Vladimír Škorpík

O hyperoskulačních kuželosečkách

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 80 (1955), No. 2, 232--241

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108166

RŮZNÉ

O HYPEROSKULAČNÍCH KUŽELOSEČKÁCH

VLADIMÍR ŠKORPÍK, Praha.

(Došlo dne 26. srpna 1954.) DT : 513.516.3

V projektivní geometrii se řeší úloha žádající sestrojení kuželosečky k_x, která hyperoskuluje danou kuželosečku k v daném bodě A, t. j. má s ní v tomto bodě čtyrbodový styk, a prochází daným bodem O. Obměňme úlohu tak, že bod A, ve kterém se kuželosečky k a k_x hyperoskulují, nebude dán, za to však místo dosavadní jedné dodatkové podmínky pro určení kuželosečky k_x budou dány dvě, a to buď její dva body nebo bod a tečna nebo posléze dvě tečny. Těmito obměnami dospějeme ke čtyřem úlohám. Ty v tomto článku prostudujeme. Znějí takto:

1.

K dané jednoduché kuželosečce k jest sestrojiti hyperoskulační kuželosečku k_x tak,

(I) ... *aby procházela dvěma danými body O_1, O_2.*
(II) ... *aby se v daném bodě T dotýkala dané přímky t.*
(III) ... *aby procházela daným bodem O a dotýkala se dané přímky o, neprocházející bodem O.*
(IV) ... *aby se dotýkala dvou daných přímek o_1, o_2.*

O daných bodech, jimiž má k_x procházet, budeme předpokládat, že neleží na k. Rovněž dané přímky, jichž se má k_x dotýkat, nejsou tečnami dané křivky k. Úloha (IV) je duální k (I), takže její řešení vyplyne dualisací z řešení úlohy (I). Všechny dané prvky v úlohách předpokládejme reálné.

2.

Hyperoskulační kuželosečka je zvláštní případ kuželosečky *dvojstyčné,*[1]) kdy dva body dotyku splynuly v jediný — bod hyperoskulace. V ten zde přešel

[1]) *Dvojstyčnou* zde rozumějme kuželosečku, která se kuželosečky k dotýká ve dvou bodech.

též pól Y spojnice obou dotykových bodů. Řešiti úlohy (I) až (III) v podstatě znamená stanovit geometrické místo pólů Y všech dvojstyčných i hyperoskulačních kuželoseček křivky k, jež splňují obě dodatkové podmínky příslušné úlohy, a zjistit průsečíky tohoto geometrického místa s danou křivkou k. Ty pak jsou body hyperoskulace těch kuželoseček, které jsou řešením úlohy.

Je-li rovnice dané jednoduché reálné kuželosečky k v projektivních bodových souřadnicích

$$f(x) = \sum_1^3 a_{rs}x_rx_s = 0 \quad (a_{rs} = a_{sr}) \,, \tag{1}$$

resp.

$$f(x) \equiv \sum_1^3 x_r f_r(x) = 0 \,, \tag{2}$$

a jsou-li y_1, y_2, y_3 souřadnice zmíněného pólu Y, zní rovnice dvojstyčné (resp. hyperoskulační) kuželosečky takto:

$$c_1 f(x) - c_2[\sum_1^3 x_r f_r(y)]^2 = 0 \,. \tag{3}$$

Prochází-li kuželosečka vyjádřená rovnicí (3) daným bodem [v úloze (I) bodem O_1, v úloze (II) bodem T a v úloze (III) bodem O] a byl-li tento bod zvolen za souřadnicový vrchol $O_1(1, 0, 0)$, nabude rovnice tvaru:

$$f_1^2(y)\, f(x) - a_{11}[\sum_1^3 x_r f_r(y)]^2 = 0, \text{ kde } a_{11} \neq 0 \,. \tag{4}$$

Tato rovnice je východiskem pro další studium všech tří úloh, neboť lze z ní odvodit předepsáním další dodatkové podmínky rovnici geometrického místa pólů Y.

3.

V úloze (I) zvolme další daný bod O_2 za souřadnicový vrchol $O_2(0, 1, 0)$, takže $a_{22} \neq 0$, a dosaďme jeho souřadnice do rovnice (4). Vznikne tím rovnice:

$$a_{22}\, f_1^2(y) - a_{11}\, f_2^2(y) = 0 \,,$$

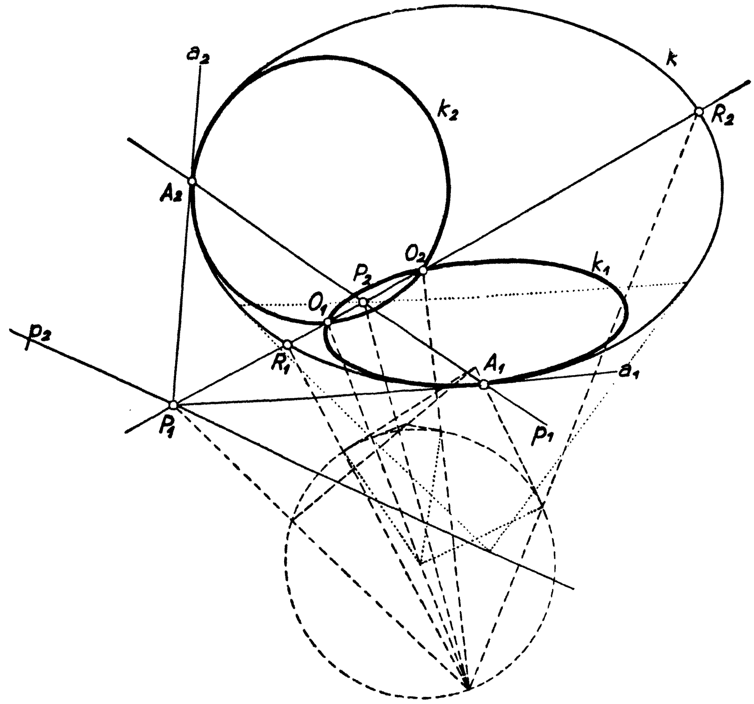
která ukazuje, že geometrickým místem pólů Y je zde kuželosečka g složená ze dvou (různých) přímek p_1, p_2, vyjádřených rovnicemi:

$$p_1 \ldots \sqrt{a_{22}}\, f_1(x) - \sqrt{a_{11}}\, f_2(x) = 0 \,, \quad p_2 \ldots \sqrt{a_{22}}\, f_1(x) + \sqrt{a_{11}}\, f_2(x) = 0 \,.$$

Jde o sdružené poláry kuželosečky k. Jejich póly $P_1(\sqrt{a_{22}}, -\sqrt{a_{11}}, 0)$, $P_2(\sqrt{a_{22}}, \sqrt{a_{11}}, 0)$ leží zřejmě na spojnici daných bodů $O_1(1, 0, 0)$, $O_2(0, 1, 0)$, oddělují tyto body harmonicky a představují dvojici sdružených pólů kuželosečky k.

Jádrem konstruktivního řešení úlohy (I) je tedy stanovení bodů P_1, P_2 na přímce O_1O_2 jako společné družiny involuce harmonických pólů kuželosečky k a další involuce, v níž jsou body O_1, O_2 samodružnými (viz obr. 1).

Úloha má obecně 4 řešení, neboť tolik mají průsečíků kuželosečky k a g. Je-li přímka O_1O_2 tečnou kuželosečky k v určitém bodě R, splyne jeden z bodů P_1, P_2 s R a geometrické místo g je pak složeno z přímky O_1O_2 a z poláry kuželosečky k pro pól P, harmonicky sdružený s R vzhledem k bodům O_1, O_2. Tři průsečíky kuželoseček k a g zde splývají v jediný bod R, takže úloha (I) má v tomto případě pouze dvě řešení, z nichž jedno je triviální (kuželosečka složená z dvojnásob počítané přímky O_1O_2). V ostatních případech jsou 4 řešení, některá (po příp. všechna) mohou však být imaginární.

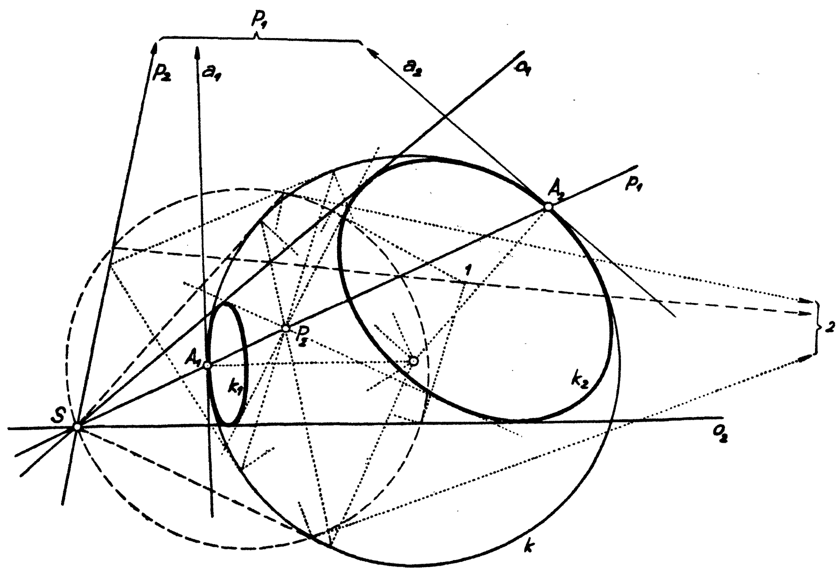


Obr. 1.

Z hyperoskulačních kuželoseček, které představují řešení úlohy (I), jsou pouze ty reálné, jejichž bod dotyku s k je reálný. Otázka reálnosti řešení úlohy (I) je totožná s otázkou reálnosti tečen vedených z bodů P_1, P_2 ke k. Záleží na bodech P_1, P_2, jsou-li reálné či imaginární, a u reálných na tom, jsou-li vzhledem ke k vnější či vnitřní. To pak dále závisí na poloze bodů O_1, O_2 vzhledem ke k. Jsou tyto možnosti:

Přímka O_1O_2 se buď dotýká kuželosečky k (případ již shora uvážený), nebo ji protíná ve dvou různých bodech R_1, R_2. Ty mohou být buď 1. imaginární sdružené nebo 2. reálné. V případě 2. se bodové dvojice R_1R_2 a O_1O_2 navzájem buď a) oddělují nebo b) neoddělují.

V případě 1. je involuce harmonických pólů kuželosečky k na přímce O_1O_2 eliptická, takže společná bodová družina P_1P_2 dvou výše zmíněných involucí je reálná. Oba body P_1, P_2 jsou pro k vnější, neboť leží na přímce, která k reálně neprotíná. Všechna 4 řešení jsou v tomto případě reálná. V případě 2a) jsou P_1, P_2 samodružné body eliptické involuce, určené (reálnými) družinami O_1O_2, R_1R_2, a tudíž imaginární. Všechna 4 řešení úlohy jsou pak imaginární. V případě 2b) jsou P_1, P_2 samodružné body hyperbolické involuce, určené družinami O_1O_2 a R_1R_2, a tudíž reálné. Jeden je pro k vnější, druhý vnitřní, neboť jsou harmonickými póly kuželosečky k na přímce, která protíná k reálně. V tomto případě má úloha (1) dvě řešení reálná a dvě imaginární.



Obr. 2.

Dualisací úvah o úloze (I) dospějeme k řešení a vymezení úlohy (IV). Jádrem konstruktivního řešení této úlohy je stanovení společné přímkové družiny p_1p_2 dvou involucí ve svazku $S(o_1, o_2)$, a to involuce harmonických polár kuželosečky k a involuce, v níž jsou přímky o_1, o_2 samodružnými[2]) (viz obr. 2).

4.

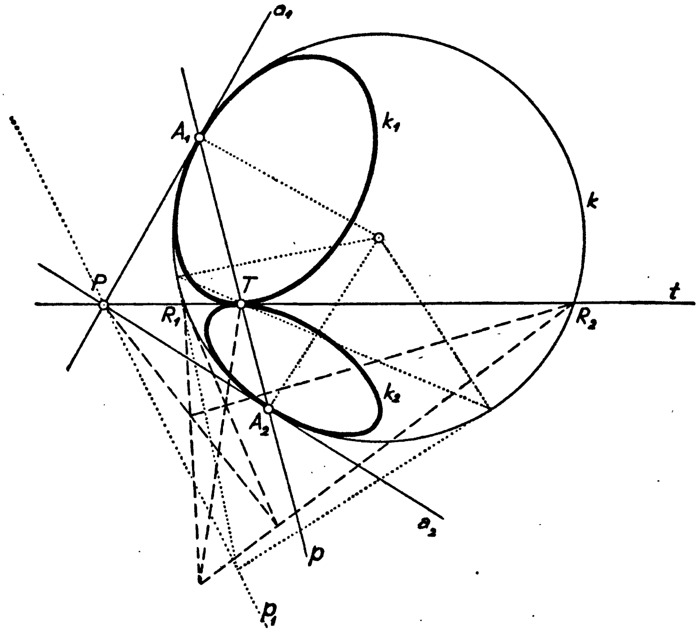
V úloze (II) zvolme danou přímku t za souřadnicovou osu $x_3 = 0$. Má-li se kuželosečka k_x dotýkat v bodě $T \equiv O_1(1, 0, 0)$ přímky $t \ldots x_3 = 0$, musí mít rovnice

[2]) Svazkem neboli hvězdicí S rozumějme soubor všech přímek v rovině, které procházejí bodem $S(o_1, o_2)$. Tento geometrický útvar je vyjádřen lineární rovnicí v přímkových souřadnicích. Jde tedy o duální pojem k pojmu přímky jakožto souboru bodů.

$$[a_{22}f_1^2(y) - a_{11}f_2^2(y)]\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 + 2f_1(y)[a_{12}f_1(y) - a_{11}f_2(y)]\,\frac{x_2}{x_1} = 0\,,$$

jež vznikne z rovnice (4) dosazením nuly za x_3 a vydělením x_1^2, pro poměr $x_2 : x_1$ oba kořeny nulové. To vyžaduje, aby koeficient lineárního členu byl roven nule. Z této podmínky plyne pak rovnice geometrického místa pólů Y. Je jím zřejmě kuželosečka složená ze dvou sdružených polár p_1, p dané kuželosečky k, jejichž rovnice znějí:

$$p_1 \ldots f_1(x) = 0\,, \quad p \ldots a_{12}\,f_1(x) - a_{11}\,f_2(x) = 0\,.$$



Obr. 3.

Jde tu o poláry bodů $T \equiv O_1$ a $P(a_{12}, -a_{11}, 0)$. Jakožto sdružené póly kuželosečky k oddělují tyto body dvojici průsečíků R_1, R_2 dané kuželosečky k a přímky t harmonicky. Konstrukce bodu P a další postup řešení jsou zde zřejmé (viz obr. 3). Úloha (II) má 4 řešení; dvě z nich jsou triviální (kuželosečky složené z dvojnásob počítaných tečen vedených z bodu T ke křivce k).

Otázka reálnosti řešení je závislá na poloze bodu T a přímky t vzhledem ke kuželosečce k. Přímka t protíná k ve dvou bodech různých, a to buď 1. imaginárních sdružených nebo 2. reálných. V případě 1. jsou oba body T a P pro k vnější, takže všechna řešení jsou reálná. V případě 2. záleží na poloze bodu T: Je-li T pro k vnější, je P vnitřní a obráceně. Dvě řešení jsou zde reálná a dvě imaginární. K *jednoduchým* reálným kuželosečkám hyperoskulačním dospějeme však v případě 2. pouze tehdy, je-li bod T pro k vnitřní.

5.

V úloze (III) zvolme průsečíky dané přímky o a dané kuželosečky k za souřadnicové vrcholy $O_2(0, 1, 0)$, $O_3(0, 0, 1)$, takže $a_{22} = a_{33} = 0$, a mysleme si rovnici (4) upravenu na obecný tvar rovnice kuželosečky:

$$\sum_1^3 b_{rs} x_r x_s = 0\,, \quad (b_{rs} = b_{sr})\,.$$

Potom podmínka, že se kuželosečka k_x má dotýkat dané přímky $o \equiv O_2O_3$ $(x_1 = 0)$, je vyjádřena rovnicí:

$$b_{22}b_{33} - b_{23}^2 = 0\,,$$

kdež

$$b_{22} = -a_{11}f_2^2(y)\,, \quad b_{33} = -a_{11}f_3^2(y)\,, \quad b_{23} = a_{23}f_1^2(y) - a_{11}f_2(y)\,f_3(y)\,,$$

takže platí:

$$a_{11}^2 f_2^2(y)\,f_3^2(y) - [a_{23}f_1^2(y) - a_{11}f_2(y)\,f_3(y)]^2 = 0\,,$$

t. j.

$$a_{23}f_1^2(y)[2a_{11}f_2(y)\,f_3(y) - a_{23}f_1^2(y)] = 0\,.$$

Koeficient a_{23} není roven nule. Kdyby měl být roven nule, musela by být daná kuželosečka k složená; podle textu úlohy je však jednoduchá.

Geometrické místo pólů Y je zde tedy složeno z poláry $p[f_1(x) = 0]$ daného bodu $O \equiv O_1$ pro kuželosečku k[3]) a z kuželosečky m, vyjádřené rovnicí:

$$2a_{11}f_2(x)\,f_3(x) - a_{23}f_1^2(x) = 0\,. \tag{5}$$

Tato kuželosečka patří, jak je patrno z rovnice (5), do svazku kuželoseček, které se dotýkají přímek $p_2[f_2(x) = 0]$, $p_3[f_3(x) = 0]$ v průsečících s přímkou $p[f_1(x) = 0]$. Přímka p je tedy pro tuto kuželosečku m polárou bodu $P(p_2, p_3)$, který je zároveň pólem přímky o pro kuželosečku k. Ve svazku jsou pouze dvě složené kuželosečky, a to $f_2(x)\,f_3(x) = 0$ a $f_1^2(x) = 0$. Jelikož $a_{11} \neq 0$, $a_{23} \neq 0$, není naše kuželosečka m totožná se žádnou z nich a je tudíž jednoduchá. Daná přímka $o[x_1 = 0]$ je pro kuželosečku m polárou daného bodu $O \equiv O_1$, jak zjistíme dosazením souřadnic 1, 0, 0 za z_1, z_2, z_3 do rovnice poláry křivky m, jež zní:

$$z_1a_{11}(2a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23})\,x_1 - z_2a_{23}[a_{12}^2x_2 - 2(a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13})\,x_3] +$$
$$+ z_3a_{23}[2(a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13})\,x_2 - a_{13}^2x_3] = 0\,.$$

Sestrojením kuželosečky m a vyhledáním jejích průsečíků s danou kuželosečkou k by byla úloha (III) v podstatě rozřešena. Průsečíky lze však stanoviti přímo — bez konstrukce křivky m — postupem, který odvodíme.

---

[3]) Tuto součást geometrického místa vyplňují póly Y odpovídající dvojstyčným a hyperoskulačním kuželosečkám *složeným* z dvojnásob počítaných přímek hvězdice O.

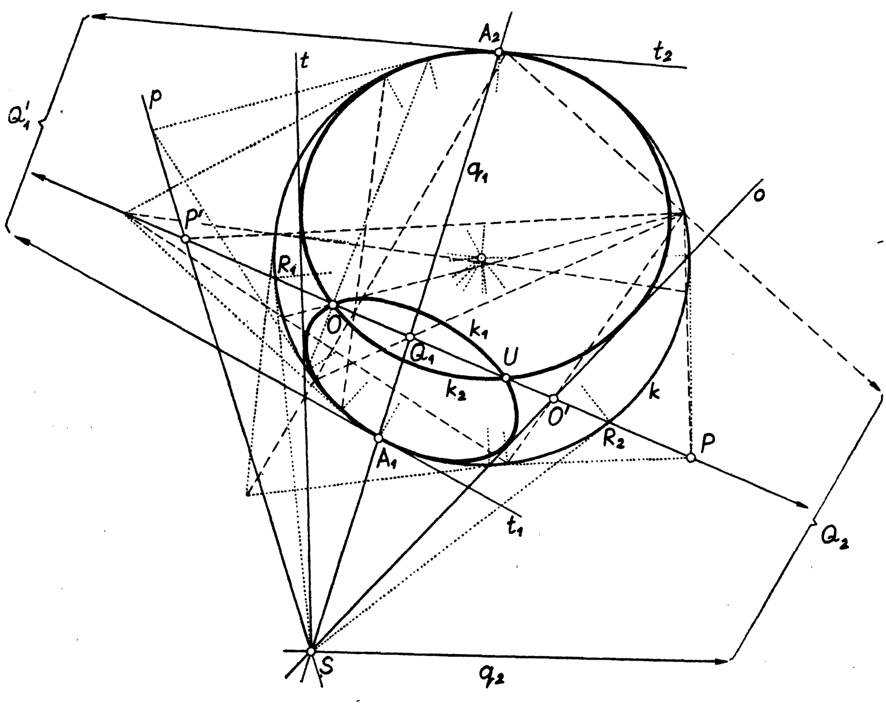
Protože $a_{22} = a_{33} = 0$, lze zde rovnici dané kuželosečky k — zvolíme-li P za jednotkový bod — psáti též takto:

$$2a_{23}f_2(x)\,f_3(x) - Ax_1^2 = 0\,, \tag{6}$$

kde A je diskriminant kuželosečky.

Průsečíky křivek k a m tvoří basi svazku kuželoseček vyjádřeného rovnicí, kterou lze sestaviti pomocí rovnic (5) a (6) a která zní:

$$2a_{11}\,f_2(x)\,f_3(x) - a_{23}\,f_1^2(x) - u[2a_{23}\,f_2(x)\,f_3(x) - Ax_1^2] = 0\,. \tag{7}$$



Obr. 4.

Pro hodnotu parametru $u = a_{11} : a_{23}$ vyjadřuje rovnice (7) kuželosečku složenou. Rovnici lze pak upraviti na tvar

$$a_{11}Ax_1^2 - a_{23}^2f_1^2(x) = 0\,,$$

který ukazuje, že kuželosečka je složena z přímek q_1, q_2 o rovnicích:

$$q_1 \ldots \sqrt{a_{11}A}\,x_1 - a_{23}f_1(x) = 0\,, \quad q_2 \ldots \sqrt{a_{11}A}\,x_1 + a_{23}f_1(x) = 0\,. \tag{8}$$

Z rovnic (8) je patrno, že přímky q_1, q_2 procházejí průsečíkem přímek $o[x_1 = 0]$, $p[f_1(x) = 0]$ a oddělují je harmonicky.

Harmonická čtveřina přímková opq_1q_2 protíná přímku OP v harmonické čtveřině bodové $O'P'Q_1Q_2$ (viz obr. 4). Body Q_1, Q_2 tvoří tedy na přímce OP družinu involuce určené samodružnými body $O'P'$.

Bodová dvojice Q_1Q_2 představuje zároveň družinu jiné involuce, kterou na přímce OP vytíná (podle Desarguesovy poučky) svazek kuželoseček, vyjádřený rovnicí (7). Jsouť body Q_1, Q_2 dvojicí průsečíků přímky OP s kuželosečkou tohoto svazku složenou z přímek q_1, q_2. Známou družinou této involuce jsou průsečíky R_1, R_2 přímky OP s danou kuželosečkou k; ty jsou zároveň samodružnými body involuce harmonických pólů kuželosečky k, t. j. involuce (OP', PO'). Další družinou involuce vyťaté svazkem kuželoseček na přímce OP jsou průsečíky M_1, M_2 přímky OP s kuželosečkou m, vyjádřenou rovnicí (5).

Body M_1, M_2 lze stanoviti jako samodružné prvky involuce harmonických pólů kuželosečky m na přímce OP. Jednou družinou této involuce jsou body P, P', jinou pak body O, O'.

Při konstruktivním řešení úlohy (III) lze tedy postupovati takto:

Pro danou kuželosečku k sestrojíme k danému bodu O poláru p a k dané přímce o pól P. Vyznačíme průsečíky $O'(o, OP)$, $P'(p, OP)$, $S(o, p)$. Na přímce OP sestrojíme společnou družinu Q_1Q_2 involucí (X_1, X_2) a (O', P'). [Body X_1, X_2 určíme při tom jako společnou družinu involucí (OP', PO'), (OO', PP').] Přímky SQ_1, SQ_2 protnou danou kuželosečku k v hledaných bodech hyperoskulace.

Úlohu (III) lze řešiti též duálním konstruktivním postupem. Ten vede k týmž hyperoskulačním kuželosečkám jako postup právě uvedený.

Je-li daná přímka o pro k polárou bodu O, mají kuželosečky k a m pro tento bod tutéž poláru. Dotýkají se pak ve dvou bodech, takže úloha (III) má v tomto případě pouze dvě (triviální) řešení, a to dvojnásob počítané tečny, vedené z bodu O ke kuželosečce k. (K triviálním řešením dále nepřihlížejme.)

Není-li přímka o pro k polárou bodu O, má úloha (III) čtyři řešení. Zabývejme se otázkou jejich reálnosti.

Mají-li dvě reálné kuželosečky v určitém bodě styk 3. řádu, jsou reálné body kterékoli z nich (s výjimkou bodu hyperoskulace) vzhledem k druhé křivce buď všechny vnitřní nebo všechny vnější. Má-li mít tedy úloha (III) aspoň jedno řešení reálné, musí být daný bod O i bod, v němž se daná přímka o dotýká hledané hyperoskulační kuželosečky, buď oba vnitřní nebo oba vnější vzhledem k dané kuželosečce k, t. j. — máme-li na mysli rozdělení roviny křivkou k na dvě části — musí bod O ležeti v jiné části roviny než pól P přímky o pro k. Dokážeme, že při splnění této podmínky má naše úloha dvě řešení reálná a dvě imaginární.

Za uvedeného předpokladu protíná přímka OP kuželosečku k reálně, takže involuce harmonických pólů této kuželosečky $(OP', PO') \equiv (R_1, R_2)$ je hyperbolická. Protože dvojice bodů OP', PO' představují družiny sdružených pólů, leží bod O v jiné části roviny než P', právě tak jako bod P v jiné části roviny než O'. Protože pak O a P leží v nestejných částech roviny, musí být body O, O' buď oba vnitřní a body P, P' zároveň oba vnější nebo obráceně. Z toho plyne, že involuce (OO', PP') je rovněž hyperbolická, neboť její družiny se neoddělují. Společná družina dvou hyperbolických involucí, jejichž určující družiny jsou sestaveny z *týchž* čtyř prvků, je vždy imaginární. Jelikož naše dvě involuce (OP', PO'), (OO', PP') jsou hyperbolické a jejich určující družiny jsou sestaveny z *týchž* čtyř bodů O, P, O', P', jest jejich společná družina X_1X_2 imaginární. Involuce (X_1, X_2) je tudíž eliptická. Společná družina Q_1Q_2 involucí (X_1, X_2) a (O', P') je potom reálná. Body X_1, X_2 jsou samodružnými prvky involuce, kterou na přímce OP vytíná svazek kuželoseček, vyjádřený rovnicí (7), a jejímiž družinami jsou bodové dvojice R_1R_2 a Q_1Q_2. Jelikož involuce je eliptická, musí se družiny R_1R_2 a Q_1Q_2 oddělovat, takže jeden z bodů Q_1, Q_2 je vzhledem ke k vnitřní a druhý vnější. Protože pak bod S je pro k pólem přímky OP, která k protíná reálně, je vzhledem ke kuželosečce k bodem vnějším. Jeho spojnice s vnitřním bodem, ležícím na poláře OP, protíná kuželosečku reálně, kdežto spojnice s vnějším bodem, ležícím na této přímce, protne k imaginárně. Jedna z přímek $q_1 \equiv SQ_1$, $q_2 \equiv SQ_2$ vede proto ke dvěma reálným řešením naší úlohy, zatím co druhá ke dvěma řešením imaginárním, jak jsme chtěli dokázat.[4])

6.

Při studiu úloh (I) až (III) jsme dospěli k závěrům, které lze shrnout v tuto poučku:

Každé kuželosečce k_x, která je k dané jednoduché kuželosečce k dvojstyčná nebo hyperoskulační a která splňuje některou z těchto tří dvojic dodatkových podmínek:

1. *prochází dvěma body O_1, O_2, které neleží na k,*
2. *dotýká se v bodě T, jenž neleží na k, přímky t, která není tečnou křivky k,*
3. *prochází bodem O, jenž neleží na k, a dotýká se přímky o, která neprochází bodem O a není tečnou křivky k,*

buď přiřaděn určitý bod roviny, a to u dvojstyčné kuželosečky průsečík společných tečen křivek k a k_x, u hyperoskulační kuželosečky bod hyperoskulace.

---

[4]) Reálné kuželosečky k_1, k_2, které představují řešení úlohy (III), se protínají mimo daný bod O ještě v dalším reálném bodě přímky OP.

Důkaz. Pól Q_1' přímky q_1 vzhledem ke k leží zřejmě na OP, protože q_1 prochází pólem S přímky OP. Body Q_1', Q_1 oddělují tedy průsečíky R_1, R_2 přímky OP s kuželosečkou k harmonicky. Vyhledáme-li na přímce OP takový bod U, který spolu s O odděluje harmonicky bodovou dvojici $Q_1'Q_1$, má tato dvojice $Q_1'Q_1$ stejný význam vzhledem k dané kuželosečce k a k bodům O, U jako dvojice P_1P_2 v úloze (I) vzhledem k bodům O_1, O_2. Podle závěrů o úloze (I) můžeme tvrdit, že body O, U lze proložit dvě reálné kuželosečky h_1, h_2, z nichž jedna hyperoskuluje k v jednom z průsečíků A_1, A_2 přímky q_1 s kuželosečkou k a druhá v druhém. Protože pak bodem A_1, právě tak jako bodem A_2, lze vést pouze jedinou kuželosečku, která má s k styk 3. řádu a prochází daným bodem O, je dvojice kuželoseček h_1, h_2 nutně totožná s dvojicí k_1, k_2, k níž jsme dospěli konstruktivním postupem úlohy (III).

Geometrické místo všech takto přiřaděných bodů je složeno v případě

sub 1. *ze dvou přímek, jejichž póly představují společnou družinu dvou involucí na přímce O_1O_2, a to involuce (O_1, O_2) a involuce harmonických pólů kuželosečky k,*[5])

sub 2. *z přímky t a z poláry bodu P, který na přímce t tvoří s bodem T dvojici harmonických pólů kuželosečky k,*

sub 3. *z přímky o a z jednoduché kuželosečky m, pro kterou bod O a přímka o představují pól a poláru a která se ve svých průsečících s polárou bodu O pro k dotýká tečen kuželosečky k, sestrojených v průsečících přímky o s k.*

POZNÁMKA O INVERSNÍCH PRVCÍCH V TOPOLOGICKÝCH OKRUZÍCH

JIŘÍ BAROT, Brno.

(Došlo dne 11. listopadu 1954.) DT:519.48

I. M. Gelfand[1]) dokázal řadu vět o inversních prvcích v normovaných okruzích. Účelem této poznámky je důkaz jedné věty pro okruhy topologické.

Buď R okruh, který je současně L^*-prostorem;[2]) předpokládejme, že jsou splněny tyto axiomy:

$$x_n \to x,\ y_n \to y \Rightarrow x_n + y_n \to x + y,\ x_n - y_n \to x - y,\ x_n z \to xz,\ zx_n \to zx\,.$$

Pak R nazveme topologickým okruhem.

Věta. *Buď R topologický okruh s jednotkou e; buď $0 \neq x \in R$ prvek, pro který existuje prvek $z \in R$ tak, že* $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{\nu=0}^{n} x^\nu = z$.[3])

---

[5]) Z této části poučky lze odvoditi jednoduchou úvahou poučku, kterou uvádí kniha *Kadeřávek-Klíma-Kounovský*: „*Deskriptivní geometrie*" (II. díl) a která zní takto:

„*Kuželosečky, dvakrát se dotýkající dané kuželosečky (námi nazvané dvojstyčné) a procházející dvěma danými body, jsou rozloženy do dvou soustav, dotýkajících se dané kuželosečky vždy v bodech téže kvadratické involuce. Středy těchto involucí jsou samodružné body involuce, určené průsečíky spojnice daných bodů s danou kuželosečkou a oběma danými body.*"

Středy uvedených kvadratických involucí jsou zřejmě totožné s našimi body P_1, P_2, jejichž poláry pro k tvoří geometrické místo pólů spojnic dotykových bodů jednotlivých dvojstyčných kuželoseček.

Citovaná poučka je v uvedené knize dokázána synthetický za pomoci rotačních ploch 2. stupně, tedy jiným postupem, než jsme zvolili v tomto článku.

---

[1]) *I. M. Gelfand*, Normierte Ringe, Matematičeskij sbornik T 9.

[2]) Definice okruhu: *B. L. van der Waerden*, Moderne algebra; definice prostoru L^*: *Kuratowski*, Topologie I, (1948), str. 83.

[3]) Pro $x \neq 0$ klademe $x^0 = e$.