar{s}^6 = s^6$.

Věta 8: *Všechny sextiky určené dvojnásobnými body $1, \ldots, 6$ a procházející neredukovanou osmicí (Q), jsou invariantní pro $\mathfrak{G}_8$.*

Invariantní sextiky s^6 určené dvojnásobnými body $1, \ldots, 6$ a jednoduchými body $Q_1, \ldots, Q_8$ určité neredukované (Q) tvoří svazek s basí v těchto bodech, které dávají dohromady $6 . 4 + 8 = 32$ průsečíků. Zbývá určit ještě další čtyři body base. Všechny křivky s^6 protínají k_{I} v bodech $3, 4, 5, 6$, které dávají osm průsečíků a v dalších čtyřech bodech, které tvoří redukovanou osmici, poněvadž s^6 jsou invariantní. Takových bodů je na k_{I} pouze konečný počet (dle pomocné věty III), musíme proto mezi nimi hledat body base svazku invariantních sextik s^6. Současně však mají křivky s^6 všecky se samodružnou přímkou 12 společnou, kromě hlavních bodů $1, 2$, tutéž redukovanou dvojici bodů, která také patří basi svazku. Poněvadž svazek sextik může mít pouze 36 bodů base, dotýkají se všecky s^6 kuželosečky k_{I} v bodech S_{I}, S_{II}, v nichž mají společné tečny S_1S_{I}, S_1S_{II}, které si odpovídají v $\mathfrak{G}_8$.

Věta 9: *Invariantní sextiky určené dvojnásobnými body 1, ..., 6 a jednoduchými body určité neredukované (Q), tvoří svazek sextik, které mají v bodech S_{I}, S_{II} společné tečny S_1S_{I}, $S_1 S_{\mathrm{II}}$.*

Aby tyto sextiky byly rozložitelné, musely by se rozpadat na invariantní křivky, nebo na křivky, které se transformacemi $\mathfrak{G}_8$ vyměňují, stupně nižšího než šestého. Jsou možné tyto případy:

a) Přímka *12* a kvintika s dvojnásobnými body *3, 4, 5, 6* a jednoduchými *1, 2*, $Q_1, \ldots, Q_8$. Neredukovaná osmice nemůže ležet na přímce *12*, a proto ji uvažovaná kvintika protíná kromě bodů *1, 2* ještě ve třech bodech (nikoli nutně vesměs různých od bodů *1, 2*), které se reprodukují $\mathfrak{G}_8$. Z těchto tří bodů by dva v každém případě tvořily dvojici a zbývající bod by byl samodružný pro $\mathfrak{G}_8$. Takový bod však na přímce *12* neexistuje, a proto tento případ nemůže nastat.

b) Kvartika q_i z invariantního svazku kvartik s basí v bodech *1, 2* dvojnásobných, *3, 4, 5, 6, II, III, II', III'* jednoduchých a kuželosečka k_{I}. Kvartika q_i má s kuželosečkou k_{I} společné body *3, 4, 5, 6, II, III, II', III'*. Podmínku, aby kvartika q_i procházela danou neredukovanou osmicí, splňuje jediná kvartika svazku. (O osmici bodů tu předpokládáme, že neleží na k_{I}, kdyby tomu tak bylo, obsahovala by kvartika q_i kuželosečku k_{I} jako součást.)

c) Kvartika q_i a dvě přímky. Aby tato rozložitelná sextika patřila do svazku invariantních sextik, musely by dvě přímky, které by byly jejími součástmi, obsahovat body *3, 4, 5, 6*, S_{I}, S_{II}, což není možné.

d) Dvě kubiky. Poněvadž neexistuje dle kapitoly V kubika invariantní pro $\mathfrak{G}_8$, musely by to být kubiky, které se transformacemi $\mathfrak{G}_8$ vyměňují. Aby kubika přecházela opět v kubiku symetrickými involucemi pátého stupně, musí obsahovat 1. jeden hlavní bod jako dvojnásobný a čtyři hlavní body jako jednoduché, 2. všechny hlavní body jako jednoduché. Případ 1. nepřichází pro naše vyšetřování v úvahu, neboť byl-li by jeden z hlavních bodů *3, 4, 5, 6* dvojnásobným bodem, musely by jimi být i všechny ostatní z těchto bodů ($\boldsymbol{U}_1$(*3465*) $\boldsymbol{V}_1$(*3564*) $\boldsymbol{H}_1$(*36*) (*45*)). Ale ani body *1, 2*, které si navzájem odpovídají, nevyhovují. Na př. v $\boldsymbol{J}_1^{\mathrm{II}}$ odpovídá kubice, mající bod *1* za dvojnásobný a bod S_{I}, resp. S_{II} za jednoduchý, kubika, pro níž je bod *1* opět dvojnásobný, ale která prochází bodem S_{II}, resp. S_{I}. Musela by proto tato kubika obsahovat jak bod S_{I}, tak bod S_{II}, což není možné. Zbývá proto vyšetřit pouze případ 2. V tomto případě by jedna sextika obsahovala body *1, ..., 6* a v bodě S_{I} by se dotýkala přímky S_1S_{I} a druhá by procházela body *1, ..., 6* a v bodě S_{II} by se dotýkala přímek S_1S_{II}. Takto určené kubiky by se však protínaly ještě ve třech bodech, které by se musely grupou $\mathfrak{G}_8$ reprodukovat. To je možné jen tehdy, kdyby jeden z těchto bodů byl bod S_1 a druhé dva body body redukované dvojice. Redukované dvojice leží však pouze na přímce *12*, a proto přímka *12* by byla součástí obou kubik.

e) Tři kuželosečky, a to kuželosečka k_{I} a dvě kuželosečky svazku s basí v bodech *3, 4, 5, 6,* které se jediné vyměňují grupou $\mathfrak{G}_8$. Tato sextika však nemá body *1, 2* za dvojnásobné.

f) Dvě kuželosečky a dvě přímky. Tento případ splňují pouze dvě kuželosečky svazku s basí v bodech *3, 4, 5, 6*, které obsahují, dle věty 7, neredukovanou osmici, a přímka *12* dvakrát počítaná.

g) Kuželosečka k_{I} a čtyři přímky. Pro čtveřici přímek existují dle (3) tyto možnosti: buď přímky *13, 24, 25, 16,* nebo *23, 14, 26, 15,* resp. *36, 45* a přímka *12* dvakrát počítaná. Ovšem, tyto případy nastanou pouze tehdy, leží-li body neredukované osmice na přímkách spojujících hlavní body.

h) Šest přímek. Tomuto případu vyhovuje pouze přímka *12* dvakrát počítaná a některá ze čtveřic přímek dle (3) reprodukujících se grupou $\mathfrak{G}_8$.

Z těchto úvah plyne: *Ve svazku invariantních sextik uvažovaném ve větě 9, když body neredukované osmice (Q) neleží ani na k_{I}, ani na spojnicích hlavních bodů, existují dvě rozložitelné sextiky. Sextika složená z kvartiky q_i obsahující neredukovanou osmici a kuželosečky k_{I} a sextika obsahující jako součásti dvě kuželosečky svazku s basí v bodech 3, 4, 5, 6, které procházejí body neredukované osmice a přímku 12 dvakrát počítanou.*

Má-li mít sextika invariantní pro $\mathfrak{G}_8$ vedle hlavních bodů ještě další dvojnásobné body, musí mít všechny ostatní body příslušné osmice (Q) za dvojnásobné. To je možné jen pro ty body, pro něž se osmice redukuje, požadujeme-li, aby sextika byla nerozložitelná.

Sextiky se sedmi dvojnásobnými body.

Za sedmý dvojnásobný bod invariantní sextiky můžeme vzít pouze bod S_1, který je jediným samodružným bodem pro $\mathfrak{G}_8$. Taková sextika protíná přímku *12* v redukované dvojici bodů. Poněvadž na této přímce (dle věty 6) leží tři takové dvojice $S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}; I, I'; M_1, M_2$, existují celkem tři možnosti:

a) $S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}$ — uvažovaná sextika potom náleží do systému sextik s dvojnásobnými body *1, ..., 6*, dotýká se proto v bodech $S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}$ přímek S_1S_{I}, S_1S_{II}. Invariantní sextiky s_i^6 svazku určeného dvojnásobnými body *1, ..., 6* a neredukovanou (Q) protínají přímku *36* samodružných bodů involuce J_1^{II}, resp. přímku *45* samodružných bodů involuce J_2^{II}, kromě v hlavních bodech ještě ve dvou bodech A_{i1}, A'_{i1}, resp. A_{i2}, A'_{i2}, které tvoří páry involuce $\mathbf{H}_1$ na těchto přímkách. Poněvadž s^6 je invariantní pro $\mathfrak{G}_8$ a bodům přímky *36* odpovídají v $\mathfrak{G}_8$ jednak body téže přímky a jednak přímky *45* (dle (3)), náleží body A_{i1}, A'_{i1}, A_{i2}, A'_{i2} téže čtveřici. Požadujeme-li, aby s^6 uvažovaného svazku procházela bodem S_1, je tento bod pro obě přímky *36* a *45* dvojnásobným průsečíkem s s^6, tudíž jejím dalším singulárním bodem.

Věta 10: *V každém svazku sextik určeném dvojnásobnými body 1, ..., 6 a jednoduchými body neredukované osmice (Q) existuje jediná sextika se sedmým dvojnásobným bodem S_1, totiž sextika svazku, určená tímto bodem.*

b) I, I' — v tomto případě se sextika s^6 rozpadá na přímky *36*, *45* a kvartiku q^4 s dvojnásobnými body *1*, *2* a jednoduchými *3*, *4*, *5*, *6*. Aby tato kvartika byla invariantní pro $\mathfrak{G}_8$, musí protínat spojnice hlavních bodů pomocné věty II kromě hlavních bodů, z nichž jeden je dvojnásobný a druhý jednoduchý, ještě v dalším bodě takovém, že body jemu odpovídající v transformacích $\mathfrak{G}_8$ již neleží na této přímce. Z (3) a pomocné věty II plyne, že tento bod je isolovaným samodružným bodem J_i^{II}. Invariantní kvartika q^4 obsahuje proto body II, II', III, III'. Dvojnásobnými body *1*, *2* a jednoduchými *3*, *4*, *5*, *6*, II, II', III, III', je určen svazek kvartik q_i^4, které jsou všechny invariantní pro $\mathfrak{G}_8$, neboť svazek obsahuje tři invariantní kvartiky

$$q_1^4 = 14, 15, 23, 26 \qquad q_2^4 = 25, 24, 16, 13 \qquad q_3^4 = k_I, 12, 12\,.$$

Věta 11: *Invariantní sextiky grupy* $\mathfrak{G}_8$ *se sedmi dvojnásobnými body* S_1, *1*, ..., *6 protínající přímku 12 v bodech* I, I' *se skládají z přímek 36, 45 a invariantní kvartiky* q_i^4 *svazku určeného dvojnásobnými body 1, 2 a jednoduchými 3, 4, 5, 6,* II, III, II', III'.

c) M_1, M_2 — má-li být sextika takto určená invariantní pro $\mathfrak{G}_8$, musí protínat spojnice hlavních bodů jdoucí body M_1, resp. M_2, kromě v těchto a v hlavních bodech, ještě v dalším bodě, pro nějž se osmice redukuje na čtveřici (dle (3)). Takový bod je však na této přímce podle pomocné věty I, právě jeden. Invariantní sextika obsahuje proto body $P_1 = c_1^3 \cap 34$, $P_1' = c_1^3 \cap 56$, $P_2 = c_2^3 \cap 46$, $P_2' = c_2^3 \cap 35$. Invariantní kuželosečku k_I protíná v hlavních bodech *3*, *4*, *5*, *6*, které dávají osm průsečíků a ještě v dalších čtyřech bodech, které náleží téže redukované osmici. Nemohou to být body II, III, II', III', neboť na př. hlavní přímka *15* by měla se sextikou společné dvojnásobné body *1*, *5*, jednoduchý III a ještě jeden bod, jemuž odpovídající v ostatních transformacích $\mathfrak{G}_8$ by už nesměl ležet na téže přímce. Takový bod však již dle tabulky (3) a pomocné věty II neexistuje. Má proto invariantní sextika s kuželosečkou k_I společné body C_1, C_1', C_2, C_2' (dle pomocné věty III). Uvažovaná sextika však protíná každou z kubik c_1^3 a c_2^3 v devatenácti bodech a tudíž se na ně rozpadá.

Věta 12: *Existuje jediná invariantní sextika se sedmi dvojnásobnými body 1, ..., 6,* S_1, *která protíná přímku 12 v bodech* M_1, M_2. *Tato sextika se rozpadá na kubiky* c_1^3 *a* c_2^3.

Tím jsou všechny sextiky se sedmi dvojnásobnými body vyčerpány. Studium hypereliptických invariantních sextik a invariantních sextik rodu jedna nepřináší žádných zajímavostí. Snadno se dá dokázat věta.

Věta 13: *V grupě* $\mathfrak{G}_8$ *neexistují nerozložitelné invariantní sextiky rodu dvě a rodu jedna. Hypereliptické sextiky se rozpadají na dvojnásob počítanou přímku 12 a dvě kuželosečky* k_{II}, k_{II}' *svazku 3, 4, 5, 6, které si odpovídají ve všech trans-*

formacích $\mathfrak{G}_8$. Invariantní sextiky rodu jedna jsou složeny z dvojnásob počítané přímky 12, přímek 36 a 45 a invariantní kuželosečky k_I.

Racionální sextiky.

Požadujeme-li, aby racionální sextika byla invariantní pro $\mathfrak{G}_8$, musí její dvojnásobné body být hlavní body *1*, …, *6* a další čtyři body T_1, T_2, T_3, T_4, které náleží téže čtveřici reprodukující se grupou $\mathfrak{G}_8$. Osmice se redukuje na čtveřici, zvolíme-li za bod T_i samodružný bod (různý od bodů $S_1, M_1, M_2, I, I', S_{II}, S_I$) jedné z involucí $\mathfrak{G}_8$. Snadno se ukáže, že neexistují jednoduché invariantní racionální sextiky s dvojnásobnými body v bodech *1*, …, *6* a v bodech čtveřice samodružných bodů involucí J_1^{II}, J_2^{II}, H_1.

Jinak je tomu pro involuce prvního druhu.

Je-li bod T_1 samodružným bodem involuce J_1^I, t. j. bod kubické křivky c_1^3 (ovšem různý od M_2, S_1), odpovídá mu v J_2^I bod $T_2 \neq T_1$ ležící opět na c_1^3. V J_1^{II}, J_2^{II} odpovídá c_1^3 křivka c_2^3 a proto body T_3, T_4 odpovídající v těchto involucích bodu T_1, leží na této křivce a jsou samodružné pro J_2^I. c_1^3 i c_2^3 jsou invariantní pro H_1 a body $T_1, \ldots, T_4$ tvoří pro ni páry $(T_1, T_2), (T_3, T_4)$. Přímky T_1T_2, T_3T_4 procházejí bodem S_1 a odpovídají si navzájem kolineací U_1.

O poloze dvojnásobných bodů racionální sextiky, jichž jak známo je deset, odvodil prof. Bydžovský v [4] větu: Sestrojme kterékoliv dvě křivky kubické, které obsahují dohromady všech těchto deset bodů: osm z nich mají společných, mimo to každá obsahuje jeden další bod jako devátý. Tečna v každém z těchto dvou bodů k příslušné kubice, protne ji v témže bodě, ve kterém ji protne tečna vedená v devátém průsečíku obou křivek.

Zkusíme, zda skupina bodů *1*, …, *6*, T_1, T_2, T_3, T_4 vyhovuje podmínce uvedené v této větě. Body *1*, …, *6*, T_1, T_2, T_3 a *1*, …, *6*, T_1, T_2, T_4 proložíme kubické křivky c_3^3 a c_4^3. Obě tyto kubiky patří do svazku kubik, určeného kubikou c_1^3 samodružných bodů involuce J_1^I a kubikou složenou z kuželosečky k_{III} určené body *3, 4, 5, 6*, T_1, která obsahuje také bod T_2 a přímky *12*. Tyto dvě kubiky se protínají ještě v bodě M_2 a stejně tak i křivky c_3^3 a c_4^3, které jsou invariantní pro J_2^I dle práce [2], [3] tudíž obecně eliptické. Označíme-li eliptické parametry bodů *1*, …, *6*, T_1, T_2, T_3, M_2 na křivce c_3^3 postupně písmeny $a_1, \ldots, a_6, t_1, t_2, t_3, m$ a eliptický parametr tečnového bodu k M_2 písmenem t, platí:

$$2m + t \equiv 0\,, \quad a_3 + a_5 + m \equiv 0\,, \quad a_4 + a_6 + m \equiv 0\,. \tag{4}$$

Protože c_3^3 je invariantní a bod T_3 samodružný pro J_2^I, existuje kuželosečka svazku *3, 4, 5, 6* invariantní pro J_2^I, která se dotýká v bodě T_3 kubiky c_3^3. Platí proto

$$a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + 2t_3 \equiv 0\,. \tag{5}$$

Dosazením do (5) z (4) dostáváme

$$t + 2t_3 \equiv 0\,.$$

Čili kubika c_3^3 má týž tečnový bod pro M_2 jako pro bod T_3. Stejným způsobem se dokáže, že i kubika c_4^3 má pro body M_2 a T_4 týž tečnový bod.

Věta 14: *Racionální sextiky s dvojnásobnými body 1, …, 6* T_1, T_2, T_3, T_4, *kde body* T_1, T_2 *jsou průsečíky kubiky* c_1^3 *a libovolné přímky (která neprochází žádným z hlavních bodů) jdoucí bodem* S_1, *a body* T_3, T_4, *průsečíky kubiky* c_2^3 *a přímky, která odpovídá přímce* T_1T_2 *v kolineaci* U_1, *jsou invariantní pro* $\mathfrak{G}_8$.

Podrobným rozborem případů, kdy by se racionální sextika věty 14 mohla rozpadnout, prováděným stejným způsobem jako při zkoumání rozložitelnosti invariantních sextik se šesti dvojnásobnými body, dojdeme k výsledku.

Neleží-li body čtveřice T_1, T_2, T_3, T_4 *na kuželosečce* k_{I}, *nebo na spojnicích hlavních bodů, jsou racionální sextiky věty 14 nerozložitelné.*

Poněvadž pro samodružné body kolineace U_1 a V_1 se osmice redukuje na menší počet, než na čtyři body, jsou probranými případy vyčerpány všechny invariantní racionální sextiky grupy $\mathfrak{G}_8$.

VI. Specialisace podmínek kapitoly II.

V dalším předpokládáme, že body *1*, …, *6* mají polohu uvedenou ve větě 2.

Vyšetříme nyní (viz poznámku 2), zda body *1*, …, *6* nemohou být při speciální volbě bodů *1* a *2* na diagonální straně čtyrrohu *3, 4, 5, 6* v první i v druhé charakteristické poloze více než dvěma různými způsoby současně.

Poznámka 3. Body *1*, …, *6* nemohou být v další první charakteristické poloze tím způsobem, aby involuce J_3^{I} mající je za hlavní body, měla s involucemi J_1^{I} a J_2^{I} společný pár *1, 2*. V tom případě by se diagonální trojúhelník čtyrrohu *3, 4, 5, 6* musel redukovat na přímku, což nenastane, poněvadž žádné tři z bodů *3, 4, 5, 6* neleží podle předpokladu v přímce.

Stejně tak nemůžeme za pár hlavních bodů involuce J_3^{I} volit body *3, 6* nebo *4, 5* (viz poznámku 1). Zbývají proto pro seskupení jejich hlavních bodů do párů tyto možnosti:

$$\begin{array}{llll} 13,\ 24,\ 56 & 14,\ 35,\ 26 & 15,\ 23,\ 46 & 16,\ 25,\ 34 \\ 13,\ 25,\ 46 & 14,\ 23,\ 46 & 15,\ 26,\ 34 & 16,\ 24,\ 35 \end{array} \tag{6}$$

Vyberme jednu z nich, t. j. předpokládejme, že body *1*, …, *6* jsou v další první charakteristické poloze tím způsobem, aby *13, 24, 56* byly páry hlavních bodů involuce J_3^{I}. Potom se musí přímky

$$\begin{aligned} 13 &\equiv y_2x_1 - y_1x_2 + (y_1 - y_2)\,x_3 = 0 \\ 24 &\equiv y_1x_1 + y_2x_2 + (y_1 - y_2)\,x_3 = 0 \\ 56 &\equiv x_2 + x_3 = 0 \end{aligned}$$

protínat v jednom bodě M_3. Nutná a postačující podmínka pro to je, aby souřadnice bodů *1, 2* splňovaly rovnici

$$y_1^2 + y_2^2 - y_1y_2 = 0\,. \tag{7}$$

Přímkám *13, 24, 56* odpovídají postupně (podle tabulky (3)) kolineací H_1 přímky *16, 25, 34*, v cyklické kolineaci $V_1 = J_2^{\mathrm{I}} J_1^{\mathrm{II}}$ přímky *25, 13, 46* a v cyklické kolineaci $U_1 = J_1^{\mathrm{I}} J_1^{\mathrm{II}}$ přímky *24, 16, 35*. Poněvadž *24, 13, 56* procházejí jediným bodem M_3, protínají se také přímky *16, 25, 34*, resp. *25, 13, 46*, resp. *24, 16, 35* v jediném bodě M_4, resp. M_5, resp. M_6. To však znamená, že body *1*, ..., *6*, je-li splněna podmínka (7), jsou ještě třemi dalšími různými způsoby v první charakteristické poloze, čili, že existují ještě tři involuce prvního druhu

$$J_4^{\mathrm{I}}\ 16, 25, 34\,, \quad J_5^{\mathrm{I}}\ 13, 25, 46\,, \quad J_6^{\mathrm{I}}\ 16, 24, 35\,.$$

Poznámka 4. Další involuce prvního druhu s týmiž hlavními body neexistuje. Její hlavní body by musely tvořit skupinu jedné z dalších možností (6). Potom by ale nutně tři involuce prvního druhu měly společný pár, což není podle poznámky 3 možné.

Složením dvou involucí prvního druhu se společným párem obdržíme středovou kolineaci H (obdobně jako v $\mathfrak{S}_8$). Existuje celkem devět případů:

Úvahy v dalším provedené jsou v podstatě téhož druhu jako úvahy v předchozích kapitolách a proto uvádíme většinou jen výsledky.

$$
\begin{aligned}
H_1 &= J_1^{\mathrm{I}} J_2^{\mathrm{I}} \text{ s osou } o_1 = 12 \text{ a středem } S_1 = 36 \cap 45\\
H_2 &= J_1^{\mathrm{I}} J_3^{\mathrm{I}} \text{ s osou } o_2 = 56 \text{ a středem } S_2 = 23 \cap 14\\
H_3 &= J_1^{\mathrm{I}} J_4^{\mathrm{I}} \text{ s osou } o_3 = 34 \text{ a středem } S_3 = 26 \cap 15\\
H_4 &= J_2^{\mathrm{I}} J_5^{\mathrm{I}} \text{ s osou } o_4 = 46 \text{ a středem } S_4 = 23 \cap 15\\
H_5 &= J_2^{\mathrm{I}} J_6^{\mathrm{I}} \text{ s osou } o_5 = 35 \text{ a středem } S_5 = 26 \cap 14\\
H_6 &= J_3^{\mathrm{I}} J_5^{\mathrm{I}} \text{ s osou } o_6 = 13 \text{ a středem } S_6 = 26 \cap 54\\
H_7 &= J_3^{\mathrm{I}} J_6^{\mathrm{I}} \text{ s osou } o_7 = 24 \text{ a středem } S_7 = 36 \cap 15\\
H_8 &= J_4^{\mathrm{I}} J_5^{\mathrm{I}} \text{ s osou } o_8 = 25 \text{ a středem } S_8 = 36 \cap 14\\
H_9 &= J_4^{\mathrm{I}} J_6^{\mathrm{I}} \text{ s osou } o_9 = 16 \text{ a středem } S_9 = 23 \cap 45
\end{aligned}
$$

Hlavní kuželosečka k_1 je invariantní pro H_1, H_6 i H_9, poněvadž bod *1* je pro tyto kolineace samodružný a body *2, 3, 4, 5, 6* si odpovídají navzájem. Bodu *4* odpovídá ve všech těchto kolineacích bod *5*. To znamená, že tečny k_1 v bodech *4, 5* se protínají v průsečíku os kolineací o_1, o_6, o_9, t. j. v bodě *1*. Je tedy přímka $p_1 \equiv 45$ polárou bodu *1* vzhledem ke k_1. Obdobně se dokáže, že poláry bodů *2, 3, 4, 5, 6* vzhledem ke kuželosečkám k_2, k_3, k_4, k_5, k_6 jsou přímky *36, 26, 15, 14, 23*. Označme je po řadě p_2, p_3, p_4, p_5, p_6. Přímka p_i je tedy polárou hlavního bodu i vzhledem ke kuželosečce k_i. Z toho plyne, že body *2, 3*, resp. *2, 6*, resp. *1, 4*, resp. *1, 5* jsou samodružnými body Desarguesovy involuce vyťaté na jejich spojnici svazkem kuželoseček s basí v bodech *1, 4, 5, 6*, resp. *1, 3, 4, 5*, resp. *2, 3, 5, 6*, resp. *2, 3, 4, 6*, t. j. že body *1*, ..., *6* jsou, je-li splněna podmínka (7) ještě čtyřmi různými způsoby v druhé charakteristické poloze a tvoří skupinu hlavních bodů dalších čtyř involucí druhého druhu:

$$J_3^{\mathrm{II}}\ 23, 1456, \quad J_4^{\mathrm{II}}\ 26, 1345, \quad J_5^{\mathrm{II}}\ 14, 2346, \quad J_6^{\mathrm{II}}\ 15, 2346\,.$$

Poznámka 5. Další involuce druhého druhu s týmiž hlavními body neexistuje, neboť by musela mít za pár hlavních bodů prvního druhu pár hlavních bodů některé z involucí J_i^{I} ($i = 1, \ldots, 6$) a to není (dle poznámky 1) možné.

Věta 15: *Šest bodů v rovině 1, ..., 6 je současně šesti různými způsoby v první a šesti různými způsoby v druhé charakteristické poloze tehdy a jen tehdy, když souřadnice bodů 1, 2 při dané volbě systému souřadného splňují rovnice:*

$$x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 0\,, \quad x_3 = 0\,.$$

Požadujeme-li tedy, aby body *1*, ..., *6* byly v první i v druhé charakteristické poloze současně více než dvěma různými způsoby, plyne z předchozích úvah, že jsou v každé z těchto poloh nutně právě šesti různými způsoby. Poznámky 4 a 5 pak říkají, že jiné možnosti už neexistují.

VII. Příslušná grupa $\mathfrak{G}_{72}$.

Nejprve vyšetříme, jaké rovinné transformace obdržíme skládáním involucí téhož druhu mezi sebou. Jak jsme se již zmínili, složením dvou involucí J^{I} se společným párem hlavních bodů, obdržíme devět středových kolineací H_i. Tytéž kolineace dostaneme složením dvou involucí J^{II} a to těch, které nemají žádný společný hlavní bod prvního druhu.

Dvě involuce J^{I} bez společného páru dávají cyklickou kolineaci S_i periody tři.

$$S_1 = J_1^{\mathrm{I}}J_5^{\mathrm{I}} = J_5^{\mathrm{I}}J_6^{\mathrm{I}} = J_6^{\mathrm{I}}J_1^{\mathrm{I}}, \quad (S_1)^2 = S_2\,, \quad S_3 = J_2^{\mathrm{I}}J_3^{\mathrm{I}} = J_4^{\mathrm{I}}J_2^{\mathrm{I}} = J_3^{\mathrm{I}}J_4^{\mathrm{I}}\,, \quad (S_3)^2 = S_4\,.$$

Spojováním J^{I} po třech obdržíme

a) nemají-li žádný společný pár hlavních bodů

$J_i^{\mathrm{I}}J_k^{\mathrm{I}}J_l^{\mathrm{I}} = J_k^{\mathrm{I}}$ (kde $i \neq k \neq l \neq i$ probíhají buď čísla 2, 3, 4, nebo 1, 5, 6);

b) mají-li společné páry hlavních bodů, dvanáct příbuzností pátého stupně P s periodou šest. Každou z těchto příbuzností je možno utvořit devíti různými způsoby (což plyne z trojího různého určení S_i). Na př.

$$P_1 = J_1^{\mathrm{I}}J_2^{\mathrm{I}}J_6^{\mathrm{I}}\,, \quad (P_1)^2 = S_1\,, \quad (P_1)^3 = J_2^{\mathrm{I}}\,, \quad (P_1)^4 = S_2\,, \quad (P_1)^5 = P_2\,, \quad (P_1)^6 = E\,.$$

Další transformace různé od předchozích dostaneme, přidáme-li k trojici b) involucí prvního druhu involuci J_i^{I} tak, aby v této čtveřici neexistovaly tři involuce bez společného páru hlavních bodů. Tyto transformace jsou kolineace T s periodou tři a každou z nich můžeme vytvořit opět devíti různými způsoby.

$$T_1 = S_1S_4 = S_4S_1\,, \quad T_2 = S_2S_3 = S_3S_2\,, \quad T_3 = S_2S_4 = S_4S_2\,, \quad T_3 = S_1S_3 = S_3S_1\,.$$

Tytéž kolineace obdržíme, jestliže složíme J^{II} s jedním společným hlavním bodem prvního druhu po dvou. Tím jsou všechny prvky, které dostaneme spojováním J_i^{I}, vyčerpány.

Složením involucí J_i^{II} po dvou obdržíme buď středové kolineace H_i, nebo cyklické kolineace T_i s periodou tři. Tři involuce J_i^{II} dávají

a) mají-li každé dvě z nich společný hlavní bod prvního druhu $J_i^{\mathrm{II}}J_k^{\mathrm{II}}J_l^{\mathrm{II}} = J_k^{\mathrm{II}}$ (kde $i \neq k \neq l \neq i$ probíhají buď čísla 1, 3, 4 nebo 2, 5, 6);

b) obsahuje-li trojice dvě involuce bez společných hlavních bodů prvního druhu, dvanáct transformací R pátého stupně s periodou šest. Na př.:

$$R_1 = J_5^{\mathrm{II}}J_6^{\mathrm{II}}J_3^{\mathrm{II}}\,, \quad (R_1)^2 = T_2\,, \quad (R_1)^3 = J_3^{\mathrm{II}}\,, \quad (R_1)^4 = T_1\,, \quad (R_1)^5 = R_2\,, \quad (R_1)^6 = E\,.$$

Přiřadíme-li další J_i^{II} k transformacím a), b) nedostaneme již žádné nové příbuznosti.

Další transformace dostaneme již jen složením jedné involuce J^{I} a jedné involuce J^{II}. S těmito transformacemi jsme se setkali už při grupě $\mathfrak{G}_8$, a tak podobně i zde obdržíme ještě osmnáct cyklických kolineací V_i, U_i ($i = 1, \ldots, 9$), čímž jsou všechny transformace, které můžeme skládáním J^{I} a J^{II} vytvořit, určeny.

Věta 16: *Jsou-li body 1, …, 6 šesti různými způsoby v první a současně šesti různými způsoby v druhé charakteristické poloze, vzniká grupa rovinných transformací $\mathfrak{G}_{72}$ řádu sedmdesát dva. Tato grupa obsahuje mimo identitu* E *a dvanáct involucí* $J_i^{\mathrm{I}}, J_i^{\mathrm{II}}$ ($i = 1, \ldots, 6$), *devět centrálních kolineací* H_i, *osm cyklických kolineací* S_i, T_i ($i = 1, \ldots, 4$) *periody tři, osmnáct cyklických kolineací* V_i, U_i ($i = 1, \ldots, 9$) *periody čtyři a dvacetčtyři cyklických příbuzností pátéto stupně* P_i, R_i ($i = 1, \ldots, 12$) *s periodou šest.*

Grupa $\mathfrak{G}_{72}$ obsahuje kromě jiných, devět podgrup $\mathfrak{H}_{8i}$ řádu osm, které jsou téhož typu jako $\mathfrak{G}_8$ prostudovaná v III. Šest J_i^{I}, resp. šest J_i^{II} dává podgrupu $\mathfrak{H}_{36}$, resp. $\mathfrak{H}'_{36}$, která obsahuje všechny prvky, které lze dostati složením jenom involucí J_i^{I}, resp. pouze J_i^{II}.

VIII. Invariantní křivky pro grupu $\mathfrak{G}_{72}$.

Grupa $\mathfrak{G}_{72}$ neobsahuje invariantní křivky stupně nižšího než šestého. Neboť jediná invariantní kuželosečka pro $\mathfrak{H}_{8i}$ (viz V) prochází těmi čtyřmi hlavními body, které neleží na ose o_i příslušné středové kolineace H_i. Tyto body jsou však pro každou podgrupu různé, tudíž i invariantní kuželosečka. Totéž platí i pro invariantní kvartiky podgrup $\mathfrak{H}_{8i}$. V podgrupě $\mathfrak{H}_{36}$ existuje podle práce [2] pouze svazek invariantních sextik s dvojnásobnými body *1, …, 6* a tečnami p_i v těchto bodech. Tento svazek sextik je invariantní též pro naši grupu $\mathfrak{G}_{72}$. Poněvadž $\mathfrak{H}_{36}$ je v $\mathfrak{G}_{72}$ indexu dvě, stačí vyšetřiti, zda je tento svazek sextik invariantní pro jedinou transformaci $\mathfrak{G}_{72}$, která není obsažena v $\mathfrak{H}_{36}$. Vyšetříme to třeba pro cyklickou kolineaci U_1 periody čtyři. Svazek sextik obsahuje dle práce [3] tři složené sextiky:

s_1^6 složenou ze šesti přímek p_i $(i = 1, \ldots, 6)$

s_2^6 složenou ze dvou kubik: c_{II}^3 určenou body	*1, 2, 3, 4, 5, 6*
a tečnami v těchto bodech	*15, 26, 23, 14, 45, 36*
c_{III}^3 určenou body	*1, 2, 3, 4, 5, 6*
a tečnami v těchto bodech	*14, 23, 36, 45, 15, 26*
s_3^6 složenou ze dvou kubik: c_{IV}^3 určenou body	*1, 2, 3, 4, 5, 6*
a tečnami v těchto bodech	*15, 23, 36, 14, 45, 26*
c_V^3 určenou body	*1, 2, 3, 4, 5, 6*
a tečnami v těchto bodech	*14, 26, 23, 45, 15, 36*

V kolineaci $\mathbf{U}_1$ tvoří body *1, ..., 6* cykly (*1, 2*)(*3, 4, 6, 5*). Sextika s_1^6 odpovídá sama sobě, kubice c_{II}^3 odpovídá kubika c_{IV}^3 a kubice c_{III}^3 kubika c_V^3. Jsou tedy pro kolineaci $\mathbf{U}_1$ sextiky s_1^6, s_2^6, s_3^6 také invariantní a tudíž i celý svazek sextik jimi určený.

Věta 17: *V grupě $\mathfrak{G}_{72}$ existuje svazek invariantních sextik s dvojnásobnými body 1, ..., 6, při čemž tečny v těchto bodech jsou přímky $p_1, \ldots, p_6$, každá ve dvou bodech. Jiné invariantní sextiky pro $\mathfrak{G}_{72}$ již neexistují.*

Touto prací je tedy thema předložené prof. Bydžovským v práci [1], probírané dále Dr Metelkou v práci [2] zcela vyčerpáno.

LITERATURA

[1] *B. Bydžovský*: Sur une espèce particulière de groupes d'involutions planes de Cremona. Věstník Král. čes. spol. nauk, tř. II, 1929.

[2] *Josef Metelka*: O jistých konečných grupách složených z Cremonových transformací 1. a 5. stupně. Věstník Král. čes. spol. nauk, třída matematicko-přírodovědecká, roč. 1946.

[3] *B. Bydžovský*: Sur les involutions symmétriques du 5^e ordre. Rozpravy II. tř. České akademie, sv. XXXVIII, č. 2.

[4] *B. Bydžovský*: Dvojnásobné body křivek šestého stupně. Rozpravy II. tř. České akademie, sv. XXI, č. 42.

Резюме

ОБ ОДНОМ ТИПЕ ГРУПП ИНВОЛЮЦИОННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ КРЕМОНЫ В ПЛОСКОСТИ

ЛАДА ВАНЯТОВА (Lada Vaňatová), Прага

(Поступило в редакцию 11/VI 1954 г.)

В своей работе я исследую, может ли система шести точек в плоскости находиться одновременно и в первом и во втором характеристическом положении, какие здесь представляются возможности и какие группы преобразований возникают таким образом. Я получила следующие результаты:

Для того, чтобы шесть точек в плоскости было одновременно в первом и во втором характеристическом положении, необходимо и достаточно, чтобы две из этих точек, напр. *1*, *2*, лежали на диагональной стороне полного четырехугольника, определенного остальными четырьмя точками, и чтобы их координаты *1*(y_1, y_2, y_3), *2*(z_1, z_2, z_3) удовлетворяли соотношениям

$$z_i = -y_k\ , \quad z_k = y_i\ , \quad z_l = y_l = 0\ ,$$

где $i \neq k \neq l$ пробегают значения 1, 2, 3, (если выбрать систему координат так, чтобы точки *3*, *4*, *5*, *6* имели координаты *3*(1,1,1), *4*(−1, 1, 1), *5*(1, −1, 1), *6*(1, 1,−1)).

Если это условие выполнено, то точки находятся в первом и во втором характеристическом положении двумя различными способами, т. е. образуют систему главных точек двух инволюций первого рода J_1^{I}, J_2^{I} и двух инволюций второго рода J_1^{II}, J_2^{II}.

Инволюции J_i^{I} и J_i^{II} ($i = 1{,}2$) образуют группу плоских преобразований $\mathfrak{G}_8$ восьмого порядка, содержащую преобразования J_1^{I}, J_2^{I}, J_1^{II}, J_2^{II}, центральную коллинеацию $\boldsymbol{H}_1$, две циклические коллинеации $\boldsymbol{U}_1$, $\boldsymbol{V}_1$ и тождественное преобразование $\boldsymbol{E}$.

Подвергнув произвольную точку плоскости всем преобразованиям группы $\mathfrak{G}_8$, мы получим восемь точек, которые обозначим символом (Q). Если выбранная нами точка является неподвижной (самосопряженной) точкой хотя бы одного преобразования группы $\mathfrak{G}_8$, то (Q) сводится к четырем, соотв. двум, соотв. одной точке.

Существуют следующие неразложимые кривые, инвариантные относительно всех преобразований группы $\mathfrak{G}_8$: коническое сечение k_1, определенное главными точками *3*, *4*, *5*, *6* с сопряженными полюсами в точках $I = 12 \cap 45$ и $I' = 12 \cap 36$, секстики с шестью двойными точками *1*, ..., *6*, проходящие далее через неприведенную (Q), секстики с семью двойными точками *1*, ..., *6*, S_1 (S_1 есть центр коллинеации $\boldsymbol{H}_1$) и рациональные секстики с двойными точками в точках *1*, ..., *6* и в четырех самосопряженных точках инволюций J_1^{I}, J_2^{I}.

Если координаты точек *1*, *2* удовлетворяют кроме условий (1) уравнению

$$x_i + x_k - x_i x_k = 0$$

при указанном выборе системы координат, то точки *1*, ..., *6* находятся в первом и во втором характеристическом положении одновременно шестью различными способами, т. е. образуют систему главных точек шести инволюций первого рода J_i^{I} и шести инволюций второго рода J_i^{II}.

Инволюции J_i^{I} и J_i^{II} ($i = 1, \ldots, 6$) приводят к группе плоских преобразований $\mathfrak{G}_{72}$, содержащей 36 преобразований пятой степени и 36 коллинеаций. Все эти преобразования воспроизводят связку секстик с двойными точками *1*, ..., *6* и касательными *14*, *15*, *45*, *26*, *36*, *23* в этих точках. Кривых степени ниже шестой, инвариантных относительно всех преобразований $\mathfrak{G}_{72}$, не существует.

Итак, если система шести точек в плоскости занимает одновременно первое и второе характеристическое положение, то она занимает каждое из этих положений или двумя различными способами или шестью различными способами. Этим исчерпываются все возможности. Первая возможность приводит к группе $\mathfrak{G}_8$, *вторая — к группе* $\mathfrak{G}_{72}$, *состоящей из инволюций и циклических преобразований первой и пятой степени. Существуют простые секстики, инвариантные относительно всех преобразований групп* $\mathfrak{G}_8$ *и* $\mathfrak{G}_{72}$.

Zusammenfassung

ÜBER EINE GATTUNG VON GRUPPEN DER INVOLUTORISCHEN EBENEN TRANSFORMATIONEN VON CREMONA

LADA VAŇATOVÁ, Praha.

(Eingegangen am 11. Juni 1954.)

In meiner Arbeit studiere ich die Frage, ob eine Gruppe von sechs Punkten in der Ebene gleichzeitig in der ersten und auch in der zweiten charakteristischen Lage liegen kann, welche Möglichkeiten vorkommen können und welche Gruppen von Transformationen so entstehen. Ich habe folgende Resultate erhalten:

Die notwendige und hinreichende Bedingung, dass sich sechs Punkte in der Ebene *1*, ..., *6* gleichzeitig in der ersten und zweiten charakteristischen Lage befinden, ist: zwei von diesen Punkten, zum Beispiel *1*, *2* liegen auf der Diagonalen des vollständigen Vierecks, das durch die übrigen vier Punkte bestimmt ist und seine Koordinaten $1(y_1, y_2, y_3)$, $2(z_1, z_2, z_3)$ genügen der Gleichung

$$z_i = -y_k\,, \quad z_k = y_i\,, \quad z_l = y_l = 0$$
$$(i \neq k \neq l \neq i \text{ laufen die Werte } 1, 2, 3 \text{ durch})\,. \tag{1}$$

(Wenn die Punkte *3*, *4*, *5*, *6* folgende Koordinaten $3(1, 1, 1)$, $4(-1, 1, 1)$, $5(1, -1, 1)$, $6(1, 1, -1)$ besitzen.)

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, befinden sich die Punkte *1*, ..., *6* in der ersten und auch in der zweiten charakteristischen Lage auf zwei verschiedenen Weisen, d. h. sie bilden eine Gruppe der Hauptpunkte von zwei Involutionen erster Gattung $J_1^{\mathrm{I}}, J_2^{\mathrm{I}}$ und von zwei Involutionen zweiter Gattung $J_1^{\mathrm{II}}, J_2^{\mathrm{II}}$.

Die Involutionen J_i^{I} und J_i^{II} $(i = 1, 2)$ erzeugen die Gruppe der ebenen Transformationen $\mathfrak{G}_8$ der achten Ordnung. Die Gruppe $\mathfrak{G}_8$ enthält folgende Transformationen: $\boldsymbol{J}_1^{\mathrm{I}}, \boldsymbol{J}_2^{\mathrm{I}}, \boldsymbol{J}_1^{\mathrm{II}}, \boldsymbol{J}_2^{\mathrm{II}}$, eine Zentralkollineation $\boldsymbol{H}_1$, zwei zyklische Kollineationen $\boldsymbol{U}_1$, $\boldsymbol{V}_1$ und die identische Transformation $\boldsymbol{E}$.

Wenn wir auf einen beliebigen Punkt der Ebene alle Transformationen der Gruppe $\mathfrak{G}_8$ anwenden, bekommen wir acht Punkte, welche wir mit dem Symbol (Q) bezeichnen. Ist der gewählte Punkt für wenigstens eine der Transformationen der Gruppe $\mathfrak{G}_8$ selbstadjungiert, dann reduziert sich (Q) auf vier, resp. zwei, resp. einen Punkt.

Für alle Transformationen der Gruppe $\mathfrak{G}_8$ existieren folgende unzerlegbare invariante Kurven: Ein Kegelschnitt k_{I}, der durch die Hauptpunkte *3, 4, 5, 6* bestimmt ist und die Punkte $I = 12 \cap 45$ und $I' = 12 \cap 36$ als konjugierte Pole hat, die Kurven sechsten Grades mit sechs Doppelpunkten *1, ..., 6*, die durch irreduzierte (Q) gehen, die Kurven sechsten Grades mit sieben Doppelpunkten *1, ..., 6*, S_1 (S_1 ist das Zentrum der Kollineation $\boldsymbol{H}_1$) und rationale Kurven sechsten Grades mit Doppelpunkten in den Punkten *1, ..., 6* und in vier selbstadjungierten Punkten der Involutionen $\boldsymbol{J}_i^{\mathrm{I}}$ und $\boldsymbol{J}_i^{\mathrm{II}}$.

Wenn die Koordinaten der Punkte *1, 2,* ausser den Bedingungen (1) auch der Gleichung

$$x_i^2 - x_k^2 - x_i x_k = 0$$

bei der vorstehenden Wahl des Koordinatensystems genügen, so sind die Punkte *1, ..., 6* gleichzeitig auf sechs verschiedene Weisen in der ersten und auch in der zweiten Lage, d. h., sie bilden eine Gruppe der Hauptpunkte von sechs Involutionen der ersten Gattung $\boldsymbol{J}_i^{\mathrm{I}}$ und sechs Involutionen der zweiten Gattung $\boldsymbol{J}_i^{\mathrm{II}}$.

Die Involutionen $\boldsymbol{J}_i^{\mathrm{I}}$ und $\boldsymbol{J}_i^{\mathrm{II}}$ ($i = 1, \ldots, 6$) führen zur Gruppe der ebenen Transformationen $\mathfrak{G}_{72}$, die 36 Transformationen fünften Grades und 36 Kollineationen enthält. Alle diese Transformationen geben Sextikbüschel mit Doppelpunkten *1, ..., 6* und Tangenten *14, 15, 45, 26, 36, 23* in diesen Punkten wieder. Es gibt keine Kurven niedrigeren Grades als des sechsten, die für alle Transformationen der Gruppe $\mathfrak{G}_{72}$ invariant wären.

Wenn sich also in der Ebene eine Gruppe von sechs Punkten gleichzeitig in der ersten und auch in der zweiten charakteristischen Lage befindet, dann geschieht dies in jeder dieser Lage entweder auf zwei verschiedene Weisen, oder auf sechs verschiedene Weisen. Andere Möglichkeiten können nicht vorkommen. Die erste Möglichkeit gibt die Gruppe $\mathfrak{G}_8$ und die zweite die Gruppe $\mathfrak{G}_{72}$, welche die Involutionen und zyklische Transformationen ersten und fünften Grades enthalten. Es gibt unzerlegbare invariante Kurven sechsten Grades für alle Transformationen der Gruppe $\mathfrak{G}_8$ und auch der Gruppe $\mathfrak{G}_{72}$.