Josef Metelka

O rovinných konfiguracích $(12_4, 16_3)$

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 80 (1955), No. 2, 133--145

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108170`

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV

SVAZEK 80 * PRAHA, 31. V. 1955 * ČÍSLO 2

ČLÁNKY

O ROVINNÝCH KONFIGURACÍCH $(12_4, 16_3)$

JOSEF METELKA, Olomouc.

(Došlo dne 14. ledna 1955.)

DT:513.84

Věnováno akademiku Bohumilu Bydžovskému k jeho 75. narozeninám.

Článek je nejprve referátem, který líčí historii a dnešní stav bádání o rovinných konfiguracích $(12_4, 16_3)$. Pak je přikročeno k plnění prvního bodu programu, který je navržen za tím účelem, aby byl získán přehled o všech možných konfiguracích $(12_4, 16_3)$: Jsou hledány všecky konfigurace, které mají aspoň jednu čtveřinu bodů typu A. V literatuře byly z těchto konfigurací známy dosud jen čtyři, v článku jsou připojeny ještě další čtyři a je podán důkaz, že tím jsou vyčerpány všechny možnosti.

1. Historie a nynější stav problému. Rovinnými konfiguracemi $(12_4, 16_3)$ — t. j. skupinami 12 bodů a 16 přímek v rovině, jejichž vzájemný vztah je ten, že každým z bodů procházejí čtyři přímky, na každé přímce leží tři body — se začal zabývat akademik BYDŽOVSKÝ v r. 1939.[1]) Tehdy byly známy pouze dvě takové konfigurace, tradičně označované A I a A II a zvané konfigurace DE VRIESOVY,[2]) ačkoliv první z nich znali už HESSE[3]), SALMON[4]) a REYE.[5]) Obě

[1]) *B. Bydžovský*: „Über eine ebene Konfiguration $(12_4, 16_3)$", Věstník Král. čes. spol. nauk, roč. 1939.

[2]) *J. de Vries*: „Über gewisse ebene Konfigurationen" Acta mathematica, 12 (1889), str. 67.

[3]) *O. Hesse*: „Über Curven dritter Ordnung..." J. reine angew. Math. 36, 1848, str. 153—176. Sebrané spisy, str. 155 a násl. Viz též „Eine Bemerkung zum Pascalschen Theorem" J. reine angew. Math. 41, 1851, str. 270, Sebrané spisy (Mnichov 1897), str. 254.

[4]) *G. Salmon* (někm. překl. W. FIEDLER): Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven, 1873, čl. 151, 152.

[5]) *Th. Reye*: „Konstruction der Konfigurationen" Acta Math. 1 (1882), str. 97 a další, viz též Geometrie der Lage, 3. díl, 1910, str. 234.

byly několikrát popsány různými spisovateli, na př. H. SCHROETEREM,[6]) ZACHARIASEM[7]) a j. V dalších řádcích zavedeme jisté třídění do typů a pak uvidíme, že obě konfigurace A I, A II jsou téhož typu A_{12}. Akademik Bydžovský byl první, který objevil nový typ konfigurací, typ A_4B_8, až dosud označovaný B I. Konfigurace $(12_4, 16_3)$ pak zůstaly v ohnisku jeho zájmu a vedl o nich se mnou čilou korespondenci po větší část války i po válce. Odtud vznikl můj článek,[8]) v němž se poprvé vyskytla čtvrtá konfigurace B II rovněž typu A_4B_8. V dalším průběhu se pak začal počet konfigurací $(12_4, 16_3)$ mimo nadání rychle zvětšovat a všecka kriteria pro třídění, která navrhoval akad. Bydžovský, nepostačovala. Upustili jsme proto od uveřejňování dalších konfigurací, dokud nebude nalezen pořádací princip. Akad. Bydžovský sám se k problému vrátil ještě na sjezdu čsl.-polských matematiků r. 1949[9]) a nejnověji v českém i mezinárodním znění Časopisu.[10])

Dnes je bezpečně známo kolem 50 konfigurací $(12_4, 16_3)$ vesměs geometricky realisovaných a je téměř jisto, že jich bude nalezeno ještě několik desítek. Dnešní můj článek je částí programu, který jsme na sebe vzali s mým bratrem: Sestavit úplnou tabulku všech možných konfigurací $(12_4, 16_3)$, které se dají v projektivní rovině nad tělesem komplexních čísel realisovat. Pokud se speciálně týče tohoto článku, je to zároveň splnění programu, který jsem uvedl na závěr svého článku citovaného výše.

2. Několik obecných poznámek, typy konfigurací. Body konfigurace budeme značit číslicemi *1*, ..., *12*. Okolnost, že tři z nich — na př. *1*, *11*, *12* — leží na konfigurační přímce, budeme značit *1—11—12*. Okolnost, že dva body — na př. *2* a *3* — nejsou spojeny konfigurační přímkou, budeme značit *2* : *3* a číst *„bod 2 je oddělen od bodu 3“*.

Každý konfigurační bod je oddělen od tří dalších bodů. Nechť na př. platí: *1* : *2*, *1* : *3*, *1* : *4*. Podle toho, jaký je vzájemný vztah bodů *2*, *3*, *4*, zařadíme bod *1* do jednoho z pěti typů:

Typ A: *2* : *3*, *3* : *4*, *2* : *4*. V tomto případě jsou také body *2*, *3*, *4* typu A a tvoří spolu s *1* čtveřici navzájem oddělených bodů.

Typ B: *2—3*, *3—4*, *2—4* není však *2—3—4*. (Body *2*, *3*, *4* jsou „spojeny do trojúhelníka“.)

---

[6]) *H. Schroeter*: Über ebene Konfigurationen. J. reine angew. Math. 108, 1891, str. 297.

[7]) *M. Zacharias*: „Untersuchungen über ebene Konfigurationen $(12_4, 16_3)$“, Deutsche Mathematik, roč. 6, č. 2/3. — Z dalších autorů lze jmenovat *J.M.Felda*, *Morleye*, *Martinettiho* (podrobněji viz v cit. práci Zachariasově).

[8]) *J. Metelka*: O jistých konfiguracích $(12_4, 16_3)$ v rovině. Věstník Král. čes. spol. nauk, roč. 1944.

[9]) *B. Bydžovský*: „Poznámky k theorii konfigurace $(12_4, 16_3)$“, Časopis pro pěst. matem. 74, 1950 (Zprávy ze společného sjezdu matematiků čsl. a polských).

[10]) *B. Bydžovský*: „O dvou nových konfiguracích $(12_4, 16_3)$“, Časopis pro pěst. matem. 79, 1954 a „Über zwei neue ebene Konfigurationen $(12_4, 16_3)$“ — Чехословацкий математический журнал — Czechoslovak Mathematical Journal, 4 (79), 1954.

Typ C: *2—3, 2—4, 3 : 4* nebo případ vzniklý permutací čísel *2, 3, 4.*
Typ D: *2 : 3, 2 : 4, 3—4* nebo případ vzniklý permutací čísel *2, 3, 4.*
Typ E: *2—3—4.*

První třídění konfigurací bude tedy podle typů jejich bodů. Srozumitelný symbol A_{12} udává, že všech 12 konfiguračních bodů je typu A. To jsou — jak již řečeno — obě de Vriesovy konfigurace A I a A II. Konfigurace v článcích citovaných sub [1]) a [8]) jsou typu A_4B_8.

Poznámka. Uspořádání typů a jejich označení se vyvinulo v průběhu korespondence mezi akad. Bydžovským a mnou a je zdůvodněno jen historicky. V tomto pořadí totiž byly nové typy skutečně nalézány. Nyní jsou již zjištěny konfigurace, v nichž se vyskytují body všech typů.

Jak ukazují hoření příklady — a desítky jiných — nestačí typ konfigurace k úplné klasifikaci. Obě konfigurace A I a A II jsou téhož typu, ale liší se *incidenčním schematem,* t. j. schematem, udávajícím, jakým způsobem jsou body mezi sebou spojovány. Při řešení problému najít všecky možné konfigurace je tedy nejprve nutno najít všecka možná incidenční schemata. Tím vznikají další otázky: Mohou dvě různá incidenční schemata představovat tutéž konfiguraci? Mohou dvě různé konfigurace mít totéž incidenční schema?

A tu je vidět, že musíme neprve definovat, které konfigurace budeme pokládat za různé. Podle posledních našich výsledků se jeví jako nejvhodnější tato definice:

Definice: *Dvě incidenční schemata jsou ekvivalentní tehdy a jen tehdy, jestliže jedno přechází v druhé permutací číslic 1, ..., 12. Dvě konfigurace jsou ekvivalentní právě tehdy, jsou-li jejich incidenční schemata ekvivalentní.*

Jen touto definicí dosáhneme toho, že nebudeme mít nekonečně mnoho typů konfigurací. Kdybychom za ekvivalentní považovali jen takové dvě konfigurace, které se na sebe dají převést projektivními transformacemi, měli bychom na př. nekonečnou dvouparametrickou množinu de Vriesových konfigurací A I.

Abychom tedy získali přehled o všech možných (různých) konfiguracích, najdeme nejprve všecka možná různá incidenční schemata a budeme pak jednotlivě zkoumat, zda ke každému z nich patří skutečně *geometrická konfigurace,* t. j. zda se schema dá nad tělesem čísel komplexních realisovat body a projektivními přímkami.

Pro konkretní provádění tohoto programu jsme si stanovili studium konfigurací v tomto pořadí:

1. Konfigurace, které mají aspoň jeden bod typu A. (To znamená aspoň jednu čtveřici bodů typu A.)
2. Konfigurace, které mají aspoň jeden bod typu D a nemají body typu A.
3. Konfigurace s aspoň jedním bodem typu E a bez bodů typu A, D.
4. Zbývající konfigurace, t. j. konfigurace složené z bodů typu B a C.

Toto pořadí bylo zvoleno po prvních zkušenostech, když se ukázalo, že konfigurace s body typu *A* jsou nejsnáze přehledné a body typu *D, E* přicházejí mnohem méně často než body typu *B* a *C*. (Ve skutečnosti není mezi skoro 50 dosud známými typy konfigurací kromě obou de Vriesových ani jediná, která by neměla body typu *B*.)

Tento článek ve své další části přináší úplnou odpověď na první bod plánovaného postupu. Je to výsledek již více než deset let starý. Naproti tomu druhý článek, který připojil můj bratr[11]), obsahuje výsledky zcela nové a týká se druhého bodu programu, který však toho času není ještě úplně uzavřen.

Chtěl bych ještě nakonec připomenout, že jsme se u všech konfigurací spokojili zjištěním jejich existence a rozdílnosti od předešlých a jen výjimečně uvádíme některé vlastnosti, na př. tehdy, není-li konfigurace „čistá". Tento termín zavedl akad. Bydžovský a míní tím případ, kdy se v konfiguraci vyskytují „cizí" přímky nebo body. (Viz článek citovaný sub [10]).)

3. Schemata a čtveřiny čísel. Nechť jsou *9, 10, 11, 12* navzájem oddělené body typu *A*. Ze 16 přímek konfigurace prochází každá jedním a jen jedním z bodů *9, 10, 11, 12*, takže každá z hledaných konfigurací má schema tvaru podobného tomuto

$$9\begin{pmatrix}1, 3, 5, 7\\2, 4, 6, 8\end{pmatrix}\quad 10\begin{pmatrix}1, 2, 4, 6\\3, 5, 7, 8\end{pmatrix}\quad 11\begin{pmatrix}1, 2, 5, 6\\4, 3, 8, 7\end{pmatrix}\quad 12\begin{pmatrix}1, 2, 3, 4\\5, 6, 7, 8\end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Schema má tento smysl: Jedna konfigurační přímka je *9—1—2*, další *9—3—4*, podobně *10—1—3* atd.

Všecka možná incidenční schemata dostaneme, když v závorkách uvedeme všecky možné sestavy čísel *1, ..., 8*, při čemž nesmí ve dvou závorkách stát současně tatáž čísla nad sebou (tvořit *pár*). Tato všecka schemata však jistě nejsou navzájem různá. Abychom si usnadnili přehled, zavedeme pojem „čtveřina".

Definice. *Čtveřinu tvoří čtyři různá čísla z čísel 1, ..., 8, která tvoří dva páry v jedné závorce a ještě aspoň jeden pár v některé jiné závorce incidenčního schematu.*

V příkladě (1) jsou čísla *1, 2, 3, 4* čtveřinou, ale čísla *1, 2, 7, 8* čtveřinou nejsou. Snadno se ukáže, že v každém schematu musí být aspoň jedna čtveřina.

Čtveřiny si rozdělíme na několik druhů. Říkáme, že čtveřina je druhu

„**a**", jestliže její čísla tvoří právě po dvou párech ve dvou závorkách. V příkladě (1) je toho druhu čtveřina *1, 4, 5, 8*.

„**b**", jestliže její čísla tvoří kromě dvou párů v jedné závorce ještě po jednom páru ve dvou dalších závorkách a jestliže tyto dva poslední páry mají společné

---

[11]) *V. Metelka*: „O jistých rovinných konfiguracích $(12_4, 16_3)$, které obsahují aspoň jeden bod typu *D*". Časopis pro pěstování matematiky, *80* (1955).

číslo. (Ve čtvrté závorce může ještě přicházet libovolně další pár.) Tohoto druhu je čtveřina *1, 2, 3, 5* v (1).

„**ab**", jestliže její čísla tvoří po dvou párech ve dvou závorkách, a ve třetí (případně ještě čtvrté) závorce další pár. Příklad je čtveřina *1, 2, 3, 4* v (1).

„**aa**", jestliže její čísla tvoří po dvou párech ve třech závorkách. Ve schematu (1) není čtveřina tohoto druhu.

„**c**", jestliže její čísla netvoří více párů, než kolik minimálně žádá definice, anebo tvoří sice páry ve více než dvou závorkách, avšak jinak než v druhu „**b**". Ve schematu (1) je čtveřina *1, 3, 5, 7* druhu „**c**".

Věta 1. *Druh čtveřiny se nemění žádnou permutací čísel 1, ..., 8 mezi sebou a žádnou permutací čísel 9, ..., 12 mezi sebou.*

Věta nepotřebuje důkazu. Podle druhu a počtu čtveřin ve schematech lze tedy posuzovat možnost ekvivalence dvou schemat.

4. Schemata, v nichž přichází aspoň jedna čtveřina druhu „aa". O těchto schematech dokážeme větu:

Věta 2. *Existuje jediná konfigurace, v jejímž incidenčním schematu je čtveřina druhu „**aa**". Konfigurace je typu A_4B_8*[12]*, není čistá, všech osm bodů typu B leží na kuželosečce.*

Důkaz. Schemata se čtveřinou druhu „**aa**" se dají vždy psát takto:

$$9\begin{pmatrix}1, 3, 5, 7\\ 2, 4, 6, 8\end{pmatrix} \quad 10\begin{pmatrix}1, 2, 5, 6\\ 3, 4, 7, 8\end{pmatrix} \quad 11\begin{pmatrix}1, 2, 5, 6\\ 4, 3, 8, 7\end{pmatrix} \quad 12\begin{pmatrix}1, 2, 3, 4\\ 5, ., ., .\end{pmatrix}.$$

Na poslední tři místa lze položit libovolnou ze šesti permutací čísel *6, 7, 8*, takže můžeme dostat celkem šest schemat. Avšak provedením permutace *(23)(67)(9,10)* a permutace *(24)(68)(9,11)* se snadno přesvědčíme, že skutečně různá mohou být jen tři, jež mají čtvrtou závorku

$$12\begin{pmatrix}1, 2, 3, 4\\ 5, 6, 7, 8\end{pmatrix} \quad \text{nebo} \quad 12\begin{pmatrix}1, 2, 3, 4\\ 5, 6, 8, 7\end{pmatrix} \quad \text{nebo} \quad 12\begin{pmatrix}1, 2, 3, 4\\ 5, 7, 8, 6\end{pmatrix}. \tag{2}$$

Je jasné, že z bodů *1, 2, 3, 4* nemohou žádné tři ležet na přímce, takže tyto body jsou vrcholy čtyřrohu, jehož diagonální vrcholy jsou body *9, 10, 11.* Ani tyto tři body nemohou ležet na přímce a lze tedy volit souřadnicový systém takto

$$9(1, 0, 0), \quad 10(0, 1, 0), \quad 11(0, 0, 1), \quad 1(1, 1, 1)\,.$$

Ostatní body pak mají souřadnice

$$2(-1, 1, 1), \quad 3(1, -1, 1), \quad 4(1, 1, -1), \quad 5(a_1, a_2, a_3), \quad 6(-a_1, a_2, a_3),$$
$$7(a_1, -a_2, a_3), \quad 8(a_1, a_2, -a_3)\,.$$

Tím je vyhověno incidencím, předepsaným v prvních třech závorkách schematu. Zvolíme-li dále $12(b_1, b_2, b_3)$, dostáváme pro každou z možností (2) čtyři

[12]) Tato konfigurace je různá od obou dosud známých konfigurací BI, BII typu A_4B_8.

bilineární rovnosti mezi a_i a b_i. Protože musí být $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \neq 0$ a $a_i \neq a_j$, přesvědčí se čtenář obyčejným počtem, že první a třetí možnost je nesplnitelná, neboť žádá $b_1 = b_2 = b_3 = 0$. Druhá z možností (2) pak je splnitelná, jestliže je $a_2 = a_1^2$, $a_3 = 1$, $b_1 = 0$, $b_2 = -a_1$, $b_3 = 1$. Pak pro libovolné a_1 s výjimkou konečného počtu hodnot (0, 1, —1, i, —i) existuje konfigurace $(12_4, 16_3)$ tvořená body *1*, ..., *12*. Body *1*, ..., *8* jsou typu B, body *9*, *10*, *11*, *12* typu A. Protože body *10*, *11*, *12* leží na „cizí" přímce $x_1 = 0$, není konfigurace čistá. Body *1*, ..., *8* leží na kuželosečce o rovnici

$$(a_1^2 + 1)\, x_1^2 - x_2^2 - a_1^2 x_3^2 = 0\,.$$

Tím je věta v celém rozsahu dokázána.

Konfigurace tohoto typu dosud v literatuře popsána nebyla.

5. Schemata, jejichž všechny čtveřiny jsou druhu „a". O těchto schematech lze rovněž dokázat jednoduchou větu

Věta 3. *Existuje jediná konfigurace, v jejímž incidenčním schematu jsou všecky čtveřiny druhu* „a"*. Je to de Vriesova konfigurace A I.*

D ů k a z. Protože v každé konfiguraci existuje vždy aspoň jedna čtveřina — a to v našem případě čtveřina „a" — můžeme předpokládat, že touto čtveřinou je čtveřina *1*, *2*, *3*, *4*. Pak se čtenář lehce přesvědčí, že lze jen jediným způsobem sestavit incidenční schema, aby bylo vyhověno podmínce věty. Schema je

$$9\begin{pmatrix} 1, 3, 5, 7 \\ 2, 4, 6, 8 \end{pmatrix} \quad 10\begin{pmatrix} 1, 2, 5, 6 \\ 3, 4, 7, 8 \end{pmatrix} \quad 11\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ 5, 6, 7, 8 \end{pmatrix} \quad 12\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ 8, 7, 6, 5 \end{pmatrix}.$$

Všechna ostatní zde možná schemata jsou ekvivalentní s tímto tvarem, jak je vidět téměř na první pohled. Konfigurace, která patří k tomuto schematu je geometrická, t. j. realisovatelná a má všecky body typu A. Je to tedy jedna z *de Vriesových konfigurací* a to konfigurace A I. T. zv. *Hesseova podmínka*, podle níž se odlišuje konfigurace A I od A II je právě podmínka, aby všechny čtveřiny byly druhu „a" (srovnej článek [8]), str. 4).

6. Schemata bez čtveřin druhu „b". Postup, který jsme až dosud volili, dovoluje učinit tento závěr: Každé další schema musí mít aspoň jednu čtveřinu jiného druhu než „a" a to čtveřinu odlišnou od „**aa**". Vždy můžeme předpokládat, že *1*, *2*, *3*, *4* je tato čtveřina, a pak lze každé další schema psát takto

$$9\begin{pmatrix} 1, 3, 5, 7 \\ 2, 4, 6, 8 \end{pmatrix} \quad 10\begin{pmatrix} 1, 2, 4, 6 \\ 3, 5, 7, 8 \end{pmatrix} \quad 11\begin{pmatrix} 1, 2, ., . \\ ., ., ., . \end{pmatrix} \quad 12\begin{pmatrix} 1, 2, ., . \\ ., ., ., . \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Zvolíme si tedy další postup, jak doplňovat poslední dvě závorky. Hledejme nejprve taková schemata, v nichž není čtveřina „**b**" ani „**ab**".

Věta 4. *Existuje jen jediné schema tvaru* (3) *bez čtveřin druhu* „**b**" *a* „**ab**". *Odpovídá mu de Vriesova konfigurace A II.*

D*ů*kaz. Ve třetí a čtvrté závorce schematu (3) může být bod *1* spojen do páru s body *4, 5, 6, 7, 8*. Bod *4* však odpadá, protože by existovala čtveřina *1, 2, 3, 4* druhu „**b**" (nebo „**ab**"). Právě tak odpadá bod *5* vzhledem ke čtveřině *1, 2, 3, 5*. Avšak ani bod *8* není přípustný, neboť kdyby bylo na př. *11—1—7, 12—1—8*, existovala by čtveřina *1, 2, 7, 8* druhu „**b**", podobně při *11—1—6, 12—1—8* by čtveřina *1, 3, 6, 8* byla druhu „**b**". Je tedy jediná možnost (až na permutaci (*11, 12*)) *11—1—6* a *12—1—7*. Postupujeme-li obdobně u ostatních bodů, zjistíme, že lze napsat jediné schema tvaru (3) bez čtveřin „**b**" a „**ab**" a to schema

$$9\begin{pmatrix}1, 3, 5, 7\\2, 4, 6, 8\end{pmatrix} \quad 10\begin{pmatrix}1, 2, 4, 6\\3, 5, 7, 8\end{pmatrix} \quad 11\begin{pmatrix}1, 2, 3, 5\\6, 4, 8, 7\end{pmatrix} \quad 12\begin{pmatrix}1, 2, 3, 4\\7, 8, 5, 6\end{pmatrix}.$$

Konfigurace patřící k tomu schematu je známa a je to *de Vriesova* konfigurace *A II* typu A_{12}.

7. Schemata se čtveřinami „ab". Všechna další schemata mají čtveřiny „**b**" nebo „**ab**". Zkoumejme nejprve případ, kdy ve schematu je aspoň jedna čtveřina „**ab**" a předpokládejme, že je to právě čtveřina *1, 2, 3, 4*. Třetí závorka schematu (3) se pak doplní takto:

$$11\begin{pmatrix}1, 2, 5, 6\\4, 3, 8, 7\end{pmatrix}. \tag{4}$$

Věta 5. *Jsou-li splněny incidence předepsané schematy* (3) *a* (4), *leží body 1, ..., 11 na kubické křivce* c^3.

D*ů*kaz. Všimněme si složené kubiky *9—1—2, 10—4—7, 11—5—8* a další složené kubiky *9—7—8, 10—2—5, 11—1—4*. Je vidět, že body *1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11* jsou basí svazku kubik, lze tedy proložit určitou kubiku c^3 těmito body a ještě bodem *3*. Další dvě složené kubiky *9—3—4, 10—2—5, 11—6—7* a *9—5—6, 10—4—7, 11—2—3* ukazují, že na c^3 musí ležet také bod *6*, čímž je věta dokázána.

Žádejme nyní, aby čtveřina *1, 2, 3, 4* druhu „**ab**" měla ještě ve čtvrté závorce poslední možný pár *2—4*, takže *12—2—4* je konfigurační přímka. Pak máme větu:

Věta 6. *Schemata* (3) *a* (4) *spolu s incidencí 12—2—4 vedou k jediné konfiguraci a to konfiguraci B I typu* A_4B_8.

D*ů*kaz. Čtvrtou závorku lze doplnit dvojím způsobem

$$12\begin{pmatrix}1, 2, 3, 5\\6, 4, 8, 7\end{pmatrix} \quad \text{nebo} \quad 12\begin{pmatrix}1, 2, 3, 5\\8, 4, 6, 7\end{pmatrix}.$$

Všimneme-li si dvou složených kubik *9—3—4, 11—6—7, 12—1—8* a *9—7—8, 11—1—4, 12—3—6* a dalších dvou kubik *9—1—2, 11—6—7, 12—3—8* a *9—7—8, 11—2—3, 12—1—6*, vidíme, že v obou možnostech musí i bod *12* ležet na kubice c^3 z věty 5. Protože však obě možnosti mají dvě přímky společné, nemohou existovat jako geometrické konfigurace obě dvě, nýbrž nanejvýš jen jedna. Srovnáním s předešlými pracemi se zjistí, že první možnost je schema existující a známé konfigurace B I typu A_4B_8.

Poznámka. Konfigurace B I se liší od konfigurace téhož typu, uvedené ve větě 2 tím, že nemá cizí přímku, a od konfigurace B II se liší podmínkou uvedenou v práci [8]) str. 5. Tato podmínka v terminologii tohoto článku znamená přítomnost čtveřiny druhu „**ab**", která má pár i ve čtvrté závorce.

Když dále nepřipustíme incidenci *12—2—4*, je poslední závorka

$$12\begin{pmatrix}1, 2, 3, 4\\ ., ., ., .\end{pmatrix}$$

a lze ji doplnit 24 způsoby, t. j. všemi permutacemi čísel *5, 6, 7, 8*. Protože však incidence *12—2—5* a *12—4—7* už nejsou možny, zbývá 14 možností. Použijeme-li však permutací (*2, 4*)(*5, 7*)(*9, 11*) a (*1, 3*)(*2, 4*)(*5, 7*)(*6, 8*) zbude nám jen 6 možností a to

$$\begin{pmatrix}1, 2, 3, 4\\ 5, 6, 7, 8\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1, 2, 3, 4\\ 5, 7, 6, 8\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1, 2, 3, 4\\ 5, 7, 8, 6\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1, 2, 3, 4\\ 5, 8, 7, 6\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1, 2, 3, 4\\ 6, 7, 8, 5\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1, 2, 3, 4\\ 8, 7, 6, 5\end{pmatrix}.$$

Věta 7. *Právě zjištěné možnosti pro čtvrtou závorku dávají spolu se schematy* (3) *a* (4) *dvě konfigurace a to B II typu A_4B_8 a novou konfiguraci typu $A_4B_2C_6$.*

Důkaz. První možnost dává spolu s (3) a (4) schema známé konfigurace B II, což se zjistí srovnáním se schematy práce [8]), kde je tato konfigurace poprvé uvedena. Druhá, čtvrtá, pátá a šestá možnost nemohou vést ke geometrické konfiguraci. Důkaz je přesně obdobný důkazu věty 6 a provedeme ho na ukázku jen pro poslední možnost. Přímky X—*1*—*8* a X—*3*—*6* se protínají v bodě X na kubice c^3 z věty 5, což jsme již dokázali v důkaze věty 6. Označme Y průsečík Y—*1*—*8* a Y—*4*—*5*. Ze složené kubiky Y—*1*—*8*, *9*—*5*—*6*, *10*—*4*—*7* a z existence přímek Y—*4*—*5*, *9*—*7*—*8* usuzujeme, že kdyby bod Y ležel na c^3, musely by body *10, 1, 6* ležet na přímce, což není pravda. Neleží tedy Y na c^3 a proto je $X \neq Y$ a poslední možnost nemůže vést ke konfiguraci. Obdobný důkaz je i v ostatních případech.

Třetí možnost vede ke konfiguraci, jejíž úplné schema tedy je

$$9\begin{pmatrix}1, 3, 5, 7\\ 2, 4, 6, 8\end{pmatrix} \quad 10\begin{pmatrix}1, 2, 4, 6\\ 3, 5, 7, 8\end{pmatrix} \quad 11\begin{pmatrix}1, 2, 5, 6\\ 4, 3, 8, 7\end{pmatrix} \quad 12\begin{pmatrix}1, 2, 3, 4\\ 5, 7, 8, 6\end{pmatrix}.$$

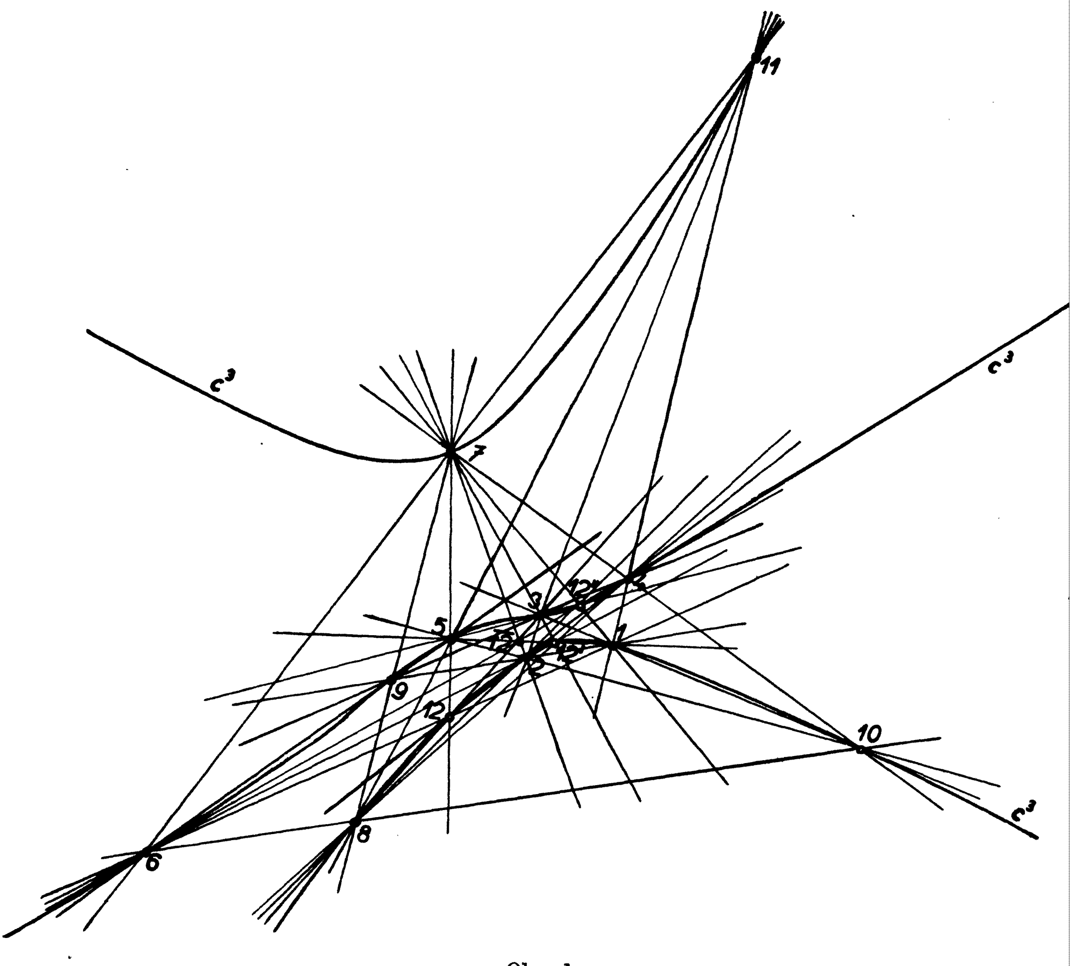
Konfigurace se dá realisovat takto:

$$1(1, \alpha, 1);\ 2(1, \alpha, \alpha);\ 3(1, 1, 1);\ 4(\alpha, \alpha, 1);\ 5(2 + \alpha, \alpha, 5 + 2\alpha);$$
$$6(5 + 2\alpha, 5, -5 - 2\alpha);\ 7(5 + 2\alpha, -\alpha, 2 + \alpha);\ 8(-5 - 2\alpha, \alpha, 5 + 2\alpha);$$
$$9(0, 0, 1);\ 10(0, 1, 0);\ 11(1, 0, 0);\ 12(10 + 4\alpha, 15 + 5\alpha, 15 + 7\alpha),$$

kde α je kořen rovnice $\xi^2 - 5 = 0$. Konfigurace je typu $A_4B_2C_6$. Body typu A jsou body *9, 10, 11, 12* body typu B jsou *1, 6*, ostatní jsou typu C.

Poznámka 1. Existenci této poslední konfigurace poprvé zjistil a její body spočítal akad. Bydžovský v jednom ze svých dopisů v r. 1944.

Poznámka 2. Poloha bodů *1*, ..., *8*, které patří této poslední konfiguraci, je velmi pozoruhodná. Spojíme-li tyto body všemi možnými přímkami, zjistí-



Obr. 1.

me, že sedmkrát nastane případ, že čtyři z těchto přímek procházejí jedním bodem. Situace je nakreslena na obrázku, kde zmíněných sedm bodů má označení *9*, *10*, *11*, *12*, *12'*, *12"*, $\overline{12}$. Všechny tyto body kromě posledního leží spolu s body *1*, ..., *8* na kubice c^3. Nepoužijeme-li bodu $\overline{12}$, lze vypuštěním vždy dvou z bodů *9*, *10*, *11*, *12*, *12'*, *12"* získat celkem 15 konfigurací $(12_4, 16_3)$, z nichž jedna je *A* I, dvě *A* II, čtyři *B* I a osm *B* II, jak o tom pojednává práce [8]). Přidáním bodu $\overline{12}$ a vynecháním bodů *12*, *12'*, *12"* dostaneme šestnáctou konfiguraci $A_4B_2C_6$, o niž jsme se právě zmínili (při srovnávání posledního schematu s obrázkem je tedy nutno místo bodu *12* vzít bod $\overline{12}$).

8. Zbývající schemata. Všechna zbývající schemata mají aspoň jednu čtveřinu typu „**b**" a žádnou čtveřinu druhu „**ab**". Můžeme přirozeně předpokládat, že právě čtveřina *1, 2, 3, 4* je druhu „**b**".

Věta 8. *Existují ještě tři různá další schemata, která jsme dosud neuvedli.*

Důkaz. První dvě závorky každého dalšího schematu jsou dány tvarem (3). Použijeme-li okolnosti, že ve schematu nesmí být čtveřina druhu „**ab**", a jestliže aplikujeme permutace *(1 3)(2 4)(5 7)(6 8)*, *(1 4)(2 7)(5 8)(9 10)* a *(1 3)(2 8 5 6)(9 11)*, můžeme zjistit — což už nebudu blíže rozvádět — že pro třetí závorku zbývají dvě možnosti

$$11\begin{pmatrix}1, 2, 3, 5\\4, 6, 8, 7\end{pmatrix}, \quad (5) \qquad 11\begin{pmatrix}1, 2, 3, 5\\4, 8, 6, 7\end{pmatrix}. \quad (6)$$

Možnost (5) se dá ve čtvrté závorce doplnit 14 způsoby, z nichž některé odpadnou, protože vedou ke čtveřinám „**ab**", jiné se dají navzájem ztotožnit permutacemi *(3 4)(5 6)(7 8)(10 11)*, *(1 2)(3 5)(4 6)(7 8)* a *(1 2)(3 6)(4 5)(10 11)*. Nakonec zůstávají jen tři navzájem nepřeveditelná schemata (uvádíme jen čtvrté závorky, jako třetí závorky je třeba použít závorky (5)):

$$12\begin{pmatrix}1, 2, 4, 5\\7, 3, 6, 8\end{pmatrix} \quad 12\begin{pmatrix}1, 2, 3, 5\\7, 4, 6, 8\end{pmatrix} \quad 12\begin{pmatrix}1, 2, 3, 4\\7, 8, 5, 6\end{pmatrix}. \quad (7)$$

Jestliže použijeme na třetím místě závorky (6), je možno doplnit čtvrtou závorku opět 14 způsoby. Vyškrtáme-li schemata s čtveřinou druhu „**ab**" a použijeme-li permutací *(3 4)(5 8)(6 7)(10 11)*, *(1 4 3)(2 7 6)(9 10 11)* a *(1 3)(2 6)(5 8)(9 11)* zbudou nakonec jen dvě možnosti pro čtvrtou závorku (jestliže třetí je (6)):

$$12\begin{pmatrix}1, 2, 4, 5\\7, 3, 6, 8\end{pmatrix} \quad 12\begin{pmatrix}1, 2, 3, 4\\7, 6, 5, 8\end{pmatrix}. \quad (8)$$

Avšak schemata sestavená ze (3), (6) a kterékoli možnosti (8) nedávají už nic nového, neboť první z nich se převádí permutací *(1 5)(3 6)(4 8)(9 10)(11 12)* na schema sestavené ze (3), (5) a druhé možnosti (7). Právě tak druhé uvažované schema se převádí na první schema (7) permutací *(1 4)(2 6 5 8)(3 7)(9 12)*.

Protože víc možností už vůbec není a protože s druhé strany tři nově získaná schemata se ukáží (na př. zjišťováním čtveřin) skutečně různá jak mezi sebou tak od všech předešlých, je věta 8 dokázána.

Dále je tedy třeba zjistit, zda získaná schemata představují geometrické konfigurace. Na to odpovídá následující věta:

Věta 9. *Schemata sestavená ze* (3), (5) *a první respektive druhé možnosti* (7) *představují nové konfigurace a to typu $A_4B_2C_6$ respektive $A_4B_5C_3$. Schema sesta-*

vené z (3), (5) *a poslední možnosti* (7) *se nedá realisovat nad tělesem komplexních čísel projektivními přímkami.*

Důkaz. První dvě tvrzení dokážeme snadno. Body o souřadnicích

$$1(1, 0, 0);\ 2(1, 1, 1);\ 3(0, 1, 0);\ 4(0, 0, 1);\ 9(0, 1, 1);$$
$$5(2c^2 + b - bc - c, c^2, bc);\ 6(2c^2 + b - bc - c, 2c^2 - bc, c^2);$$
$$10(2c - 1, c, 0);\ 7(2c - 1, c, bc);\ 8(2c - 1, 2c^2 - bc, 2c^2 - c);\ 11(1, 0, c)$$

splňují všecky incidence předepsané prvními třemi závorkami a to pro každé b, c kromě konečného počtu výjimek. Má-li být splněna první z možností (7), musí být dále $12(b, 1, b)$ a pro čísla b, c dostáváme vztahy;

$$b = 2c - c^2\,;\quad c^3 - c^2 - 1 = 0\,.$$

To lze vždy splnit a konfigurace tedy existuje. Pro splnění druhé možnosti (7) je nutno klást $12(1, 1, b)$ a pro čísla b, c máme:

$$b = 3c - 1\,;\quad 3c^3 - 9c^2 + 6c - 1 = 0\,.$$

Také tato konfigurace tedy existuje. Při zkoumání třetí možnosti zjistíme, že incidence čtvrté závorky nemohou být splněny, nepřipustíme-li triviální případ, že některé konfigurační přímky splývají. Prosím čtenáře, aby si ještě ověřil, že z bodů *1, 2, 3, 4,* které jsme vzali za základní souřadnicové body, nemohou žádné tři ležet na přímce, aniž by nastalo zmíněné splynutí konfiguračních přímek. Tato podrobná úvaha je nutná, protože jinak bychom mohli být v pochybách, zda i poslední konfigurace není realisovatelná s tím, že by obsahovala některou „cizí" přímku spojující body *1, 2, 3, 4.* Volbou zmíněných bodů za základní souřadnicové body jsme totiž potlačili každou takovou přímku.

Poznámka. Konfigurace typu $A_4B_2C_6$, kterou jsme právě dostali, je odlišná od konfigurace téhož typu z odst. 7.

Poznámka 2. Konfigurace $A_4B_5C_3$ je první (a myslím, že dosud jediný) známý příklad konfigurace, u níž dva body (bod *1* a *4*) jsou odděleny od téže trojice bodů (*5, 6, 8*). Není nesnadné ukázat obecně, že v takovém případě oba zmíněné body musí být typu *B*.

Můžeme tedy uzavřít tímto zjištěním:

Přijmeme-li definici ekvivalence z odstavce 2, existuje osm tříd konfigurací $(12_4, 16_3)$, *u nichž se vyskytuje aspoň jedna čtveřice bodů typu A. Dvakrát se vyskytují konfigurace typu* A_{12} (DE VRIESOVY), *třikrát typu* A_4B_8, *dvakrát typu* $A_4B_2C_6$ *a jednou typu* $A_4B_5C_3$.

Резюме

О ПЛОСКИХ КОНФИГУРАЦИЯХ $(12_4, 16_3)$

ЙОЗЕФ МЕТЕЛКА (Josef Metelka), Оломоуц.

(Поступило в редакцию 14/I 1955 г.)

В предыдущей статье прежде всего излагается история и современное состояние исследований в области плоских конфигураций $(12_4, 16_3)$, которые были у нас начаты академиком Б. Быджовским в 1939 г. В настоящее время известно более 50 конфигураций (из которых опубликовано весьма мало), так что представляется необходимым ввести некоторый принцип для их классификации и составить удобообозримую таблицу всех возможных конфигураций. С этой целью была разработана подробная программа, первая часть которой и предлагается здесь вниманию читателя. Мы ищем все конфигурации $(12_4, 16_3)$, содержащие хоть одну четверку таких точек конфигурации, из которых ни одна пара не соединена прямой конфигурации (точки типа A).

Перенумеруем по порядку все двенадцать точек, что позволит нам ставить шестнадцать прямых в виде схемы инциденций, см. напр. схему (1). Затем ищем все схемы этого вида, которые нельзя перевести одну в другую никакой перестановкой чисел *1*, ..., *12*. Имеется всего восемь таких схем, различных в этом смысле и приводящих к конфигурациям, которые можно действительно геометрически осуществить. Четыре из этих конфигураций были уже известны и ранее (см. литературу, [1, ..., 8]) остальные же публикуются впервые.

На рисунке изображено весьма интересное положение точек *1*, ..., *8*, причем путем присоединения дальнейших точек, можно получить всего 16 конфигураций $(12_4, 16_3)$.

Zusammenfassung

ÜBER EBENE KONFIGURATIONEN $(12_4, 16_3)$

JOSEF METELKA, Olomouc.

(Eingegangen am 14. Jänner 1955.)

Im vorliegenden Artikel erklärt man zuerst die Geschichte und den heutigen Zustand der Forschung über die ebenen Konfigurationen $(12_4, 16_3)$, welche bei uns durch die Arbeiten des Akademikers B. Bydžovský i. J. 1939 begonnen wurde. Heute sind mehr als 50 Konfigurationen bekannt (jedoch nicht ver-

öffentlicht) und es zeigte sich notwendig einen Ordnungsprinzip einzuführen und eine übersichtliche Tafel aller möglichen Konfigurationen zu schaffen. Dazu wurde ein ausführliches Programm vorbereitet, dessen ersten Teil man eben vorlegt. Man sucht alle Konfigurationen $(12_4, 16_3)$, welche mindestens einen Vierer von Konfigurationspunkten enthalten, von denen nicht zwei durch eine Konfigurationsgerade verbunden sind (Punkten vom Typus A).

Die zwölf Punkte werden durchlaufig numeriert, was die Möglichkeit liefert die sechzehn Geraden in der Form eines Inzidenzschemas — wie z. B. (1) — vorzustellen. Nun werden alle Schemata von dieser Form gesucht, die nicht durch etwaige Permutation der Ziffern *1*, ..., *12* einander überführbar sind. Es gibt im Ganzen acht Schemata, die in angegebenem Sinne verschieden sind und ausserdem zu den geometrisch realisierbaren Konfigurationen führen. Vier von diesen Konfigurationen wurden schon vorher bekannt (siehe die Fussnoten No 1, ..., 8), die anderen kommen in der Literatur zum erstenmal vor.

Das Bild zeigt eine sehr interessante Position der Punkte *1*, ..., *8*, bei der durch Zufügung anderer Punkte insgesamt 16 Konfigurationen $(12_4, 16_3)$ entstehen können.