

Jiří Hořejš

Automaty bez vnitřní paměti

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 92 (1967), No. 2, 193--205

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/108136>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1967

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



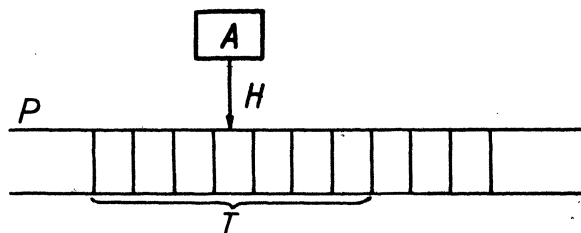
This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

AUTOMATY BEZ VNITŘTNÍ PAMĚTI

Jiří HOŘEJŠ, Brno

(Došlo dne 17. ledna 1966)

Uvažme klasický model automatu s vnější pamětí a se vstupem (Turingův stroj se vstupem). Zařízení sestává z konečného automatu **A**, pásky **P** rozdělené na pole



Obr. 1.

a hlavy **H** zprostředkující interakci částí **A** a **P**. Tato interakce a tím i činnost celého zařízení je popsána množinou vztahů, z nichž každý je tvaru

$$(1) \quad x_j q_p s_r \rightarrow s_{\bar{r}} q_{\bar{p}} M,$$

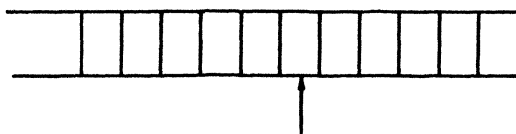
kde x_j označuje nějaký prvek ze vstupní abecedy $X = (x_1, \dots, x_k)$, q_p a $q_{\bar{p}}$ prvky z množiny vnitřních stavů $Q = (q_1, \dots, q_n)$ konečného automatu **A**, s_r a $s_{\bar{r}}$ symboly z pracovní abecedy $S = (s_1, \dots, s_m)$ a M jeden ze tří symbolů R, L, N , udávajících změnu polohy hlavy **H** (po řadě: posuv vpravo, posuv vlevo, žádný posuv). Omezíme-li činnost celého zařízení tak, aby bylo zajištěno, že bude využit jen omezený kus pásky **T** délky t (viz obr. 1), pak ho můžeme interpretovat jako nový konečný automat **D** s celkovým počtem vnitřních stavů \hat{n} splňujícím vztah

$$(2) \quad \hat{n} \leq n \cdot t \cdot m^t$$

Vzniká pak přirozená otázka, jak lze obráceně daný konečný automat **D** realizovat ve formě spojení konečného automatu **A** s páskou **P**, t. zn. jak lze rozštěpit automat na vnitřní a vnější část. Je patrné, že (2) udává nutnou podmínku pro možnost takové realizace. Tato podmínka však není zdaleka postačující, což je dáno tím, že z libo-

volného z $t \cdot m'$ stavů pásky \mathbf{P} (přihlížíme i k poloze \mathbf{H}) lze po aplikaci libovolného vstupního symbolu (tj.: v jednom taktu) dosáhnout pouze jednoho z $3m$ stavů (které jsou v jistém smyslu blízké výchozímu). S druhé strany je vidět, že formulovaná otázka má dvě triviální řešení, nejsme-li nijak omezeni při výběru čísel m, n, t : jednak stačí položit $n = n', m = t = 1$ (uvažovat pásku je v tomto případě ovšem zbytečné), jednak stačí volit $m = n', n = t = 1$ (přesnější formulace této úvahy se objeví ve větě 6 níže). Právě tento druhý případ – kdy automat je realizován výhradně vnější pamětí – je motivací úvah rozvíjených dále. I když na obecnou otázku rozkladu konečného automatu na vnitřní a vnější část navazuje řada zajímavých problémů, v této práci se omezíme jen na studium systémů, u nichž \mathbf{A} je jednostavový automat (tj. automat bez paměti: veškerá paměť je vnější). Uvedeme některé charakterizace množin reprezentovatelných různými typy takových zařízení, sestavíme jistou jejich hierarchii a upozorníme na souvislosti s příklady množin, uváděných v literatuře.

Automatem $\bar{\mathbf{A}}$ typu i ($i = 1, 2, 3$) bez vnitřní paměti (v dalším též stručně automatem, příp. automatem typu i) nad abecedou $X = (x_1, \dots, x_k)$ s pracovní abecedou $S = (s_1, \dots, s_m)$ nazveme zařízení sestávající z pásky rozdělené na pole (viz obr. 2)



Obr. 2.

a hlavy (na obr. znázorněna šipkou), jehož činnost je dána vztahy tvaru:

- (3) pro $i = 1$) $x_j \rightarrow M$
- (4) pro $i = 2$) $x_j s_r \rightarrow M$
- (5) pro $i = 3$) $x_j s_r \rightarrow s_r M$,

přičemž množina těchto definujících vztahů obsahuje pro každé $j, 1 \leq j \leq k$, a (v případě $i = 2, 3$) každé $r, 1 \leq r \leq m$, vždy právě jeden vztah s levou stranou $x_j s_r$, (příp. x_j pro $i = 1$). M nabývá hodnot R, L, N , udávajících běžným způsobem pohyb hlavy.

Automat typu 1 pracuje tedy tak, že se jeho hlava v závislosti na vstupním signálu pohybuje doprava, doleva či zůstává na místě (nechte, netiskne), hlava automatu typu 2 se pohybuje v závislosti na vstupu a na pozorovaném symbolu (čte, netiskne), hlava automatu typu 3 v závislosti na vstupu a pozorovaném symbolu provede přepis symbolu na pásku a příslušný pohyb (čte, tiskne). Odůvodnění názvu (automaty bez vnitřní paměti) plyne okamžitě ze srovnání (1) a (3)–(5), motivace definice je dána jednak úvodními úvahami článku, jednak úvahami, podobnými těm, které jsou

pro analogické případy popsány v literatuře (srv. např. [3], [6]). Poznamenejme ještě, že mají-li být automaty bez vnitřní paměti modelem pro reálná zařízení (manipulace s vnější pamětí), pak případ $i = 2$ odpovídá použití děrné pásky (není možno libovolně přepisovat – viz ještě poznámku 1 za větou 6: automaty typu 3'), případ $i = 3$ odpovídá užití pásky magnetické.

Automat typu i reprezentuje jev $U (U \subset X^\infty)$, existuje-li počáteční konfigurace (tj. počáteční zápis na pásce takový, že s výjimkou konečného počtu polí je na všech zapsán symbol s_1 odpovídající prázdnému znaku a počáteční poloha hlavy na pásce) a taková podmnožina S^+ množiny S , že $u \in U$ právě když po aplikaci vstupního slova u se automat dostane do konfigurace, v níž hlava je nad polem, na němž je zapsán některý ze symbolů množiny S^+ (takové symboly nazýváme vyznačené). Jev U nad abecedou X je i -reprezentovatelný, existuje-li automat typu i nad abecedou X s vhodnou pracovní abecedou S , který ho reprezentuje. Přirozenost těchto definic vyplývá ze srovnání analogických definic pro konečné automaty (reprezentující regulární jevy).

Úkolem prvních šesti vět je podat jisté charakterizace i -reprezentovatelných jevů a zejména pak popsat jejich vzájemné vztahy jakož i vztahy k jevům regulárním.

Věta 1. *Jev U nad abecedou X je 1-reprezentovatelný právě když platí: existuje rozklad množiny X na (navzájem disjunktní) množiny X_1, X_2, X_3 tak, že $u \in U$ právě když rozdíl $|u_{X_1}| - |u_{X_2}|$ je roven některému celému číslu z vhodné jejich množiny, která je buď konečná nebo má konečný doplněk. $|u_{X_i}|$ přitom označuje počet prvků množiny X_i obsažených ve slově u ($i = 1, 2$).*

Důkaz. Nechť automat \bar{A} typu 1 reprezentuje jev U . Činnost automatu je dána vztahy (3). Definujeme hledaný rozklad podmínkami:

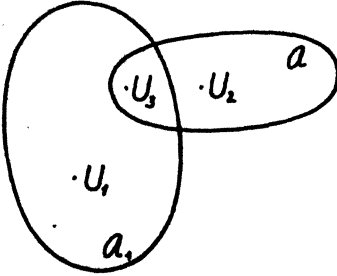
$$(6) \quad x_j \rightarrow R \quad \text{pro } x_j \in X_1, \quad x_j \rightarrow L \quad \text{pro } x_j \in X_2, \quad x_j \rightarrow N \quad \text{pro } x_j \in X_3.$$

Očíslujeme celými čísly po řadě jednotlivá pole pásky tak, že pole, nad nímž je hlava, v počáteční konfiguraci vystupuje jako nulté, a utvořme množinu $C = (c_1, c_2, \dots)$ všech celých čísel, která označují pole, na nichž je zapsán nějaký vyznačený symbol. C je buď konečná (je-li symbol s_1 nevyznačený) nebo má konečný doplněk (v opačném případě). Je-li nyní dáno vstupní slovo $u \in X$, pak po jeho aplikaci se posune hlava právě o $|u_{X_1}| - |u_{X_2}|$ polí vpravo a octne se tedy nad nějakým vyznačeným polem právě když tento rozdíl patří do C . Při důkazu obráceného tvrzení vycházíme od dané množiny C , konstruujeme podle ní počáteční konfiguraci a definujeme činnost automatu A typu 1 vztahy (6), kde X_i jsou nyní dána ($i = 1, 2, 3$). Detaily této části důkazu přenecháváme čtenáři.

Označme písmenem \mathfrak{U} množinu všech regulárních jevů, písmeny \mathfrak{U}_i ($i = 1, 2, 3$) množinu všech i -reprezentovatelných jevů. Vzájemné vztahy těchto množin budeme zachycovat graficky. Přitom budeme mít vždy na mysli jevy nad toutéž pevně danou abecedou $X = (x_1, \dots, x_k)$, $k \geq 2$.

Věta 2. *Vzájemný vztah mezi množinou všech regulárních jevů a jevů 1-reprezentovatelných je dán na obr. 3.*

Důkaz. Je třeba ukázat existenci jevů U_1, U_2, U_3 . Za jev U_1 vezmeme množinu všech slov u splňujících vztah $|u_{X_1}| = |u_{X_2}|$, kde X_1, X_2 tvoří libovolný rozklad množiny X takový, že $X_1 \neq \emptyset \neq X_2$. Jak je známo, $U_1 \notin \mathfrak{A}$, podle věty 1 však $U_1 \in \mathfrak{A}_1$. Existence U_2 bude dokázána (v silnější formě) ve větě 5. Do $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}_1$ patří m. j. triviální jevy: $U_3 = \emptyset$ resp. $U_3 = X^\infty$; stačí položit $x_j \rightarrow N$ pro všechna j , $1 \leq j \leq k$ a vyznačit resp. nevyznačit symbol, nad nímž se nachází hlava na začátku.



Obr. 3.

Abychom získali částečnou charakterizaci jevů 2-reprezentovatelných, zavedeme nyní tuto definici: konečný Mooreův automat (obvyklého typu, tj. zadaný vztahy $x_j q_r \rightarrow q_{\bar{r}}$) nazveme *uspořádaným*, lze-li jeho stavy očíslovat přirozenými čísly $1, 2, \dots, n$ tak, že pro každý symbol x_j vstupní abecedy je

$$(7) \quad x_j q_r \rightarrow q_{\bar{r}},$$

kde $r - 1 \leq \bar{r} \leq r + 1$ pro všechna r , $1 \leq r \leq n$ (pro $r = 1$ klademe $r - 1 = 1$, pro $r = n$ klademe $r + 1 = n$).

Věta 3. *Je-li konečný automat \mathbf{A} o n stavech uspořádaný, existuje automat \mathbf{A} typu 2 reprezentující tentýž jev. $\bar{\mathbf{A}}$ lze při tom volit tak, aby užíval pouze konečné části pásky délky n a aby jeho pracovní abeceda neměla víc jak $\min(n, 2 \cdot 3^k)$ symbolů.*

Důkaz. Zvolme n sousedních polí pásky, očíslovejme je po řadě čísly $1, 2, \dots, n$

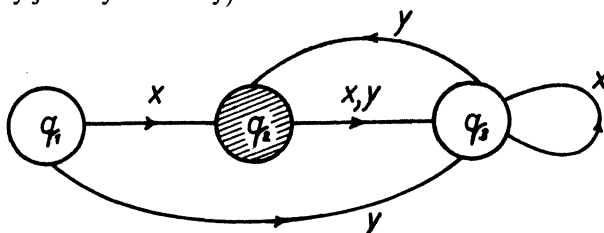
a zapišme na r -té pole vektor $\begin{pmatrix} M_{r1} \\ \vdots \\ M_{rk} \end{pmatrix}$ sestavený z pravých stran vztahů (7), definujících

konečný automat \mathbf{A} , v nichž místo $q_{\bar{r}}$ píšeme: pro $\bar{r} = r + 1$ $M_{rj} = R$, pro $\bar{r} = r - 1$ $M_{rj} = L$ a pro $\bar{r} = r$ $M_{rj} = N$. Každý z vektorů je navíc opatřen indexem $\alpha = 0$ či $\alpha = 1$ podle toho, zda r -tý stav q_r konečného automatu \mathbf{A} je či není vyznačen. Takto utvořených vektorů je nejvýše $2 \cdot 3^k$ navzájem různých; nechť tvoří pracovní abecedu konstruovaného automatu $\bar{\mathbf{A}}$, v níž jsou právě ty symboly, opatřené indexem 0. Činnost automatu $\bar{\mathbf{A}}$ definujeme vztahy

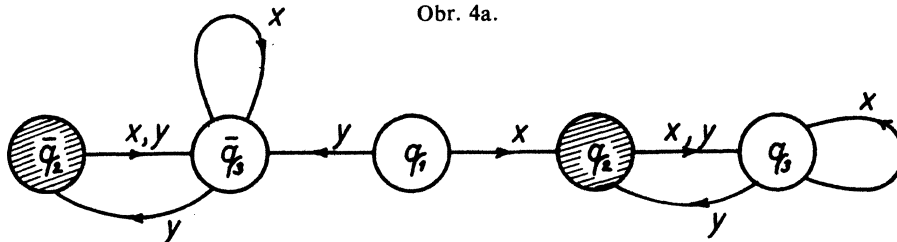
$$x_j \begin{pmatrix} M_{r1} \\ \vdots \\ M_{rk} \end{pmatrix}_\alpha \rightarrow M_{rj}$$

pro $1 \leq j \leq k$. Tento automat typu 2 splňuje požadavky věty a jeho konstrukcí končí její důkaz.

Jak ukazuje příklad konečného automatu z obr. 4a, existují konečné automaty, které nejsou uspořádané a přesto jevy jimi reprezentované jsou 2-representovatelné: řadu konečných automatů lze totiž uspořádat, tj. nalézt k nim uspořádaný konečný automat, reprezentující týž jev (obr. 4b; počátečními stavy jsou na obr. 4 vždy stavy q_1 , vyznačené stavy jsou vyšrafovány).



Obr. 4a.



Obr. 4b.

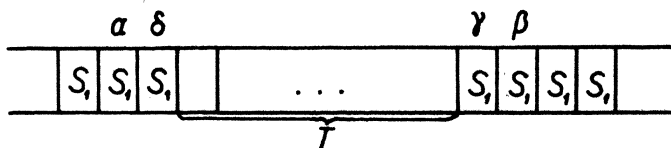
Poněvadž třída automatů typu 2 obsahuje třídu automatů typu 1, nelze podle věty 2 větu 3 obrátit. Omezíme-li se však na automaty typu 2 reprezentující regulární jevy, obrácené tvrzení platí:

Věta 4. *Reprezentuje-li automat \bar{A} typu 2 regulární jev R , lze tento jev reprezentovat také vhodným uspořádaným konečným automatem.*

Důkaz. Uvedeme nejprve následující:

Lemma. *Jev reprezentovaný automatem typu 2 užívajícím pouze omezené části pásky délky n lze reprezentovat vhodným uspořádaným konečným automatem o nejvýše n stavech.*

Důkaz lemmatu je jednoduchý a přenecháváme ho čtenáři. Důkaz věty probíhá nyní takto: nechť T označuje tu část pásky automatu \bar{A} , mimo níž jsou zapsány již pouze symboly s_1 (obr. 5).



Obr. 5.

Jestliže nyní mezi vztahy (4), definujícími $\bar{\mathbf{A}}$ není dvojice

$$(8) \quad x_j s_1 \rightarrow R, \quad x_j s_1 \rightarrow L$$

pak jakmile $\bar{\mathbf{A}}$ sejde s T o víc než jedno pole, již se nad T nevrátí (zůstává stát nebo se vzdaluje), takže pozoruje již jen symbol s_1 . Zapišeme-li tedy na políčka α a β nový symbol \bar{s} (který není symbolem pracovní abecedy automatu $\bar{\mathbf{A}}$), vyznačíme-li resp. nevyznačíme-li ho podle toho, je-li či není-li vyznačený symbol s_1 a přidáme-li ke vztahům definujícím činnost $\bar{\mathbf{A}}$ dalších k vztahů

$$(9) \quad x_j \bar{s} \rightarrow N \quad \text{pro všechna } j, \quad 1 \leq j \leq k,$$

pak získáme automat $\bar{\mathbf{A}}$ typu 2 nad rozšířenou abecedou $\{s_1, \dots, s_m, \bar{s}\}$, který reprezentuje tentýž jev jako automat $\bar{\mathbf{A}}$ a splňuje navíc požadavky lemmatu. Nechť tedy (8) platí pro vhodná j, \bar{j} . Předpokládejme, že existuje vstupní slovo u , po jehož aplikaci přejde automat $\bar{\mathbf{A}}$ z počáteční konfigurace do takové, v níž jeho hlava sejde s částí T ; bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že sejde vpravo, takže se dostane na pole označené písmenem γ . Kdyby takové slovo u neexistovalo, dostaneme opět případ zahrnutý v lemmatu. Buď dále v slovo nejkratší délky takové, po jehož aplikaci se hlava dostane z pole γ nad nějaký vyznačený (nevyznačený) symbol v T , při čemž předpokládáme, že s_1 je nevyznačený (vyznačený). Jestliže slovo o této vlastnosti neexistuje, přepíšeme s_1 na γ na \bar{s} a použijeme stejného obratu jako v případě popsaném vztahem (9). Dostaneme tak opět případ spadající pod lemma. Zbývá tedy vyšetřit případ, kdy obě slova u, v existují. Uvažme nyní jevy $R_1 = \{ux_j^t x_{\bar{j}}^t v \mid t \geq 0\}$, $R_2 = \{ux_j^t x_{\bar{j}}^{t'} v \mid t > t' \geq 0\}$. Z jejich definice a z (8) vyplývá, že $R_1 \subset R$ zatímco $R_2 \cap R = \emptyset$ (upozorňujeme, že v bylo slovo nejmenší délky popsané vlastností), když předpokládáme, že s_1 je symbol nevyznačený; v opačném případě dostáváme obráceně $R_1 \cap R = \emptyset$, $R_2 \subset R$. Avšak vztahy

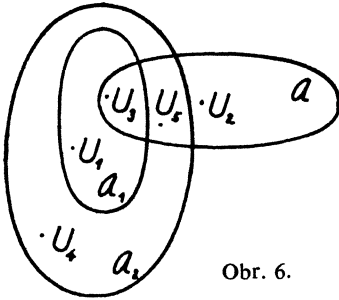
$$(10) \quad R_1 \subset R, R_2 \cap R = \emptyset \quad \text{nebo} \quad R_2 \subset R, R_1 \cap R = \emptyset$$

ukazují, že právě uvedený případ nemůže vůbec nastat: žádný jev R s vlastnostmi (10) nemůže být regulární. Předpokládejme naopak, že nějaký konečný automat \mathbf{A} reprezentuje jev R . Vzhledem k omezenému počtu stavů se \mathbf{A} dostane do téhož stavu po aplikaci slov ux_j^{t+d}, ux_j^t pro vhodné $d, d > 0$, takže musí přejít do téhož stavu i po aplikaci $ux_j^{t+d} x_{\bar{j}}^{t'} v$ i po aplikaci $ux_j^t x_{\bar{j}}^{t'} v$. Avšak první slovo náleží do R_2 , kdežto druhé do R_1 , čímž dostáváme spor s (10). Tím je důkaz věty ukončen.

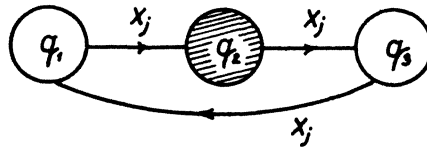
Věta 5. *Vzájemný vztah mezi množinou všech regulárních jevů, jevů 1-representovatelných a jevů 2-representovatelných je dán na obr. 6.*

Důkaz. Inkluze $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}_2$ je triviální. Za příklad jevu U_2 vezměme jev reprezentovaný kon. automatem \mathbf{A}_1 z obr. 7a (počát. stav q_1). Podle věty 4 stačí ukázat, že

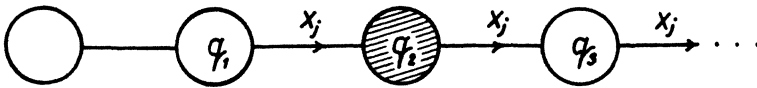
tento kon. automat nelze uspořádat. Předpokládejme opak (viz obr. 7b). Zvolme v uspoř. kon. automatu \mathbf{A}_2 nevyznačený stav q_1 . Poněvadž v \mathbf{A}_1 je $x_j q_1 \rightarrow q_2$, kde q_2 je vyznačený, nelze v \mathbf{A}_2 položit $x_j q_1 \rightarrow q_1$, ale $x_j q_1 \rightarrow q_2$, kde q_2 nový stav.



Obr. 6.

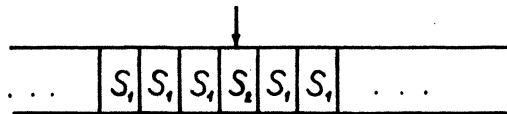


Obr. 7a.



Obr. 7b.

Dále nelze v \mathbf{A}_2 položit ani $x_j q_2 \rightarrow q_2$ (ze stejného důvodu jako prve) ani $x_j q_2 \rightarrow q_1$, poněvadž pak by kon. automat \mathbf{A}_2 reprezentoval jev, do něhož by patřilo slovo x_1^3 , které nepatří do jevu, reprezentovaného \mathbf{A}_1 . Je tedy třeba v \mathbf{A}_2 položit $x_j q_2 \rightarrow q_3$, kde $q_1 \neq q_3 \neq q_2$. Ze zcela analogických příčin nelze připustit dále ani $x_j q_3 \rightarrow q_2$ ani $x_j q_3 \rightarrow q_3$ a obecně ani $x_j q_r \rightarrow q_{r-1}$ ani $x_j q_r \rightarrow q_r$, čímž dostáváme spor s konečností automatu \mathbf{A}_2 . Jako příklad jevu U_5 nad abecedou $A = (x, y)$ (obecný případ se dá vyšetřit analogicky – podobně v dalších příkladech) může sloužit jev reprezentovaný konečným automatem z obr. 4. Podle věty 3 je $U_5 \in \mathfrak{A}_2$, podle definice je $U_5 \in \mathfrak{A}$ a konečně z věty 1 usoudíme na to, že $U_5 \notin \mathfrak{A}$: skutečně podle této věty lze o příslušnosti slova u k množině reprezentované automatem typu 1 rozhodnout výhradně na základě znalosti počtu jednotlivých symbolů vstupní abecedy ve slově u . Na druhé straně je vidět přímo z obr. 4, že $x^2 x^t y \in U_5 (t \geq 1)$, zatímco slova o stejném počtu symbolů x, y tvaru yx^{t+2} do U_5 nepatří. Konečně definujeme jev U_4 . Automat typu 2, který jej reprezentuje, má dvouprvkovou pracovní abecedu sestávající se z nevyznačeného symbolu a_1 a vyznačeného s_2 , počáteční konfiguraci podle obr. 8 a činnost danou vztahy:



Obr. 8.

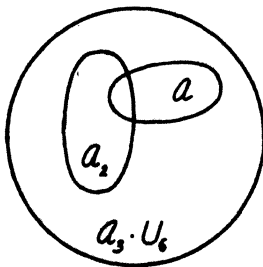
$$x s_r \rightarrow R, \quad r = 1, 2, \quad y s_1 \rightarrow L, \\ y s_2 \rightarrow N.$$

Snadno se přesvědčíme, že slova tvaru $x^t y^t (t = 1)$ patří do U_4 , zatímco slova tvaru $x^t y^{t'}$ ani slova tvaru $yx^t y^{t'-1} (t > t' \geq 1)$ tam nepatří. Z prvních dvou skutečností

vyplývá, že U_4 nemůže být reprezentováno konečným automatem, z první a poslední podle věty 1 opět, že $U_4 \notin \mathfrak{A}_1$.

Všimněme si konečně automatů typu 3; jde v podstatě o Turingovy stroje s jediným vnitřním stavem, o nichž je známo [5], že nejsou ekvivalentní obyčejným Turingovým strojům. Na druhé straně tvrzení [5], že takovéto Turingovy stroje vyčísľují pouze periodické posloupnosti, nás nesmí svést k domněnce, že jsou schopny reprezentovat jen nejjednodušší jevy. To plyne již z inkluze $\mathfrak{A}_2 \subset \mathfrak{A}_3$ a věta 5; v důkaze následující věty ukážeme, že je to dokonce již dost silný prostředek reprezentace jevů; 3-representovatelné jsou nejen všechny regulární jevy, ale i takové klasické příklady neregulárních jevů, jako je jev „býti čtvercem“ [2].

Věta 6. *Vzájemný vztah mezi množinou všech regulárních jevů, jevů 2-reprez. a jevů 3-representovatelných je dán na obr. 9.*



Obr. 9.

Důkaz. Inkluze $\mathfrak{A}_2 \subset \mathfrak{A}_3$ je triviální. Inkluzi $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}_3$ dokážeme také velmi jednoduše. Nechť je dán kon. automat \mathbf{A} s množinou stavů $Q = (q_1, \dots, q_n)$ a činností danou vztahy

$$(11) \quad x_j q_r \rightarrow q_{\bar{r}} \quad (j = 1, 2, \dots, k).$$

Sestrojíme automat $\bar{\mathbf{A}}$ typu 3 nad toutéž abecedou s pracovní abecedou $S = (s_1, \dots, s_n)$ a činností danou vztahy:

$$x_j s_r \rightarrow s_{\bar{r}} N \quad (j = 1, 2, \dots, k),$$

kde j, r, \bar{r} (a vztahy mezi nimi) jsou tytéž jako v (11). Automat $\bar{\mathbf{A}}$ tedy potřebuje pro svou práci jen jediné pole pásky a na to si zaznamenává stavy simulovaného konečného automatu \mathbf{A} (symbolem s_r značí stav q_r). Vyznačíme-li v $\bar{\mathbf{A}}$ s_r právě tehdy, je-li v \mathbf{A} vyznačen stav q_r a zapíšeme-li do pozorovaného pole pásky na začátku symbol s_p odpovídající počátečnímu stavu q_p kon. automatu \mathbf{A} , reprezentuje zřejmě $\bar{\mathbf{A}}$ týž jev jako \mathbf{A} . Přejdeme nyní ke konstrukci jevu U_6 . Sestrojíme nejprve nad abecedou $X = (x, y)$ posloupnost

$$(12) \quad xyxyyyyyxyyyyyyx \dots$$

takovou, že symbol x se objeví právě na 1, 4, 9, 16, ..., n^2 , ...-tém místě. Jev U_6 definujeme jako množinu všech (konečných) počátečních úseků této posloupnosti: $U_6 = \{x, xy, xyy, xyxy, xyxyx, \dots\}$. Abychom dokázali $U_6 \in \mathfrak{A}_3$, sestrojíme nad X automat typu 3 s pracovní abecedou $S = (s_1, s_2, s_3, s_4, s_5)$ s jediným nevyznačeným symbolem s_5 , s počáteční konfigurací podle obr. 8 a činností danou vztahy:

$$\begin{array}{ll} xs_1 \rightarrow s_5 N & \text{pro } i = 1, 3, 4, 5; \\ xs_2 \rightarrow s_2 R & \end{array} \quad \begin{array}{l} ys_j \rightarrow s_5 N \quad \text{pro } j = 2, 5 \\ ys_1 \rightarrow s_3 N \\ ys_3 \rightarrow s_4 L \\ ys_4 \rightarrow s_3 R \end{array}$$

Ověření skutečnosti, že hlava se nachází nad vyznačenými stavy právě potud, pokud se vstupní posloupnost neodchyluje od (12) (na základě toho, že hlava zachází stále hlouběji vpravo vracejíc se vždy nad výchozí pole a na základě vzorce pro součet aritmetické řady) přenecháváme čtenáři. Vztah $U_6 \notin \mathfrak{A}$ je dobře známý z literatury. Zbývá tedy dokázat $U_6 \notin \mathfrak{A}_2$. Předpokládejme opak. Nechť tedy automat $\bar{\mathbf{A}}$ typu 2 reprezentuje U_6 ; T nechť označuje tu část pásky, mimo níž jsou již zapsány pouze symboly s_1 (obr. 5). Poněvadž rozdíl $(n+1)^2 - n^2 - 1 = 2n$ odpovídající počtu symbolů y mezi n -tým a $(n+1)$ -tým symbolem x v posloupnosti (12) lze udělat libovolně velkým, musí se hlava automatu $\bar{\mathbf{A}}$ pro vhodné $u \in U_6$ vzdálit od T (libovolně daleko, tedy:) aspoň o 2 pole (jinak bychom dostali spor se vztahem (2)). Po aplikaci tohoto slova na počáteční konfiguraci se tedy dostane hlava na místo, na němž, jakož i na sousedních polích je zapsán symbol s_1 . Proto nemůže $\bar{\mathbf{A}}$ odlišit slova ux, uy , tj. do jevu, který je jím reprezentován buď obě patří či obě nepatří; tím dostáváme spor s definicí U_6 .

Poznámka 1. Vedle automatů uvedených typů by mohlo mít z hlediska interpretace dobrý smysl zavést i automaty typu 3', s funkcí přechodu tvaru (srv. s (5)): $x_j s_r \rightarrow s_r M$, kde s_r je některý ze stavů, jež je ve smyslu nějakého zadaného (částečného) uspořádání množiny S pracovních symbolů za symbolem s_r (odtud plyne m. j., že na daném poli je možno provést jen konečně mnoho přepisů). Takovýto model by postihoval jistě mezičlánky mezi automaty typu 2 a 3 a byl by zejména vhodný k vyjádření manipulace s děrnou páskou (srv. s možností doděrovat některé znaky a obtížností 'zalepit' jiné; v tomto případě je velmi snadné definovat zcela přirozené částečné uspořádání symbolů sestávajících u k -stopé děrné pásky z posloupnosti k nul a jednotek).

Poznámka 2. Simulování konečného automatu \mathbf{A} ze vztahu (11) automatem $\bar{\mathbf{A}}$ používajícím jediného pole pásky dává možnost další interpretace zavedených pojmů. Uvažme model z obr. 1, kde \mathbf{A} je jednostavový automat (bez paměti), zatímco jednotlivá pole pásky \mathbf{P} interpretujeme jako konečné automaty, z nichž v daném časovém okamžiku právě jeden přijímá vstupní signály a mění své vnitřní stavy (tj. zápisy na příslušném poli pásky \mathbf{P}) dokud – v závislosti na vstupním signálu a vnitřním stavu pracujícího konečného automatu – není řízení předáno některému sousednímu konečnému automatu.

Za účelem sledování stále „dokonalejších“ prostředků se omezíme dále jen na automaty typu 3 a zmíníme se stručně o situaci, kdy automat má k dispozici více pásek (také by bylo možno uvažovat případ více hlav na jedné pásce, který zahrnuje v jistém smyslu předcházející, viz [1]). Oba případy lze obecně popsat vztahy, jež jsou zobecněním vztahů (1); pro stručnost uvažujeme pouze případ dvou hlav:

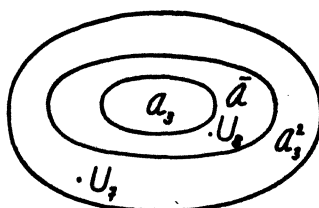
$$(13) \quad x_j q_p s_{r_1} s_{r_2} \rightarrow s_{\bar{r}_1} s_{\bar{r}_2} q_{\bar{p}} M_1 M_2$$

kde $s_{r_1}(s_{\bar{r}_1})$ je symbol čtený (psaný) hlavou č. 1, $s_{r_2}(s_{\bar{r}_2})$ symbol čtený (psaný) hlavou č. 2 a $M_1(M_2)$ udává pohyb hlavy č. 1 (2). Přejdeme-li k automatu bez vnitřní paměti

(tj. vyškrtáme-li v (13) symboly stavů $q_p, q_{\bar{p}}$), dohodneme se, že slovo u patří do jevu jím reprezentovaného právě když po aplikaci tohoto slova se aspoň jedna z hlav nachází nad vyznačeným symbolem (jsou možné různé modifikace této definice). Dokážeme níže, že v uvedeném smyslu mohou automaty s dvěma páskami víc než automaty s jednou páskou.

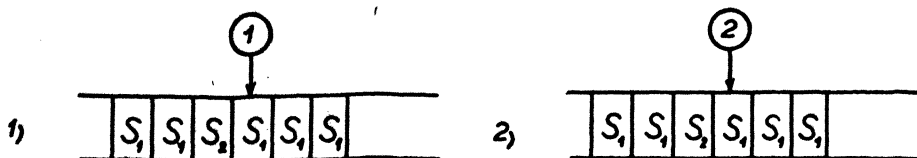
Označme písmenem \mathfrak{A} množinu všech jevů reprezentovaných (v reálném čase) automatem s jednou páskou (tj. Turingovým strojem se vstupem podle (1)) a dále symbolem \mathfrak{A}_3^2 množinu jevů reprezentovatelných automaty typu 3 se dvěma páskami.

Věta 7. *Vzájemný vztah mezi množinou všech 3-representovatelných jevů, jevů repres. automaty se vstupem a s vnitřní pamětí a jevů repres. automaty typu 3 s dvěma páskami je dán na obr. 10.*



Obr. 10.

Důkaz. Je triviálně $\mathfrak{A}_3 \subset \overline{\mathfrak{A}}$. Metodou první části důkazu věty 6 a porovnáním vztahů (13) (s vyškrtnutými symboly $q_p, q_{\bar{p}}$ a $M_2 = N$) se vztahy (1) nahlédneme, že jedna z pásek automatu $\overline{\mathfrak{A}}$ příslušejícího jevu z \mathfrak{A}_3^2 může simulovat konečný automat, takže $\overline{\mathfrak{A}}$ bez vnitřní paměti s dvěma páskami může simulovat automaty s jednou páskou s vnitřní pamětí, tj. $\overline{\mathfrak{A}} \subset \mathfrak{A}_3^2$. Za hledaný jev U_7 vezmeme ten, o němž je v [4] dokázáno, že není reprezentovatelný na jedné pásce ani „kompletním“ Turingovým strojem (ve smyslu našich dosavadních definic, tj. v reálném čase); snadno se ukáže, že odlišnost definic reprezentovatelnosti daná tím, že v našem případě uvažujeme vyznačený symbol pracovní abecedy, je z uvažovaného hlediska nepodstatná. Naším úkolem bude tedy pouze ukázat reprezentovatelnost U_7 automatem $\overline{\mathfrak{A}}$ bez vnitřní paměti s dvěma páskami. Uvažme tedy jev U_7 nad abecedou $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ definovaný: $u \in U_7$ právě když je tvaru vwx_3v^{-1} nebo tvaru vwx_6w^{-1} , kde $v(w)$ je slovo nad abecedou (x_1, x_2) ((x_3, x_4)) a z^{-1} značí slovo s opačným pořadím písmen slova z . Automat $\overline{\mathfrak{A}}$ má pracovní abecedu $S = (s_1, s_2, s_3, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$, vyznačený je právě symbol s_2 , počáteční konfigurace podle obr. 11



Obr. 11.

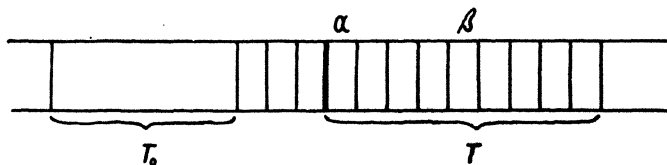
a jeho činnost dána vztahy:

<p>(14) pro pásku a hlavu č. 1</p> $x_j s_1 \rightarrow x_j R \quad j = 1, 2$ $x_j s_1 \rightarrow s_1 N \quad j = 3, 4, 6$ $x_j s_1 \rightarrow s_1 L \quad j = 5$ $x_j x_j \rightarrow s_3 L \quad 1 \leq j \leq 6$ $x_j s_2 \rightarrow s_3 N \quad 1 \leq j \leq 6$ $x_j x_i \rightarrow s_3 N \quad j \neq i$ $x_j s_3 \rightarrow s_3 N \quad 1 \leq j \leq 6$	<p>pro pásku a hlavu č. 2</p> $x_j s_1 \rightarrow s_1 N \quad j = 1, 2, 5$ $x_j s_1 \rightarrow x_j R \quad j = 3, 4$ $x_j s_1 \rightarrow s_1 L \quad j = 6$ $x_j x_j \rightarrow s_3 L \quad 1 \leq j \leq 6$ $x_j s_2 \rightarrow s_3 N \quad 1 \leq j \leq 6$ $x_j x_i \rightarrow s_3 N \quad j \neq i$ $x_j s_3 \rightarrow s_3 N \quad 1 \leq j \leq 6$
--	---

Konstrukce je v podstatě realizací ideje z lemmatu 1 z [4] pomocí automatu bez vnitřní paměti (za užití několika technických obrátů eliminujících nutnost užití takové paměti). Dále ukážeme existenci jevu U_8 . Vezmeme za něj jev nad abecedou $X = (x, y, a, b)$ (jistou modifikací důkazu by bylo možno vystačit opět s dvouprvkovou množinou) tvořený všemi slovy tvaru

(15) gug

kde g je slovo nad (x, y) o třech symbolech a $u \in R$, kde množina $R = R_1 \cup R_2$ je tvořena slovy nad abecedou (a, b) a to jednak všemi slovy liché délky (tvořícími R_1) a jednak všemi slovy obsahujícími stejný počet (≥ 1) symbolů a a symbolů b (tvořícími R_2). U_8 je evidentně reprezentovatelný vhodným automatem \mathbf{A} s vnitřní pamětí: \mathbf{A} si „pamatuje“ svou vnitřní pamětí první slovo g a paritu délky slova u a svou vnější pamětí zachycuje rozdíl v počtu symbolů a, b . Tyto údaje jsou zhodnoceny jakmile se podruhé objeví slovo nad (x, y) . Předpokládejme nyní, že U_8 je reprezentován nějakým automatem $\bar{\mathbf{A}}$ typu 3. Aspoň pro dvě z 8 možných voleb slova g – ozn. je g_1 a $g_2, g_1 \neq g_2$ – existují čísla t_1 a t_2 stejné parity tak, že po aplikaci $w_1 = g_1 a^{t_1}$ i $w_2 = g_2 a^{t_2}$ se hlava dostane poprvé nad pole β (viz obr. 12, kde T_0 označu



Obr. 12.

je úsek pásky obsahující všechna pole na nichž jsou v počáteční konfiguraci zapsány symboly různé od s_1). Tato skutečnost vyplývá z toho, že s rostoucí délkou vstupního slova tvaru ga^t se hlava nutně vzdaluje od počáteční polohy (jinak bychom opět dostali spor s (2) vzhledem k tomu, že do U_8 patří slova tvaru (15) pro $u \in R_2$) přičemž nejméně pro čtyři volby slova g na tutéž stranu – bez újmy na obecnosti předpokládáme, že vpravo – a z toho nejméně pro dvě se stejnou paritou počtu symbolů a .

Při tom zápisy na úseku T pásky jsou po aplikaci obou slov w_1 a w_2 shodné: přejde-li hlava na pole α a na další pole napravo od něj, pak vstup je již konstatně roven a a činnost stroje v T je tedy vždy stejná (i když nalevo od T se může vzhledem k různým zápisům z počátečních tří taktů lišit; speciálně se může v této části hlava zdržovat různě dlouho — proto není nutně $t_1 = t_2$). Dostane se tedy po aplikaci slova $g_1 a^{t_1} \varepsilon g_1$ i slova $g_2 a^{t_2} \varepsilon g_1$ (kde ε je prázdný symbol nebo a v závislosti na tom, je-li t_1 — a tím i t_2 — liché či sudé) v obou případech nad týmž symbol, ačkoliv právě jedno z nich patří do jevu U_8 .

Poznámka 3. Čtenář si jistě všiml rozdílu mezi vztahy (14) a definicí (13); jak si snadno uvědomí, souvisí tento rozdíl s tím, že v důkaze věty 7 jsme dokázali víc než říká: U_7 je reprezentován automatem \bar{A} s dvěma hlavami, které pracují *nezávisle* na sobě. Bylo by užitečné vyčlenit jevy, pro jejichž reprezentaci nelze závislost hlav obejít. Otázka vyvstane ještě jasněji, uvažujeme-li příklad jevu, k jehož reprezentaci stačí pozorovat pouze jednu ze dvou hlav — viz např. jev sestávající ze slov tvaru $w\bar{s}w$ diskutovaný v [1, odst. 8].

Poznámka 4. Je možno nalézt jednodušší příklad plnící roli jevu U_7 ; zvolili jsme jev citovaný v [4] proto, abychom ukázali poměrnou „sílu“ automatů s dvěma páskami bez vnitřní paměti.

Literatura

- [1] J. Bečvář: Real time and complexity problems in automata theory, *Kybernetika* 1, č. 6 (1965), 476—498.
- [2] S. C. Kleene: Representation of events in nerve nets and finite automata, *Automata Studies*, Princeton 1956.
- [3] J. Myhill: Linear bounded automata, WADD technical note 60—165.
- [4] M. O. Rabin: Real time computation, *Israel J. of Math.* vol. 1, n. 4 (1963) 203—211.
- [5] C. E. Shannon: Universal Turing machine with two internal states, *Automata Studies*, Princeton 1956.
- [6] Wang, Hao: A variant to Turing's theory of calculating machines, *JACM* 4 (1957), 63—92.

Adresa autora: Janáčkovo nám. 2a, Brno (Přírodovědecká fakulta University J. E. Purkyně).

Резюме

АВТОМАТЫ БЕЗ ВНУТРЕННЕЙ ПАМЯТИ

ЙИРЖИ ГОРЕЙШ, (Jiří Hořejš), Brno

Машина Тьюринга с входом описывается соотношениями (1) ($x_j \in X$ представляет входной символ, $q_p \in Q$ — внутреннее состояние, $s_r \in S$ — символ внешнего алфавита и M — движение головки). Автомат A типа i ($i = 1, 2, 3$) без

внутренней памяти определяется соотношениями (3)–(5); случай $i = 1$ отвечает автомату, который не читает и не печатает, $i = 2$ отвечает автомату, который читает, но не печатает (модель перфоленты), $i = 3$ отвечает автомату, который читает и печатает (модель магнитной ленты).

Автомат представляет событие $U \subset X^\infty$ тогда и только тогда, когда существует подходящая начальная конфигурация такая, что после применения какого-то входного слова $u \in X^\infty$ головка окажется над символом из S^+ именно тогда, когда $u \in U$ (здесь S^+ означает заранее данное множество отмеченных символов внешнего алфавита). Обозначим: \mathfrak{A} – множество всех регулярных событий, \mathfrak{A}_i – множество всех событий, представляемых автоматом типа i . Даются некоторые характеристики этих множеств и их взаимоотношений (см. рис. 3, 6, 9). Например, известное множество квадратов U_6 может быть представлено автоматом без внутренней памяти, если дозволено чтение и печатание. В конце статьи исследуются случаи более чем одной ленты.

Summary

AUTOMATA WITHOUT INTERNAL MEMORY

Jiří Hořejš, Brno

The Turing machine with input can be described by relations (1) ($x_j \in X$ represents an input symbol, $q_p \in Q$ an internal state, $s_r \in S$ a working alphabet symbol, M move of the head). The automaton \mathbf{A} of a type i ($i = 1, 2, 3$) without internal memory is defined by means of relations (3)–(5); for $i = 1$ we obtain an automaton that does neither read nor print, for $i = 2$ an automaton that reads but does not print (model of a punched tape), for $i = 3$ an automaton that both reads and prints (model of a magnetic tape).

The automaton represents (recognizes) an event $U \subset X^\infty$ iff starting from a suitable configuration it reads after having received a word $u \in X^\infty$ a symbol that belongs to S^+ if and only if $u \in U$; here S^+ is a suitable subset of S . We denote: \mathfrak{A} – the class of all regular sets, \mathfrak{A}_i – the class of all sets represented by automata of the type i . Some characterizations of these classes, as well as their mutual relationship are derived, which can be seen from figures 3, 6, 9. E.g. the well known set of squares U_6 can be recognized by an automaton without internal memory when both reading and printing is admitted. In addition, the case of more than one tape is discussed.