Časopis pro pěstování matematiky

Bedřich Pondělíček

Průměr grafu pologrupy

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 92 (1967), No. 2, 206--211

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108143`

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1967

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

PRŮMĚR GRAFU POLOGRUPY

BEDŘICH PONDĚLÍČEK, Poděbrady

(Došlo dne 25. ledna 1966)

Je-li S pologrupa, potom systém všech jejích vlastních podpologrup označme $\mathscr{S}$. Grafem $G(\mathscr{S})$ systému $\mathscr{S}$ nazýváme graf, jehož uzly představují prvky $\mathscr{S}$ a dva uzly jsou v něm spojeny (jedinou) hranou právě tehdy, jestliže odpovídající podpologrupy mají neprázdný průnik. J. BOSÁK [1] dokázal, že obsahuje-li periodická pologrupa aspoň tři prvky, potom je graf $G(\mathscr{S})$ souvislý a jeho průměr je roven nejvýše třem. Dále pak B. ZELINKA [2] dokázal, že obsahuje-li komutativní pologrupa aspoň čtyři prvky, potom je graf $G(\mathscr{S})$ souvislý a jeho průměr je roven nejvýše dvěma. V článku budeme vyšetřovat graf $G(\mathscr{S})$ pro libovolnou pologrupu S a dokážeme, že kromě čtyř vyjímek je souvislý a jeho průměr je nejvýše roven třem. Zároveň tím vyřešíme problém 1 z práce [1]. Východiskem našich úvah bude následující lemma.

Symbolem $[P]$, kde P je neprázdná podmnožina pologrupy S, označme podpologrupu generovanou množinou P (viz [3]) a symbolem $\delta(G)$, kde G je souvislý graf, označme průměr tohoto grafu (viz [4]). Konečně nechť S_0 je dvojprvková nulová pologrupa, tj. $S_0 = [a, b]$, kde $a^2 = ab = ba = b^2 = b$.

Lemma 1. *Systém $\mathscr{S}$ je neprázdný právě tehdy, jestliže pologrupa S obsahuje aspoň dva prvky. V tomto případě:*

0. $\delta(G) \leqq 3$ *tehdy a jen tehdy, jestliže ke každým dvěma prvkům a, b z S existují přirozená čísla n, m a prvek u z S tak, že* $[a^n, u] \neq S \neq [b^m, u]$.

1. $\delta(G) \leqq 2$ *tehdy a jen tehdy, jestliže ke každým dvěma prvkům a, b z S existují přirozená čísla n, m tak, že* $[a^n, b^m] \neq S$.

2. $\delta(G) \leqq 1$ *tehdy a jen tehdy, jestliže ke každým dvěma prvkům a, b z S existují přirozená čísla n, m tak, že* $a^n = b^m$.

3. $\delta(G) = 0$ *tehdy a jen tehdy, je-li S cyklická grupa s prvočíselným řádem nebo je rovna pologrupě* S_0.

Důkaz. Je-li systém $\mathscr{S}$ neprázdný, potom pologrupa S obsahuje aspoň jednu vlastní podpologrupu, a má tedy aspoň dva prvky. Obsahuje-li pologrupa S aspoň dva prvky, potom je pro a z S buď podpologrupa $[a]$ vlastní nebo $[a] = S$ má aspoň dva prvky a obsahuje sama vlastní podpologrupu. Nechť dále pologrupa S obsahuje aspoň dva prvky.

0. Je-li $\delta(G) \leqq 3$, potom ke každým dvěma vlastním podpologrupám A, B pologrupy S existují vlastní podpologrupy C, D pologrupy S tak, že průniky $A \cap C$, $C \cap D$, $D \cap B$ jsou neprázdné. Zřejmě ke každým dvěma prvkům a, b z S existují vlastní podpologrupy A, B pologrupy S tak, že $A \subseteq [a]$ a $B \subseteq [b]$. Nechť $u \in C \cap D$ a n, m jsou taková přirozená čísla, že $a^n \in A \cap C$, $b^m \in D \cap B$. Zřejmě $[a^n, u] \subseteq C$ a $[b^m, u] \subseteq D$.

Nechť naopak ke každým dvěma prvkům a, b z S existují přirozená čísla n, m a prvek u z S tak, že $[a^n, u] \neq S \neq [b^m, u]$. Jsou-li A, B dvě vlastní podpologrupy, potom nechť $a \in A$, $b \in B$. Položíme-li $C = [a^n, u]$, $D = [b^m, u]$, potom jsou zřejmě průniky $A \cap C$, $C \cap D$, $D \cap B$ neprázdné a $\delta(G) \leqq 3$.

1. Je-li $\delta(G) \leqq 2$, potom ke každým dvěma vlastním podpologrupám A, B pologrupy S existuje vlastní podpologrupa C pologrupy S tak, že průniky $A \cap C$, $C \cap B$ jsou neprázdné. Ke každým dvěma prvkům a, b z S existují zřejmě vlastní podpologrupy A, B pologrupy S tak, že $A \subseteq [a]$ a $B \subseteq [b]$. Nechť n, m jsou taková přirozená čísla, že $a^n \in A \cap C$, $b^m \in C \cap B$. Zřejmě $[a^n, b^m] \subseteq C$.

Nechť naopak ke každým dvěma prvkům a, b z S existují přirozená čísla n, m tak, že $[a^n, b^m] \neq S$. Jsou-li A, B dvě vlastní podpologrupy, potom položme $C = [a^n, b^m]$, kde $a \in A$, $b \in B$. Průniky $A \cap C$, $C \cap B$ jsou zřejmě neprázdné a $\delta(G) \leqq 2$.

2. Je-li $\delta(G) \leqq 1$, potom každé dvě vlastní podpologrupy pologrupy S jsou incidentní. Zřejmě ke každým dvěma prvkům a, b z S existují vlastní podpologrupy A, B pologrupy S tak, že $A \subseteq [a]$ a $B \subseteq [b]$. Existují tedy přirozená čísla n, m taková, že $a^n = b^m \in A \cap B$.

Jestliže naopak ke každým dvěma prvkům a, b z S existují přirozená čísla n, m tak, že $a^n = b^m$, potom jsou každé dvě vlastní podpologrupy A, B incidentní, protože $a^n = b^m \in A \cap B$ pro $a \in A$, $b \in B$. Je tedy $\delta(G) \leqq 1$.

3. Podle věty 3 z [1] $\delta(G) = 0$ právě tehdy, je-li S cyklická grupa s prvočíselným řádem nebo je-li rovna pologrupě S_0.

Definice: Řekneme, že pologrupa S je *silně generovaná* (*dvěma prvky*), jestliže existují prvky a, b z S tak, že $S = [a^n, b^m]$ pro všechna přirozená čísla n, m. Dvojici prvků (a, b) nazveme *dvojicí silných generátorů* pologrupy S.

Poznámka 1. Z lemmatu 1 plyne, že graf $G(\mathcal{S})$ silně generované pologrupy S obsahující aspoň dva prvky je buď nesouvislý nebo $\delta(G) \geqq 3$.

Poznámka 2. Snadno se ověří, že následující pologrupy S_i ($i = 1, 2, 3, 4$ a 5) jsou silně generované:

1. $S_1 = [a]$, kde $a^2 = a$. Zřejmě systém $\mathcal{S}$ je prázdný.

2. $S_i = [a, b]$ $(i = 2, 3, 4)$, kde násobení je dáno tabulkou

S_2	a	b
a	a	b
b	b	b

S_3	a	b
a	a	b
b	a	b

S_4	a	b
a	a	a
b	b	b

Ve všech třech případech je graf $G(\mathscr{S})$ nesouvislý a obsahuje dva izolované uzly.

3. $S_5 = [a, b, c]$, kde násobení je dáno tabulkou

	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	a
c	a	a	c

Graf $G(\mathscr{S})$ je souvislý a $\delta(G) = 3$.

Věta 1. *Není-li pologrupa S silně generovaná, potom graf $G(\mathscr{S})$ je souvislý a $\delta(G) \leqq 2$.*

Důkaz plyne z lemmatu 1 a z definice.

Věta 2. *Je-li pologrupa S silně generovaná a různá od pologrup S_i $(i = 1, 2, 3$ a $4)$, potom je graf $G(\mathscr{S})$ souvislý a $\delta(G) = 3$.*

Dříve než přistoupíme k důkazu této věty, dokážeme následující lemmata:

Lemma 2. *Nechť silně generovaná pologrupa S různá od pologrup S_1, S_2 a S_3 má dvojici silných generátorů (a, b). Platí-li $aS = S$ a $a \in Sa$, potom je graf $G(\mathscr{S})$ souvislý a $\delta(G) = 3$.*

Důkaz. Jelikož $a \in Sa$, tedy existuje prvek e v S tak, že $a = ea$. Pro každé $x \in S$ pak platí, že $x \in aS$, a tudíž $x = ay$, kde $y \in S$, z čehož plyne, že $ex = eay = ay = x$. Zřejmě $e^2 = e$.

1. Nechť existuje prvek x v S tak, že (x, e) je dvojice silných generátorů v S. Je tedy $x \in S = [x^2, e]$. Je-li $x = e^n = e$, potom $S = [e] = S_1$, což je spor. Je-li $x = x^n$ nebo $x = x^n e$ $(n > 1)$, potom v druhém případě $x^2 = x^n ex = x^{n+1}$. Existuje tedy přirozené číslo m tak, že $x^m = f$, kde $f^2 = f$. Zřejmě $S = [f, e]$, kde $ef = f$. Je-li $f = e$, potom $S = S_1$, a to je spor. Je-li $f \neq e$ a $fe = f$, potom $S = S_2$, což je též spor. Je-li $f \neq e$ a $g = fe \neq f$, potom buď $g = e$, což znamená, že $S = S_3$, a to je spor; nebo $g \neq e$, a dostaneme pologrupu S_6, kde násobení je dáno tabulkou

	f	e	g
f	f	g	g
e	f	e	g
g	f	g	g

Snadno se zjistí, že graf $G(\mathscr{S})$ je souvislý a $\delta(G) = 3$.

2. Nechť pro žádné x z S (x, e) není dvojicí silných generátorů v S. Je-li tedy $x, y \in S$, potom existují přirozená čísla n, m tak, že $[x^n, e] \neq S \neq [y^m, e]$, což podle lemmatu 1 znamená, že graf $G(\mathscr{S})$ je souvislý a $\delta(G) \leqq 3$. Z poznámky 1 pak plyne, že $\delta(G) = 3$.

Lemma 3. *Nechť silně generovaná pologrupa S různá od pologrup S_1, S_2 a S_4 má dvojici silných generátorů (a, b). Platí-li $Sb = S$ a $b \in bS$, potom je graf $G(\mathscr{S})$ souvislý a $\delta(G) = 3$.*

Důkaz je analogický důkazu lemmatu 2.

Důkaz věty 2. 1. Nechť pro každou dvojici silných generátorů (a, b) pologrupy S platí $aS = S = Sb$ nebo $bS = S = Sa$. Nechť $x, y \in S$. Je-li (x, y) dvojice silných generátorů pologrupy S, potom buď $xS = S = Sy$ nebo $yS = S = Sx$. Nechť nejdříve $xS = S = Sy$. Je-li $[x^2, yx] = S$, potom $xS = S = Sx$ a věta 2 plyne z lemmatu 2. Stejně tak, je-li $[yx, y^2] = S$, protože potom $yS = S = Sy$. V opačném případě $[x^2, yx] \neq S \neq [yx, y^2]$. Analogickou úvahu můžeme provést, jestliže $yS = S = Sx$. Pokud (x, y) není dvojicí silných generátorů pologrupy S, potom existují přirozená čísla n, m tak, že $[x^n, y^m] \neq S$. Plyne tedy věta 2 z lemmatu 1 a z poznámky 1.

2. Nechť existuje taková dvojice silných generátorů (a, b) pologrupy S, že neplatí ani $aS = S = Sb$ ani $bS = S = Sa$. Je-li $aS = S \neq Sb$, potom $a \in Sa$. Platí totiž $S = Sa \cup Sb$ a kdyby $a \in Sb$, potom $a = ub$ pro $u \in S$, a tudíž pro každé x z S je buď $x = vb$ nebo $x = va$ pro $v \in S$ a v druhém případě $x = vub$. Je tedy $S = Sb$, což je spor. Věta 2 pak plyne z lemmatu 2. Stejně tak v ostatních případech, tj. buď $aS \neq S = Sb$ nebo $bS = S \neq Sa$ nebo $bS \neq S = Sa$, plyne věta 2 z lemmatu 2 nebo z lemmatu 3. Zbývá tedy poslední možnost, že $aS \neq S \neq Sb$ a $bS \neq S \neq Sa$. Je-li $x, y \in S$, potom x a xy leží buď v aS nebo v bS. Stejně tak xy, y leží buď v Sa nebo v Sb. Je tedy $[x, xy] \neq S \neq [xy, y]$. Z lemmatu 1 a z poznámky 1 pak plyne věta 2.

Věta 3. *Je-li pologrupa S různá od pologrup S_i $(i = 1, 2, 3, 4)$, potom je graf $G(\mathscr{S})$ souvislý a $\delta(G) \leqq 3$. Přičemž*

1. *$\delta(G) \leqq 2$ tehdy a jen tehdy, není-li pologrupa S silně generovaná.*
2. *$\delta(G) \leqq 1$ tehdy a jen tehdy, jestliže ke každým dvěma prvkům a, b z S existují přirozená čísla n, m tak, že $a^n = b^m$.*
3. *$\delta(G) = 0$ tehdy a jen tehdy, je-li S cyklická grupa s prvočíselným řádem nebo je rovna pologrupě S_0.*

Důkaz plyne z lemmatu 1 a z vět 1 a 2.

Poznámka 3. Je-li S periodická pologrupa, potom je možné podmínku 2 ve větě 3 nahradit podmínkou

2'. $\delta(G) \leqq 1$ *tehdy a jen tehdy, obsahuje-li pologrupa S právě jediný idempotent.*

Viz (Theorem 1 [1]).

Důkaz: Má-li periodická pologrupa jediný idempotent e, potom ke každým dvěma prvkům a, b z S existují přirozená čísla n, m tak, že $a^n = e = b^m$. Má-li periodická pologrupa aspoň dva různé idempotenty e, f, potom pro všechna přirozená čísla n, m platí $e^n = e \neq f = f^m$.

Poznámka 4. Má-li komutativní pologrupa aspoň čtyři prvky, potom $\delta(G) \leqq 2$. Viz (Věta [2]). Snadno se ověří, že existují právě tři komutativní silně generované pologrupy — S_1, S_2 a S_5. Je tedy S_5 jediná komutativní pologrupa, pro kterou $\delta(G) = 3$.

Literatura

[1] *J. Bosák:* The graphs of semigroups. Theory of graphs and its applications. Proceedings of the Symposium held in Smolenice in June 1963. Praha 1964, 119—125.

[2] *B. Zelinka:* Průměr grafu systému vlastních podpologrup komutativní pologrupy. Matematicko-fyzikálny časopis *15* (1965), 143—145.

[3] *Е. С. Ляпин:* Полугруппы. ГИФ-МЛ, Москва 1960.

[4] *C. Berge:* Théorie des graphes et ses applications. Paris 1958.

Adresa autora: Poděbrady - zámek (Fakulta elektrotechnická ČVUT).

Резюме

ДИАМЕТР ГРАФА ПОЛУГРУППЫ

БЕДРЖИХ ПОНДЕЛИЧЕК (Bedřich Pondělíček), Подебрады

Пусть $\mathscr{S}$ — система всех собственных подполугрупп полугруппы S, $G(\mathscr{S})$ — граф, вершины которого являются элементами из $\mathscr{S}$, две вершины соединены одним ребром тогда и только тогда, если соответствующие подполугруппы имеют непустое пересечение. Полугруппу S мы назовем *сильно порожденной* (*двумя элементами*), если $S = [a^n, b^m]$ для $a, b \in S$ и для всех натуральных чисел n, m. Символом $[P]$, где P — непустое подмножество полугруппы S, мы обозначим подполугруппу, порожденную множеством P.

В этой работе доказан следующая теорема:

Если полугруппа S отличается от полугрупп S_i ($i = 1, 2, 3, 4$), то граф $G(\mathscr{S})$ связный и его диаметр $\delta(G)$ меньше или равен трем.

Притом

1. $\delta(G) \leqq 2$ *тогда и только тогда, если полугруппа S неявляется сильно порожденной.*

2. $\delta(G) \leqq 1$ *тогда и только тогда, если для каждых двух елементов a, b из S существуют натуральные числа n, m так, что* $a^n = b^m$.

3. $\delta(G) = 0$ *тогда и только тогда, если S – циклическая группа простого порядка или если S равна полугруппе* S_0.

Summary

THE DIAMETER OF GRAPH OF SEMIGROUP

BEDŘICH PONDĚLÍČEK, Poděbrady

Let $\mathcal{S}$ be a system of all proper subsemigroups of a semigroup S, $G(\mathcal{S})$ the graph vertices of which are the elements of $\mathcal{S}$ and two vertices are joined by an edge if and only if the corresponding subsemigroups have a non-empty intersection. A semigroup S is said to be *strong generated* (*by two elements*) if $S = [a^n, b^m]$ for $a, b \in S$ and for all positive integers n, m. By the symbol $[P]$, where P is a non-empty subset of the semigroup S, we denote a subsemigroup generated by a set P.

In this paper the following theorem is proved:

If a semigroup S is not equal to the semigroups S_i $(i = 1, 2, 3, 4)$, *then the graph* $G(\mathcal{S})$ *is connected and its diameter* $\delta(G)$ *is at the most equal to three. Moreover*

1. $\delta(G) \leqq 2$ *if and only if a semigroup S is not strong generated.*

2. $\delta(G) \leqq 1$ *if and only if for any two elements a, b of S exist positive integers n,m such that* $a^n = b^m$.

3. $\delta(G) = 0$ *if and only if S is a cyclic group of prime order or is equal to a semigroup* S_0.