Časopis pro pěstování matematiky, roč. 85 (1960), Praha

RECENSE

Zdeněk Vančura, ANALYTICKÁ METODA V GEOMETRII II. Státní nakladatelství technické literatury, Praha, 1958, 1. vyd., náklad 3200 výt., str. 204, obr. 57, cena Kčs 21,40 váz.

V druhé části své knihy se autor zabývá *základy analytické geometrie v prostoru,* při čemž používá zcela obdobných metod jako v části I a to takovým způsobem, že (až na několik málo podrobností) lze tuto část číst nezávisle na první části. Většinou jde o rozšíření počtu užitých souřadnic, jak je dobře patrno už při zavádění kartézských souřadnic v prostoru a při určení vzdálenosti dvou bodů v prostoru. Také v přípravných odstavcích jsou použity trojice čísel (nutné pro pozdější zavedení pojmu vektoru) a determinanty třetího stupně, jejichž vlastností je potřeba při podrobné diskusi řešení soustavy dvou, tří, příp. čtyř lineárních rovnic o třech neznámých.

V dalších odstavcích je především odvozen z trojúhelníkové nerovnosti pojem bodu mezi dvěma (různými) body — speciálně pojem středu dvojice bodů — a z toho plynoucí pojmy: úsečka, polopřímka a přímka v prostoru. Pro tyto geometrické pojmy jsou napsány parametrické rovnice a jejich pomocí jsou pak ukázány základní vlastnosti těchto útvarů. Po zavedení pojmu vektoru v prostoru a na přímce v prostoru (daného vždy svým umístěním) jsou vektory dané přímky rozděleny na souhlasné a nesouhlasné vektory, z čehož je odvozena orientace přímky a orientovaná vzdálenost dvou bodů. Po úvahách věnovaných dvěma přímkám v prostoru (se vsunutou částí o příčkách dvou mimoběžek) je studována rovina v prostoru a to nejdříve v parametrickém vyjádření, potom ve vyjádření lineární rovnicí a vzájemné vztahy mezi oběma druhy vyjádření. Zde je také důležitá zmínka o kolmosti přímky a roviny. Obojího druhu vyjádření roviny je užito při úvahách o vzájemné poloze dvou rovin v prostoru, roviny a přímky v prostoru, dále pro přímky příp. roviny navzájem kolmé a je stanovena vzdálenost bodu (příp. přímky nebo roviny) od roviny. Z diskuse řešení soustavy tří (příp. čtyř) lineárních rovnic plynou nové pojmy a to svazek (příp. trs) rovin prvního nebo druhého druhu a jejich vyjádření pomocí dvou (příp. tří) základních rovin dvěma (příp. třemi) parametry. Také přímka z tzv. trsu přímek prvního příp. druhého druhu je určena pomocí lineárních rovnic rovin určujících základní přímky.

Po vyjádření bodu příp. vektoru ve zvolené kartézské (nebo lineární) soustavě souřadnic je proveden přechod od jedné soustavy k druhé; je tím získána transformace lineárních souřadnic bodů a vektorů v prostoru, speciálně pak důležité vztahy pro transformaci kartézských soustav. Pomocí determinantu přechodu jsou definovány souhlasné příp. nesouhlasné trojice vektorů a provedena orientace prostoru. Zvláštní pozornost je věnována shodným transformacím prostoru a jejich klasifikace je provedena podrobně po definici samodružného bodu příp. vektoru této transformace. Pro přímé shodné transformace je získána identická transformace, translace, rotace a šroubový pohyb (jako složená transformace z rotace a translace), pro nepřímé shodné transformace pak souměrnost podle roviny, složená transformace ze souměrnosti podle roviny a translace ve směru rovnoběžném s touto rovinou příp. rotace o ose kolmé k této rovině (ve zvláštním případě pak středová souměrnost).

Také úhel v prostoru, rozdělení dutých úhlů, kosinus a sinus úhlu příp. porovnávání dvou úhlů co do vzájemné velikosti je vyloženo obdobně jako v rovině, úvahy jsou tu jen doplněny o určení pravoúhlého průmětu přímky do roviny, stanovení jejího úhlu s rovinou příp. úhlu dvou rovin. Stejně pojem vypuklého úhlu v prostoru a konvexního útvaru v prostoru je snadným zobecněním týchž pojmů v rovině.

Závěr knihy tvoří definice a základní vlastnosti kvadratických ploch singulárních a regulárních s jejich rozdělením na rotační a nerotační kvadratické plochy. Všechny uvažované plochy (umístěné vždy ve zvláštní poloze vzhledem k rovinám souřadnic) jsou uvedeny vždy příslušnou rovnicí. Po určení polohy přímky a dané kvadratické plochy je definována tečná rovina v bodě plochy, pól a polární rovina a speciálně pro hyperboloidy stanovena jejich asymptotická kuželová plocha.

Výklad jednotlivých základních pojmů prostrorové geometrie stejně jako v první části autorovy knihy je i tu proveden s minimálními předběžnými znalostmi a to tak, že čtenář je seznamován se stále složitějšími pojmy, při čemž je dbáno zcela logického postupu při jejich zavádění. Je-li pojem zaveden geometricky, je vždy uvedena aritmetická ekvivalence a obráceně. Protože mnohé pojmy a věty jsou v podstatě stejné v obou částech knihy, je v druhé části v těchto případech uveden jen stručný přehled, čímž je získán větší spád výkladu než v první části. Jinak i o této části knihy, která je doplněna opět řadou propočtených příkladů (které prohlubují a rozšiřují znalosti získané četbou teoretických částí knihy) a mnoha příklady pro procvičení vyložené látky s výsledky příp. s návody řešení na konci knihy, platí, že může býti vhodnou pomůckou všem těm, kteří se zajímají o analytickou geometrii jako početní aparát a mají zájem o přesnost v jeho vytvoření. Použitá metoda a celá koncepce obou částí knihy nemá obdobu s jinými známými knihami o analytické geometrii.

Karel Drábek, Praha

František Kadeřávek, PLOCHY STAVEBNĚ-INŽENÝRSKÉ PRAXE. Nakladatelství Československé akademie věd, Praha, 1958, 2. vyd., náklad 3250 výt., str. 132, obr. 97, tab. XLI, cena Kčs 8,50 brož.

V tomto novém vydání, které pro tisk připravili Václav Havel a František Harant a které je oproti původnímu vydání přepracované a v mnohých částech rozšířené, je pojednáno o několika skupinách ploch se společnými vlastnostmi. Z teoretického vytvoření jednotlivých ploch a jejich vlastností často plyne, že určitý druh ploch je možno zařadit současně do několika skupin. Každá probraná skupina ploch má svoje použití v praxi stavebního inženýra, což je ukázáno na praktických příkladech doprovázených obvykle fotografií hotového (nebo rozestavěného — což bývá pro pohled na plochu výhodnější) díla nebo aspoň pěkným názorným obrázkem.

Nejdůležitější částí knihy jsou oddíly věnované zborceným plochám (a to hlavně zborcenému hyperboloidu rotačnímu i nerotačnímu a hyperbolickému paraboloidu) a tzv. plochám klínovým, které jsou výtvorem praxe a jejichž teorie byla vytvořena a propracována teprve dodatečně (viz právě práce V. Havla a F. Haranta v našich časopisech pro matematiku). Proto právě v této části došlo k velmi podstatnému rozšíření a přepracování dřívějšího výkladu. Stejně důležité jsou však také ostatní skupiny ploch nejen pro svoje dnešní nové použití (např. části některých šroubových ploch užívané jako tobogany na dopravu pytlového zboží), ale též při opravě starých kamenických prací a kulturních památek, kdy je třeba dobře znát výtvarný zákon opravované plochy. Závěrečná kapitola (která rovněž není v 1. vydání) se zabývá konstrukcí oblouku složeného ze dvou a více kruhových oblouků a jeho použitím pro praxi.

Lze očekávat, že také toto nové vydání knihy splní své poslání stejně dobře jako tomu bylo při vydání prvním. Jistě se stane dobrou pomůckou praktikům a poslouží i při prvním teoretickém studiu různých ploch. Jejím kladem je také to, že ji může číst (až na některé základní pojmy projektivní geometrie při vytvoření zborceného hyperboloidu příp. hyperbolického paraboloidu) každý absolvent všeobecně vzdělávací školy nebo průmyslové stavební školy.

Karel Drábek, Praha

Ján Fehér - Jelena Frecerová - Božena Macková - Gabriel Oravec - Robert Šulka - Bohuslav Vykouk - Jozef Zámožík, DESKRIPTIVNA GEOMETRIA V PRIKLADOCH. Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry, Bratislava, 1959, 1. vyd., náklad 2700 výt., str. 444, obr. 699, cena Kčs 30,50 váz.

Tato kniha jistě vyplní citelnou mezeru mezi teoretickým výkladem deskriptivní geometrie a jejím praktickým použitím na daných konkrétních příkladech. Zvlášť výhodné je zařazení otázek předcházejících vlastním příkladům (které jsou zahrnuty do celkového počtu 1900 příkladů) a na nichž si lze krátce zopakovat nejdůležitější věty a konstrukce, které se pak dále potřebují. Rovněž je nutno hodnotit kladně vyřešení 200 příkladů a to většinou do všech podrobností. Tím vším je umožněno zvládnout studovanou látku také studentům mimořádných forem studia, kteří v důsledku způsobu svého studia neměli doposud větších možností seznámit se také s praktickými příklady z jednotlivých částí deskriptivní geometrie a mohou si nyní pomocí této sbírky příkladů také ověřit správnost svých pracovních postupů při řešení daných úloh.

Sbírka je uspořádána tak, že jednotlivé kapitoly tvoří větší celky, v nichž jsou jednotlivé příklady seřazeny velmi vhodným způsobem postupně od zcela jednoduchých, ke kterým je však třeba ovládat látku tak, jak to vyžadují předložené otázky k opakování látky, ke složitějším, k nimž je třeba navíc ještě dobré prostorové představivosti. Tu lze aspoň částečně získat vypracováním základních úloh a zobrazením jednoduchých těles a to zvláště v těch promítacích metodách, které umožňují názorné obrazy.

Obsah kapitol a jejich postupné zařazení ve sbírce by bylo možno diskutovat. Tak např. kapitola o osvětlení by mohla být zařazena až za šroubovými plochami, protože jsou v ní uváděny příklady na osvětlení rotačních ploch a dokonce osvětlení točitého šroubového schodiště; rovněž v lineární perspektivě se vyskytují příklady na zobrazení rotačních ploch, jejichž vlastnosti a z nich plynoucí zobrazení v průmětech jsou uvedeny teprve později. Ve stereotomii (jinak dobře zpracované) by se snad mohly vypustit příklady na válcová svahová křídla příp. stereotomická řešení některých zborcených ploch, která se už v dnešní stavební praxi neprovádějí a jejichž oprávnění ve sbírce může být dáno už jen zajímavostí řešení příp. tím, že by mohlo někdy dojít k opravě již postaveného hotového díla. Při patkách svahových křídel je lépe hmotu přidat (nikoliv ubrat, jak je to provedeno na příslušných vyřešených příkladech), protože se tím dociluje větší stability celé stavby (neboť podle profesora F. KADEŘÁVKA lze tento patní kámen přirovnat funkcí k lidskému chodidlu).

Ve sbírce jsou nejdříve uvedeny příklady na konstrukce kuželoseček pomocí ohniskových vlastností i užitím projektivní geometrie a pak následují postupně promítací metody a ostatní části deskriptivní geometrie, které jsou dnes vykládány na vysokých technických školách. Velmi pěkné jsou příklady na inženýrské aplikace příslušných promítacích metod. Vzhledem k obsahu měly snad být ve sbírce také úlohy z kinematické geometrie v rovině (pro strojírenské směry) a naproti tomu bylo možno omezit poněkud příklady z kosoúhlé axonometrie. V tomto druhu promítání a rovněž tak v pravoúhlé axonometrii a v kosoúhlém promítání mohlo by se definitivně přejít k pravotočivému systému souřadnic, jak se to provádí v matematice (jejíž částí deskriptivní geometrie přec je) a rovněž tak v teoretických i praktických technických disciplinách.

Ačkoliv se sice do knihy vloudily také některé chyby (např. není správný text úl.

1030 pro kruhový válec, kdežto úl. 1033 pro kruhový kužel už je správná, v otázce úl. 1270 se ptáme po největším a nikoliv po nejmenším poloměru kružnice, uvnitř které je správně sestrojená perspektiva), příp. některé úlohy potřebují přesnější stylisace (např. v úl. 1065 se ptáme, kdy je vrženým stínem rovinného útvaru úsečka nebo přímka, ačkoliv vrženým stínem by mohla být i polopřímka nebo dokonce i dvě opačné polopřímky), je zřejmo, že tato kniha příkladů v té formě, v níž je předložena, poslouží nejen studentům (k přípravě ke zkouškám) ale i učitelům, jimž usnadní přípravu na cvičení z deskriptivní geometrie i technické kreslení. Je však třeba při tom zdůraznit, že tato sbírka příkladů nemůže a nechce vůbec nahradit práci s učebnicí a že tomu také odpovídá její celková náplň, kdy se všichni zúčastnění autoři snažili o to, aby k řešení jednotlivých příkladů bylo možno přistoupit až po dobrých teoretických znalostech.

Karel Drábek, Praha

Г. Петров: ДЕСКРИПТИВНА ГЕОМЕТРИЯ. Държавно исдателство ,,Наука и искуство'', София 1958, 304 stran, 406 obrázků, cena 9,9 lv.

Učebnice deskriptivní geometrie G. Petrova, která vyšla již ve druhém přepracovaném vydání, je určena pro studenty strojního inženýrství. Tím je také dán její obsah, který se omezuje pouze na nejpotřebnější partie pro strojní inženýry.

Ze zobrazovacích metod, kterým je věnována zhruba polovina knihy, probírá se jen Mongeova projekce (pravoúhlé promítání na dvě k sobě kolmé průmětny) a axonometrie (hlavně pravoúhlá); v obou zobrazovacích metodách jsou řešeny základní úlohy polohy a metrické. Druhá polovina knihy je věnována geometrii křivek a ploch. Jsou v ní probírány nejdůležitější třídy ploch: kuželové a válcové plochy, rotační a šroubové plochy a základní vlastnosti ploch druhého stupně a přímkových ploch. Na závěr jsou připojeny základy kinematické geometrie v rovině.

Velikou předností učebnice je její stručný a přehledný výklad, provázený názornými obrázky (u nichž poněkud rušivě působí nejednotnost v provedení i označení). Každý oddíl (s výjimkou posledních dvou kapitol) je provázen řadou velmi vhodně vybraných cvičení, které umožňují spolehlivé procvičení vyložené látky.

S metodického hlediska je třeba podotknout, že autor plně předpokládá znalost stereometrie (a planimetrie). Záměrně se vyhýbá zavedení nevlastních elementů, takže nejobecnější lineární příbuznost, kterou může zavést a které skutečně užívá k řešení řady úloh, je (perspektivní) afinita.

Celkové autorovo pojetí nejlépe vynikne z rozsahu jednotlivých kapitol a z metodického rozložení látky.

Ve stručné úvodní kapitole (str. 5—14) se zmiňuje o úkolu deskriptivní geometrie, podává historický přehled (z českých geometrů jsou uvedeni F. Tilšer, K. Pelz a V. Jarolímek), zavádí pravoúhlý souřadnicový systém a vysvětluje princip středového a rovnoběžného promítání.

První kapitola (str. 15—59) je věnována pravoúhlému promítání na dvě k sobě kolmé průmětny. Řeší se v ní nejprve základní úlohy polohy (vzájemná poloha bodu a přímky, dvojice přímek, bod a přímka roviny, rovnoběžné roviny, průsečnice rovin, průsečík přímky s rovinou), potom úlohy metrické (skutečná velikost úsečky, kolmice k přímce a rovině), nakonec se ukazuje řešení základních úloh bez základnice.

V druhé kapitole (str. 60—103) autor se zabývá transformací průměten (třetí hlavní a vedlejší průmětna) a otáčením prostoru kolem osy (kolmé k průmětně nebo s ní rovnoběžné); na to navazuje teprve otáčení roviny do průmětny. Po zavedení pojmu (perspektivní) afinity a stručném odvození jejích základních vlastností se ukazuje, že sdružené průměty útvaru dané roviny si odpovídají v afinitě. Dále se definuje elipsa jako afinní útvar ke kružnici; toho se užije k odvození některých důležitých konstrukcí pro elipsu (proužková, Rytzova a příčková konstrukce). Nakonec se zobrazují útvary v dané rovině.

Ve třetí kapitole (str. 104—149) je vykládána (rovnoběžná) axonometrie. Po krátkém úvodu, v němž se zavádějí nejdůležitější pojmy, řeší se základní úlohy polohy. Další část kapitoly je věnována pravoúhlé axonometrii: odvozují se věty a konstrukce související s axonometrickým trojúhelníkem a poměry zkrácení, řeší se metrické úlohy, zobrazuje se kružnice a kulová plocha. Kosoúhlá axonometrie je probrána jen velmi stručně; zvlášť je zdůrazněn případ, kdy axonometrická průmětna je rovnoběžná se souřadnicovou rovinou (kosoúhlé promítání, speciálně známá kavalírní a vojenská perspektiva). V závěru kapitoly je na praktických příkladech ukázáno, jak lze z pravoúhlých průmětů útvaru sestrojit jeho axonometrický průmět.

Náplň čtvrté kapitoly (str. 150—180) tvoří výklad o mnohostěnech (jehlanech a hranolech): definice, základní pojmy, zobrazení, řez rovinou, sítě, průsečíky s přímkou a vzájemné průniky.

V páté kapitole (str. 181—233) se nejprve velmi stručně probírají základní pojmy z geometrie křivek a ploch a některé speciální křivky (hyperbola, parabola a Archimedova spirála). Zbývající část kapitoly je věnována kruhovým kuželovým a válcovým plochám (resp. kuželům a válcům), při čemž se opět stručně probírá jejich zobrazení, tečné roviny, rovinné řezy, rozvinutí, průsečíky s přímkou, vzájemné průniky a průniky s hranoly a jehlany. Průběhem výkladu jsou vyloženy přibližné rektifikace polokružnice a oblouku kružnice.

Šestá kapitola (str. 234—259) pojednává o rotačních plochách. Jako příklady jsou uvedeny: kulová plocha, anuloid a rotační kvadriky; u nich je také ukázána konstrukce rovinných řezů. Po průsečících přímky s rotační plochou přistupuje se ihned k vzájemným průnikům rotačních ploch. S jedinou výjimkou v příkladech vystupují tu jen rotační kvadriky a anuloid.

Sedmá kapitola (str. 260—281) zahrnuje ve stručném přehledu obecné plochy druhého stupně, jež (s výjimkou hyperbolického paraboloidu) jsou odvozeny užitím prostorové perspektivní afinity z rotačních ploch druhého stupně, potom přímkové plochy, šroubové plochy a grafické plochy.

Poslední osmá kapitola (str. 282—298) je věnována základům rovinné kinematiky. Pohyb neproměnné rovinné soustavy se převádí na kotálení poloid; vyšetřují se však jen trajektorie cykloidálního pohybu. Jako aplikace je uvedena konstrukce cykloidálního a evolventního čelního ozubení.

Uvedený podrobnější přehled obsahu učebnice ukazuje, že autor se musel vyrovnat na poměrně málo stránkách s množstvím látky. Podařilo se mu to především proto, že se omezuje jen na nejnutnější základy, značně redukuje teoretický výklad a většinou se odvolává na obrázky, k nimž podává výklad, často velmi stručný.

Alois Urban, Praha

Mahlon M. Day, NORMED LINEAR SPACES. Springer Verlag, Berlin, 1958 (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, neue Folge, Heft 21), 1. vydání, str. 138.

Kniha obsahuje úvod do teorie normovaných lineárních prostorů a do té části teorie lineárních topologických prostorů, bez níž by se autor při výkladu těžko obešel. Pokrok této teorie v posledních letech a rychle rostoucí počet prací, věnovaných normovaným lineárním prostorům a jejich aplikacím v analyse, činí vydání této knihy obzvláště vhodným a potřebným v době, kdy sledování literatury z tohoto oboru se stává stále obtížnějším pro nespecialisty. Autorův styl je stručný, ale jasný, a kniha se snadno čte přesto, že obsahuje značné množství látky na pouhých 120 stranách. Kniha je dobře tištěna a recensent v ní nenašel žádný vážnější nedostatek. Kniha bude mít nepochybně podstatný vliv na další práce z tohoto oboru, stejně jako na ustálení terminologie a označení. Změny v dosud užívané terminologii jsou zpravidla dobře voleny. Přesto se recensent domnívá, že v některých případech mohl autor užívat označení, obvyklého u většiny dřívějších autorů. Každý paragraf vznikl synthesou značného množství prací. Mnohé paragrafy obsahují původní myšlenky, takže čtení knihy je potěšením i pro specialistu.

Přistupme k rozboru obsažené látky.

Kap. I. *Lineární prostory.* Definice a elementární algebraické vlastnosti lineárních prostorů, vektorových basí, lineárních funkcí a konjugovaných prostorů (Bourbaki-ho „dual algébrique"). Sublineární funkcionály a algebraická forma Hahn-Banachovy věty o rozšíření. Ve dvou paragrafech vykládá autor základy teorie lineárních topologických prostorů, dualitu, polaritu a slabé topologie. Poslední paragraf se zabývá uspořádáním v lineárním prostoru a konvexními kuželi. Uvádí se zde také geometrická forma Hahn-Banachovy věty i obvyklé věty o oddělení.

Kap. II. *Normované lineární prostory.* Elementární definice a vlastnosti, příklady. Výborná diskuse vlastností prostorů l_1 (slabá úplnost, ekvivalence slabé konvergence posloupnosti a konvergence podle normy), založená na dobře známém lemmatu R. S. PHILLIPSE. Další odstavec obsahuje důkazy, založené na pojmu kategorie, Banach-Steinhausovu větu, větu o otevřeném zobrazení a větu o uzavřeném grafu. Následující paragraf o geometrii a aproximacích je věnován aplikacím Hahn-Banachovy věty na otázky, podobné problému momentů. Konečně poslední paragraf se zabývá diskusí omezených slabých topologií (bounded weak topology), zvláště v konjugovaných prostorech. Dokazuje se věta Krein-Šmuljanova o konvexních podmnožinách adjungovaného prostoru.

Kap. III. *Úplnost, kompaktnost a reflexivita.* Úplnost je diskutována v obecných lokálně konvexních vektorových prostorech; vysvětluje se také její souvislost se skoro slabou topologií duálního prostoru. Dále se objasňuje souvislost mezi úplností a větou o otevřeném zobrazení. Tato souvislost ukazuje, že k důkazu věty o otevřeném zobrazení lze užít věty Krein-Šmuljanovy. Odstavec o kompaktnosti podává pěkný přehled o větě Eberleinově a jejím dalším vývoji. V dalším odstavci jsou probrány totálně spojité operátory; dokazuje se ekvivalence totální spojitosti pro T a T^*, a to jak pro normovanou tak pro slabou topologii. Věta Kreinova o konvexním obalu slabě kompaktních množin je podána jako důsledek věty o totálně spojitých operátorech. Autor pak aplikuje podmínky slabé kompaktnosti na kriteria reflexivity.

Kap. IV. *Bezpodmínečná konvergence a base.* Autor zavádí různé druhy konvergence řad a dokazuje důležitou větu Orliczovu a Pettisovu. Dále jsou uvedeny výsledky Dvoretskyho a Rogerse i jejich důkazy. Autor zavádí tensorový součin a vysvětluje — podle Grothendiecka — jeho souvislost s větou Dvoretsky-Rogersovou. Následující dva paragrafy o basích v Banachových prostorech jsou synthesou řady prací o tomto tématu; druhý z nich je věnován výkladu Jamesových výsledků o bezpodmínečných basích.

Kap. V. *Kompaktní konvexní množiny a prostory spojitých funkcí.* Vrcholy kompaktních konvexních množin, věta Krein-Mil'manova, věta o pevném bodu (fixed point theorem). Prostory spojitých funkcí na kompaktním Hausdorffově prostoru. Teorie Stone-Čechova obalu vychází z uvažování vrcholů jednotkové koule adjungovaného prostoru. Charakterisace prostorů spojitých funkcí mezi Banachovými prostory. Projekce a třídy $\mathfrak{P}_\lambda$.

Kap. VI. *Norma a uspořádání.* Skvělý úvod do teorie, spojující částečné uspořádání a normu prostoru. Autor podává jasný přehled dalšího vývoje prací Kakutani-ho o AM- a AL-prostorech. Dále jsou uvedeny výsledky o lineárních svazech spojitých funkcí, dokázána věta Stone-Weierstrassova, a rozšíření lineárních vektorových funkcí. Kapitola je zakončena přehledem speciálních vlastností prostorů AL, zvláště výsledků Dunfordových, Pettisových a Grothendieckových.

Kap. VII. *Metrická geometrie v normovaných prostorech.* V této kapitole uvádí autor rozličné geometrické vlastnosti jednotkové koule (striktní konvexita, hladkost, stejnoměrná konvexita, diferencovatelnost normy) a vysvětluje jejich souvislost. V této kapitole je mnoho původních výsledků M. Daye.

Recensovaná kniha je vynikajícím přínosem literatuře o lineárních prostorech a je nepostradatelnou každému pracovníku ve funkcionální analyse.

Vlastimil Pták, Praha

SBORNÍK PRO DĚJINY PŘÍRODNÍCH VĚD A TECHNIKY IV. Vydalo Nakladatelství Československé akademie věd, Praha 1958, str. 296, 22 obrázků, cena brož. Kčs 36,—.

Ve čtvrtém Sborníku pro dějiny přírodních věd a techniky si všimněme těch prací, které jsou věnovány buď matematice nebo jejím bezprostředním aplikacím (tato tématika zaujímá zhruba čtvrtinu celého sborníku).

Úvodní studie JOSEFA ŠIROKÉHO věnovaná českému astronomu AUGUSTU SEYDLEROVI (1849—1891) si všímá zejména Seydlerových příspěvků k řešení problému tří těles a problému čtyř těles. Oddíl nazvaný „Přípravné práce a materiály“ přináší článek QUIDO VETTERA o dějinách matematiky v českých zemích od založení university v r. 1348 do r. 1620 a dále práci RUDOLFA PISKY o vědecké činnosti českého geometra MILOSLAVA PELÍŠKA (1855—1940). Sborník je zakončen oddílem recensí a zpráv a bibliografií českých a slovenských prací za r. 1955; i zde je zvláštní pozornost věnována matematice.

Jiří Sedláček, Praha

Arnold Walfisz, GITTERPUNKTE IN MEHRDIMENSIONALEN KUGELN (Monografie matematyczne, sv. 33). Państwowe wydawnictwo naukowe, Warszawa 1957; stran 471.

Budiž

$$Q(u) = Q(u_1, \ldots, u_k) = \sum_{i,j=1}^{k} \alpha_{ij} u_i u_j \quad (\alpha_{ij} = \alpha_{ji}) \tag{1}$$

positivně definitní kvadratická forma o determinantu Δ. Je-li $x > 0$, definuje nerovnost $Q(u) \leqq x$ k-rozměrný elipsoid o objemu $V(x) = V_Q(x) = \dfrac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2} + 1\right) \sqrt{\Delta}} x^{\frac{k}{2}}$. Budiž $A(x) = A_Q(x)$ počet mřížových bodů (tj. bodů s celočíselnými souřadnicemi $u_1, \ldots, u_k$) v tomto elipsoidu. Je téměř bezprostředně jasno, že $\dfrac{A(x)}{V(x)} \to 1$ pro $x \to +\infty$. Definujeme-li tedy $P(x) = P_Q(x)$ rovnicí $A(x) = V(x) + P(x)$, hraje vpravo první člen $V(x)$ (úměrný $x^{\frac{k}{2}}$) roli „hlavního“ členu, a vzniká otázka, jakého řádu v x je „zbytek“ $P(x)$ a vůbec jaký je průběh této funkce pro $x \to +\infty$. Pro libovolnou formu Q a pro každé $k > 0$ (případ $k = 1$ je ostatně triviální) je

$$P(x) = O(x^{\frac{k}{2} - \frac{k}{k+1}}), \quad P(x) = \Omega(x^{\frac{k-1}{4}}). \tag{2}$$

Připomínám, že znak $f(x) = O(g(x))$ znamená, že $\limsup\limits_{x\to+\infty} \dfrac{|f(x)|}{g(x)} < +\infty$, a znak $f(x) = \Omega(g(x))$ znamená, že $\limsup\limits_{x\to+\infty} \dfrac{|f(x)|}{g(x)} > 0$; přitom se předpokládá, že $g(x) > 0$ pro velká x.
Je patrno, že zde jsme ještě daleko od definitivních výsledků (i když malých zlepšení v (2) by se jistě dalo dosáhnout). Pro některé speciální formy Q (a to jen pro větší dimense, $k \geqq 4$) však bylo dosaženo daleko ostřejších výsledků, které mimo jiné ukazují, že řád funkce $P_Q(x)$ může podstatně záviset na aritmetické povaze koeficientů α_{ij}, pokud připouštíme libovolné (i iracionální) hodnoty koeficientů. Jestliže však čísla α_{ij} v (1) jsou *celá*, je možno dokázat pro $k > 4$ vztahy

$$(3) \qquad P(x) = O(x^{\frac{k}{2}-1}), \quad P(x) = \Omega(x^{\frac{k}{2}-1}),$$

kterými je řád funkce $P(x)$ úplně určen. Pro $k = 4$ jsou výsledky jen o něco méně příznivé (o tom bude ještě řeč), kdežto pro $k = 2$ a $k = 3$ se dosáhlo, přes mnohé úsilí, pouze malého zlepšení odhadů (2). Např. pro kruh $u_1^2 + u_2^2 \leqq x$ dává (2) vztahy $P(x) = O(x^{\frac{1}{3}})$, $P(x) = \Omega(x^{\frac{1}{4}})$; bylo dokázáno, že exponent $\frac{1}{3}$ v prvním vzorci lze o něco málo snížit, ale není vůbec známo, zda lze exponent $\frac{1}{4}$ v druhém vzorci zvýšit. Neznáme tedy v případě kruhu „pravý exponent“, tj. infimum oněch čísel c, pro něž je $P(x) = O(x^c)$. Jeví se zde tedy — aspoň pro celá α_{ij} — podstatný rozdíl mezi stupněm našich znalostí v případě $k = 2, 3$ a v případě $k \geqq 4$. Jeho původ je v tom, že metoda, vedoucí k (2), je použitelná pro všechna Q a všechna k, kdežto pro odvození definitivních vztahů (3) (při celých α_{ij}) je třeba jiné metody, která pro $k < 4$ selhává. Proto se Walfisz omezuje (s výjimkou kap. X) na „vícerozměrný“ případ $k \geqq 4$. Za druhé se omezuje pouze na *koule*, tj. na formy $Q(u) = u_1^2 + \ldots + u_k^2$. O obecnějších případech, o nichž jsem se zde zmínil, jenom stručně informuje na str. 456—461. Poznamenejme ještě, že případ $k = 2$ (především kruh, ale i mnohem obecnější obory) je obšírně vyložen v knize: E. Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie, sv. 2 (1927), str. 183—308, ovšem pouze podle stavu asi k r. 1926.

Projděme nyní thematiku Walfiszovy knihy. Bude stále $Q(u) = u_1^2 + \ldots + u_k^2$; dimensi k vyznačíme tím, že budeme psáti $P_k(x)$, $A_k(x)$, $V_k(x)$. Dále bude stále $k \geqq 4$ (s výjimkou poslední kapitoly). Kapitola I obsahuje přípravné (ale velmi důležité) úvahy. Je to především Landauova formule

$$(4) \quad A_k(x) = \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \sum_{1\leqq q\leqq\sqrt{x}} \sum_{\substack{1\leqq h\leqq q\\ (h,q)=1}} \left(\frac{S(h,q)}{q}\right)^k \sum_{1\leqq n\leqq x} n^{\frac{k}{2}-1} \exp\left(-2\pi i\frac{nh}{q}\right) + O\left(x^{\frac{k}{4}} \lg x\right),$$

kde

$$\exp z = e^z, \quad S(h, q) = \sum_{a=1}^{q} \exp\left(2\pi i \frac{ha^2}{q}\right).$$

Součet $S(h, q)$ je tzv. Gaussův součet a jeho hodnotu známe. Proto můžeme vzorce (4) užíti i k velmi jemnému vyšetřování funkce $A_k(x)$ a tedy i $P_k(x)$ pro *koule*. Pro obecné formy $Q(u)$ s celými α_{ij} platí obdobný vzorec, ale místo $(S(h, q))^k$ vystupuje součet značně složitější; proto leckteré problémy, řešené pro koule, nejsou dosud vyřešeny v tomto obecnějším případě.

Pro $k = 4$ je vedle (4) známa ještě jednodušší formule. Budiž $\sigma(n)$ součet dělitelů čísla n, $S(x) = \sum\limits_{1\leqq n\leqq x} \sigma(n)$. Potom je

$$(5) \qquad A_4(x) = 1 + 8S(x) - 32S\left(\frac{x}{4}\right),$$

a pro $S(x)$ máme vyjádření

$$S(x) = \frac{\pi^2}{12} x^2 - x \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} \psi\left(\frac{x}{n}\right) + O(x)\,, \tag{6}$$

kde $\psi(y)$ je funkce s periodou 1, daná pro $0 \leq y < 1$ rovnicí $\psi(y) = y - \frac{1}{2}$.

Kapitola II je věnována odhadům „shora" (O-problémy). Z (6) ihned plyne

$$S(x) = \frac{\pi^2}{12} x^2 + O(x \lg x)\,,$$

a potom z (5)

$$P_4(x) = O(x \lg x)\,. \tag{7}$$

Z (4) plyne snadno

$$P_k(x) = O(x^{\frac{k}{2}-1}) \quad \text{pro} \quad k > 4\,, \tag{8}$$

což lze — ale namáhavěji — dokázati též z (5), (6). Poznamenejme, že na počátku kap. III bude velmi jednoduše dokázáno, že

$$P_k(x) = \Omega(x^{\frac{k}{2}-1}) \quad \text{pro každé } k\,, \tag{9}$$

$$P_4(x) = \Omega(x \lg \lg x)\,. \tag{10}$$

Odhad (8) je tedy definitivní, kdežto mezi (7) a (10) je ještě jistá „logaritmická mezera", kterou se dosud podařilo pouze zúžit, a to takto: Pomocí Weylových odhadů trigonometrických součtů je v kap. II dokázán vztah $P_4(x) = O\left(\frac{x \lg x}{\lg \lg x}\right)$, a pomocí Vinogradovových odhadů (v úpravě, kterou jim dal L. K. Hua) dokonce $P_4(x) = O(x \lg^{\frac{3}{4}} x \sqrt{\lg \lg x})$. Mimořádně obtížný důkaz tohoto vztahu je podán velmi pečlivě. Věty této kapitoly pocházejí od Walfisze, metody k nim vedoucí od Walfisze, Landaua, Weyla, van der Corputa, Vinogradova, Huy — nehledíme-li k starším klasickým podkladům.

Kap. III obsahuje na začátku jednoduché důkazy vztahů (9), (10). Zbytek kapitoly obsahuje výsledky referentovy. Poznamenejme toto: Je-li n přirozené číslo, je $A_k(x)$ zřejmě konstantní v intervalu $n \leq x < n + 1$, takže $P_k(x) = A_k(x) - V_k(x)$ se mění v tomto intervalu způsobem snadno popsatelným. Chceme-li tedy vyšetřit průběh funkce $P_k(x)$, stačí, omezíme-li se na celá x. Přihlížejíce k (8), položme $\varrho_k(n) = \frac{P_k(n)}{n^{\frac{k}{2}-1}}$, předpokládejme $k > 4$ a vyšetřujme posloupnost čísel

$$\varrho_k(1), \varrho_k(2), \ldots, \varrho_k(n), \ldots\,, \tag{11}$$

která je omezená podle (8). První výsledek je tento: Množina M všech hromadných hodnot posloupnosti (11) je nekonečná (tento výsledek platí dokonce i pro libovolné formy (1) s celými α_{ij}). Jestliže dokonce $k \geq 8$ a k je sudé, lze dokázat, že M je dokonalá (tj. uzavřená a bez isolovaných bodů), a dá se potom ještě dosti říci o struktuře množiny M a o konvergentních posloupnostech vybraných z divergentní posloupnosti (11).

Kap. IV obsahuje tři Peterssonovy věty. Úpravou vzorce (4) lze odvodit vzorec tvaru[1])

$$\tfrac{1}{2}(P_k(x+) + P_k(x-)) = \sum_{1 \leq r \leq \frac{1}{4}(k-1)} x^{\frac{k}{2}-} F_k(x, r) + O(x^{\frac{k}{4}} \lg x)\,, \tag{12}$$

[1]) Uvažme, že $P_k(x)$ má pro celá $x > 0$ body nespojitosti. $f(x+)$, $f(x-)$ značí limitu funkce f v bodě x zprava a zleva.

kde $F_k(x, r)$ jsou jisté nekonečné řady, s nimiž se dosti dobře pracuje („první věta"). Pro $k = 5, 6, 7, 8$ lze řád O-členu ještě snížit („druhá věta"), užijeme-li slavné Hardyovy identity pro počet representací přirozeného čísla součtem k druhých mocnin (přitom je po příp. nutno součet Σ v (12) rozšířit ještě o jeden člen). Z (12) plyne zajímavý důsledek. Jednoduché heuristické úvahy vedou totiž k závěru, že za jakousi „průměrnou hodnotu" funkce $\varrho_k(n)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ by bylo možno považovati číslo $\frac{1}{2}D_k = \frac{1}{2}\frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}$. A vskutku osciluje $\varrho_k(n)$ kolem této hodnoty: Lze nalézti celá čísla $M > 0$, a_k, b_k (M nezávisí na k) tak, že pro $k > 6$ platí: Pro všechna dosti velká $n \equiv a_k \pmod M$ je $\varrho_k(n) \geqq \frac{1}{2}D_k(1 + 2^{1-\frac{k}{2}})$, a pro všechna dosti velká $n \equiv b_k \pmod M$ je $\varrho_k(n) \leqq \frac{1}{2}D_k(1 - 2^{1-\frac{k}{2}})$ („třetí věta"). Důkazy Peterssonových vět byly Walfiszem značně zjednodušeny, třetí věta podstatně zostřena (trochu slabší věta platí podle referenta též pro všechny formy (1) s celými α_{ij}, a to pro $k > 4$).

Kap. V obsahuje věty Lursmanašviliho. Jde o formule podobného typu jako (12), avšak místo $F_k(x, r)$ vystupují jiné řady, obsahující funkci $\psi(y)$ (definovanou u vzorce (6)). Tyto formule jsou důležité v následujících kapitolách.

Řekli jsme, že číslo $\frac{1}{2}D_k$ hraje roli jakéhosi průměru funkce $\varrho_k(n)$. Je tedy přirozeno, zavést a studovat čísla

$$P_k = \limsup_{n\to\infty} \frac{2\varrho_k(n)}{D_k}, \quad \varrho_k = \liminf_{n\to\infty} \frac{2\varrho_k(n)}{D_k},$$

což provádí Walfisz v kap. VI a VII. Je-li k dělitelno osmi, je určení těchto čísel poměrně snadné; vychází

$$P_k = \frac{\zeta(\frac{1}{2}k - 1)}{(1 - 2^{-\frac{1}{2}k})\,\zeta(\frac{1}{2}k)}, \quad \varrho_k = 2 - P_k \quad (\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \text{ pro } s > 1).$$

Pro $k \equiv 4 \pmod 8$, $k \geqq 12$ je opět $\varrho_k = 2 - P_k$, ale číslo P_k se dosud nepodařilo určit. Walfisz nachází důvtipnou, ale složitou metodou přibližnou formuli pro P_k, která pro $k \geqq 12$, $k \equiv 4 \pmod 8$ dává chybu nejvýše $2{,}08 \,.\, 2^{-s}$, kde $s = \frac{1}{2}k(k - 1)$. Tato chyba je daleko menší než rozdíl $P_k - 1 = 1 - \varrho_k$, který je přibližně roven $2^{1-\frac{k}{2}}$. Přejdeme-li dále k případu $k \equiv 2 \pmod 4$ a konečně $k \equiv 1 \pmod 2$, stávají se metody stále složitějšími a aproximace stále méně přesnými. V těchto dvou kapitolách je uloženo mnoho důvtipné početní techniky a tvrdé práce.

Z kapitol III až VII víme, že funkce $P_k(x)$ (a obecněji i $P_Q(x)$ při celých α_{ij}) má pro $k > 4$ oscilující charakter. Dá se však očekávati, že kvadratická střední hodnota má hladší průběh, a tomu tak vskutku je. Položme

$$M_k(x) = \int_0^x P_k^2(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

V kap. IX reprodukuje Walfisz referentův důkaz vztahů ($k \geqq 4$)

$$M_k(x) = C_k x^{k-1} + g_k(x)\,, \tag{13}$$

kde

$$g_k(x) = O(x^{k-2}) \quad \text{pro} \quad k > 5\,, \quad g_5(x) = O(x^3 \lg^2 x)\,,$$

$$g_4(x) = O(x^{\frac{5}{2}} \lg x)\,, \quad g_k(x) = \Omega(x^{k-2}) \text{ pro všechna } k\,,$$

a určuje hodnoty kladných konstant C_k. Připomeňme, že referent dokázal také příslušný výsledek pro $k = 3$:

$$M_3(x) = C_3 x^2 \lg x + O(x^2 \sqrt{\lg x}) ,$$

a že tyto výsledky platí i pro libovolné formy Q s celými α_{ij}. Také pro $k = 2$ je znám příslušný výsledek

$$M_2(x) = C_2 x^{\frac{3}{2}} + O(x \lg^3 x)$$

(Cramér-Landau-Walfisz), ale k důkazu je třeba zcela jiné metody.

Obsahem kap. VIII je Walfiszův důkaz vzorce

$$M_4(x) = C_4 x^3 + O(x^{\frac{5}{2}}) \cdot \tag{14}$$

To je tedy vzorec (13) pro $k = 4$, zlepšený ve zbytku o faktor $\lg x$. Metoda kap. VIII je zcela jiná než v kap. IX, je elementárnější, ale přistřižená jen na koule, a početně velmi pracná (důkaz jediného vzorce (14) zabírá 57 stran).

V závěrečné kapitole X se vyšetřují všechny hodnoty $k \geqq 2$. Řekl jsem již v úvodu, že se obecné vzorce (2) dokazují jinou metodou než ostřejší vzorce (3). Pro tuto metodu jsou typické rozvoje podle Besselových funkcí $J_\alpha(x)$. Jedním z takových rozvojů (kterého se však neužívá při důkazu vzorců (2)) je vzorec

$$\tfrac{1}{2}(P_k(x+) + P_k(x-)) = x^{\frac{k}{4}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_k(n)}{n^{\frac{k}{4}}} J_{\frac{k}{2}} (2\pi\sqrt{nx}) ,$$

kde $r_k(n)$ je počet representací čísla n součtem k druhých mocnin. Tento vzorec platí pro $k = 2$ (Hardy). Pro $k > 2$ je řada vpravo divergentní, vzorec však platí i potom, jestliže vpravo místo konvergence vyšetřujeme vhodnou sumabilitu. Úplné řešení delikátní otázky této sumability je předmětem X. kapitoly, k níž metodické podklady dali Hardy, Landau, Walfisz, Oppenheim, Wilton. Thematicky i metodicky se tato poslední kapitola dosti ostře odlišuje od předešlých.

Kniha obsahuje ke konci odkazy k literárním pramenům a pečlivý seznam literatury. Walfiszova kniha poskytuje téměř úplný přehled dosud známých vlastností funkce $P_k(x)$ pro $k \geqq 4$, nevybočuje však téměř nikde z tohoto přesně ohraničeného rámce. Výklad předpokládá u čtenáře pouze běžné znalosti z diferenciálního počtu, integrálního počtu, teorie analytických funkcí a z počátků teorie čísel. Walfisz, žák a spolupracovník Landauův, je znám svou úzkostlivou snahou o přesnost a úplnost výkladů. Tato přednost se projevuje i v této knize, kde jsem nenašel závažnějších nedopatření, ač jde místy o úvahy a výpočty velmi složité (ale přiznám se, že jsem nekontroloval namáhavé výpočty na str. 229—300). Také tiskových chyb jsem ve velmi náročné sazbě našel velmi málo, nejčastěji v indexech a exponentech. Tiskárna zřejmě nemá písmena s našimi diakritickými znaménky v běžných typech (např. Casopis pro pestovani).

Vojtěch Jarník, Praha

Kentaro Yano: THE THEORY OF LIE DERIVATIVES AND ITS APPLICATIONS. North-Holland Publ. Co. & P. Noordhoff Ltd., Amsterdam-Groningen, rok vydání (asi 1957) a cena neuvedena, str. VI + 299. Vyšlo jako III. svazek edice Bibliotheca Mathematica.

Teorie spojitých grup pohybů v Riemannových prostorech a zobecnění této teorie tvoří dnes rozsáhlou část diferenciální geometrie; nauka o Lieově derivaci, jež je analytickým prostředkem k provedení těchto vyšetřování, zaujímá již své pevné místo v tensorovém počtu a teorii křivých prostorů. O rozsahu dosavadní práce na těchto otázkách svědčí již to, že seznam literatury na konci recensované knihy vykazuje 369 prací (a autor říká, že seznam je neúplný); dále autor uvádí jména asi čtyřiceti matematiků, kteří se uvedenou problematikou zabývali intensivně. Domnívám se, že u nás nejsou však výsledky tohoto směru studovány. Protože bych chtěl na tuto krásnou knihu upozorniti naše matematiky, budiž mi dovoleno podati podrobněji alespoň část jejího obsahu (neuvádím jména objevitelů jednotlivých výsledků). Čísti ji může každý, kdo ovládá základy tensorového počtu a teorie křivých prostorů.

Uveďme souhrnně užité označení: A_n je prostor s afinní symetrickou konexí, C_n konformně-eukleidovský pr., D_n projektivně-eukleidovský pr., E_n eukleidovský pr., L_n prostor s afinní konexí, P_n je L_n s nulovým tensorem projektivní křivosti, S_n Riemannův prostor konstantní křivosti, V_n Riemannův prostor.

Kap. I. *Úvod.* V prostoru V_n buď dána transformace $T : \xi^\alpha \to {}'\xi^\alpha$, s transformací T^{-1} je spojena transformace $(\alpha) \to (\alpha')$ souřadnic ve V_n tak, že bod ξ^α dostane ty nové souřadnice, jež měl bod ${}'\xi^\alpha$ ve starých. Ve V_n buď dán tensor $a_{\alpha\beta}(\xi)$, sestrojím potom tensor ${}'a_{\alpha\beta}(\xi)$ tak, že jeho složky ${}'a_{\alpha'\beta'}(\xi)$ při souřadnicovém systému (α') se rovnají složkám tensoru $a_{\alpha\beta}$ v bodě ${}'\xi$ při souřadnicovém systému (α): ${}'a_{\alpha'\beta'}(\xi) \underset{=}{\text{def}} a_{\alpha\beta}({}'\xi)$. Lieovou diferencí tensoru $a_{\alpha\beta}$ vzhledem k T se nazývá ${}'a_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}$. Uvažujeme-li jen infinitesimální transformace T_v ${}'\xi^\alpha = \xi^\alpha + v^\alpha \, dt$ (v^α je kontravariantní vektor), je ${}'a_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta} = \mathscr{L}_v a_{\alpha\beta} \, dt$ Lieovým diferenciálem a $\mathscr{L}_v a_{\alpha\beta}$ Lieovou derivací $a_{\alpha\beta}$ při T_v. Zcela obdobným procesem je možno definovati Lieovu derivaci jiných objektů. Např. se nalezne $\mathscr{L}_v g_{\alpha\beta} = 2\nabla_{(\alpha} v_{\beta)}$, $\mathscr{L}_v \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \nabla_\beta \nabla_\gamma v^\alpha + R_{\nu\beta\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} v^\nu$, $\mathscr{L}_v u^\alpha = v^\beta \nabla_\beta u^\alpha - u^\beta v^{\cdot\alpha}_\beta$ atd. Jsou odvozeny Lieovy derivace tensorových hustot a základní pravidla pro počítání s nimi. Je zřejmé, že V_n může být nahrazen obecnějším prostorem s afinní konexí nebo dokonce diferencovatelnou varietou.

Kap. II. *Lieova derivace obecného geometrického objektu.* Geometrický objekt třídy p na varietě X_n třídy C^u ($p \leqq u$) je útvar, pro který platí: (1) v každém souřadnicovém systému má N složek Ω^Λ, (2) při změně souřadnic ${}'\xi^\alpha = f^\alpha(\xi^\beta)$ přejde v ${}'\Omega^\Lambda = \Gamma^\Lambda(\Omega^\Sigma, \xi^\alpha, f^\alpha, \partial_\lambda f^\alpha, \ldots, \partial_{\lambda_p \ldots \lambda_1} f^\alpha) \equiv F^\Lambda(\Omega, \xi^\alpha, {}'\xi^\alpha)$, (3) funkce F^Λ mají grupovou vlastnost $F^\Lambda(F(\Omega, \xi^\alpha, {}'\xi^\alpha), {}'\xi^\alpha, {}''\xi^\alpha) = F^\Lambda(\Omega, \xi^\alpha, {}''\xi^\alpha)$, $F^\Lambda(F(\Omega, \xi^\alpha, {}'\xi^\alpha), {}'\xi^\alpha, \xi^\alpha) = \Omega^\Lambda$. Jestliže $F^\Lambda = F^\Lambda_\Sigma(\xi^\alpha, {}'\xi^\alpha)\,\Omega^\Sigma + G^\Lambda(\xi^\alpha, {}'\xi^\alpha)$, je Ω lineární objekt.

Je definována Lieova derivace $\mathscr{L}_v \Omega^\Lambda$ obecného geometrického objektu Ω^Λ a je ukázáno, že $\mathscr{L}_v \Omega^\Lambda$ je geom. objektem právě když Ω^Λ je lineární geometrický objekt.

Kap. III. *Grupy transformací, zachovávající geometrický objekt.* V X_n buď dán objekt Ω^Λ a r-parametrická grupa transformací G_r ${}'\xi^\alpha = f^\alpha(\xi^\beta; \eta^1, \ldots, \eta^r)$. Je-li ${}'\Omega^\Lambda = \Omega^\Lambda$, nazývá se grupa G_r grupou invariance objektu Ω^Λ (např. grupa pohybů ve V_n je grupou invariance metrického tensoru). Je studován problém: V X_n je dána G_r, existuje objekt Ω^Λ tak, aby G_r byla jeho grupou invariance?

Kap. IV. *Grupy pohybů ve V_n.* Nutná a postačující podmínka, aby infinitesimální transformace T_v byla pohybem ve V_n je $\mathscr{L}_v \, g_{\alpha\beta} = 0$; V_n potom připouští jednoparametrovou grupu pohybů a v^α je tak zvaný Killingův vektor. Hlavní problém je v určení řádu grupy G_r pohybů ve V_n. Nutná a postačující podmínka, aby G_r byla maximálního řádu $N_n = \frac{1}{2}n(n+1)$, jest $V_n \equiv S_n$. Ve V_n ($n \neq 4$) neexistuje G_r pohybů s $N_n > r > N_{n-1} + 1$. Maximální řád kompletní grupy pohybů ve V_n, který není Einsteinův (resp. S_n), je $N_{n-1} + 1$ (resp. $N_{n-1} + 2$). Jestliže V_n ($n > 4$, $n \neq 8$) připouští G_r pohybů s $r = N_{n-1} + 1$, je součinem přímky a S_{n-1} nebo je S_n záporné konstantní křivosti (a obráceně). E. Cartan a Ishihara nalezli výsledky také pro $n = 3, 4$.

Kap. V. *Grupy afinních pohybů.* Nutná a postačující podmínka, aby T_v byla afinním pohybem v L_n, jest $\mathscr{L}_v \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = 0$; L_n potom připouští G_1 afinních pohybů. T_v je afinním pohybem v A_n právě když převádí afinní kuželosečku $\frac{\delta^3 \xi^\alpha}{ds^3} + k \frac{d\xi^\alpha}{ds} = 0$ (k = const) v afinní kuželosečku a afinní parametr na ní v af. parametr; obecněji je možno kuželosečku nahraditi libovolnou geodetikou.

Jestliže L_n připouští G_r afinních pohybů maximálního řádu $n^2 + n$, je $L_n \equiv E_n$ a G_r je grupou afinit. Maximální řád kompletní grupy afinních pohybů v L_n ($n \geqq 4$) je n^2; jestliže nastane tento případ a torse není nulová, je konexe polosymetrická, tj. tvaru $S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\alpha} = S_{[\mu}\delta^{\alpha}_{\lambda]}$. Je nalezena struktura prostorů A_n a jejich grup afinních pohybů G_r při $r > n^2 - n + 5$.

Kap. VI. *Grupy projektivních pohybů.* Transformace T_v v A_n se nazývá projektivním pohybem, jestliže převádí v sebe geodetiky; tento případ nastává právě když $\mathscr{L}_v \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = 2p_{(\beta}\delta^\alpha_{\gamma)}$ čili $\mathscr{L}_v {}^p\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = 0$, kde ${}^p\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} - 2(n-1)^{-1}\, \delta^\alpha_{(\beta}\Gamma^\varepsilon_{\gamma)\varepsilon}$ jsou složky Thomasovy projektivní konexe. Nutná a postačující podmínka, aby A_n připouštěl grupu G_r projektivních pohybů maximálního řádu $r = n^2 + 2n$, jest $A_n = D_n$. Je-li $r > n^2 - 2n + 5$, je $A_n = P_n$. Pro každé n existuje A_n s G_r, $r = n^2 - 2n + 5$, projektivních pohybů a G_r je nutně transitivní. Předchozí výsledky jsou užity na studium grup afinních pohybů v A_n: Jsou nalezeny vlastnosti prostoru A_n ($n \geqq 4$), který připouští G_r afinních pohybů s $r > n^2 - n + 1$ ($= M$). A_n, který není ekviafinní a má maximální grupu pohybů, připouští kompletní transitivní grupu řádu přesně M (a je projektivně-eukleidovský). Projektivně-eukleidovský A_n, jehož hodnost kososymetrické části Ricciho tensoru je $2k$, připouští transitivní grupu s $r = n^2 - (n - k)(2k - 1)$. Neexistují A_n s kompletní transitivní G_r afinních pohybů s $M < r < n^2$. Maximální řád intransitivní grupy afinních pohybů v A_n je $n^2 - 1$, neexistují A_n s intransitivní grupou s $M < r < n^2 - 1$. Jsou uvedeny rozbory těch A_n, jež připouštějí kompletní G_r maximálního řádu resp. $r < n^2 - n$. Konečně jsou studovány L_n s G_r, $r = n^2$, afinních pohybů.

Kap. VII. *Grupy konformních pohybů.* Konformní pohyb nemění úhly mezi dvěma vektory; T_v je konformním pohybem právě když $\mathcal{L}_v g_{ab} = 2\varphi g_{\alpha\beta}$ čili $\mathcal{L}_v \mathfrak{g}_{\alpha\beta} = 0$, kde $\mathfrak{g}_{\alpha\beta} = g^{-\frac{1}{n}} g_{\alpha\beta}$, $g = \det |g_{\alpha\beta}|$. V_n připouští grupu konformních pohybů maximálního řádu $\frac{1}{2}(n + 1)(n + 2)$ právě když $V_n = C_n$. T_v je homotetií, je-li současně konformním a afinním pohybem. V_n připouští grupu homotetií maximálního řádu $\frac{1}{2}n(n + 1) + 1$ právě když $V_n = E_n$.

Kap. VIII. *Grupy transformací v zobecněných prostorech.* Je zaveden základní tensor Finslerova prostoru F_n a jeho Lieova derivace; jsou studovány pohyby v F_n. Jestliže F_n připouští G_r ($r > \frac{1}{2}n(n - 1) + 1$) pohybů, je $F_n = V_n$ s konstantní křivostí.

Obecný afinní prostor geodetik („cest") A_n je X_n, v němž je dán systém křivek $d\dot{\xi}^\alpha + \Gamma^\alpha(\xi, \dot{\xi})\, dt = 0$, $\dot{\xi}^\alpha\, dt = d\xi^\alpha$; Γ^α jsou homogenní stupně 2 vzhledem k $\dot{\xi}^\alpha$ a t je určen až na afinní transformace. Je zavedena konexe a její Lieova derivace. A_n připouštějící grupu afinních pohybů maximálního řádu $n^2 + n$ je lokálně E_n. Jestliže obecný projektivní prostor geodetik („geometry of paths") připouští grupu projektivních pohybů maximálního řádu $n^2 + 2n$, je projektivně-eukleidovský (a obráceně). V závěru jsou uvedena zobecnění na afinní a projektivní „space of k-spreads".

Kap. IX. *Lieovy derivace v kompaktním orientovatelném Riemannově prostoru.* Výsledky této kapitoly jsou soustavně probírány v knize Yano-Bochner, *Curvature and Betti numbers* (Princeton 1953), u nás dostupné v ruském překladu (Moskva 1957). Na základě Greenovy věty $\int_{V_n} \nabla_\mu v^\mu \sqrt{g}\, d\xi^1 \ldots d\xi^n = 0$ je zjištěno, že kompaktní orientovatelný (k.o.) V_n s negativně definitním Ricciho tensorem nepřipouští grupu (spojitou) pohybů ani konformních pohybů. Při tom G_1 afinních pohybů v k. o. V_n je G_1 pohybů. Konečně jsou určeny některé nutné a postačující podmínky pro to, aby k. o. V_n byl symetrický (tj. $\nabla_\omega K_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\sigma} =$

= 0). Domnívám se, že tato kapitola je do celé knihy vsazena poněkud násilně, protože nepodává dostatečný obraz o výsledcích tohoto směru (což se na jiných místech autorovi dokonale podařilo).

Kap. X. *Lieovy derivace ve skorokomplexních prostorech.* Zde jsou definovány komplexní, skorokomplexní, pseudokomplexní, skorohermitovské, pseudohermitovské, skoro-Kählerovy a pseudo-Kählerovy prostory a uvedeny vzájemné vztahy mezi nimi. Závěrem jsou studovány pseudo-Kählerovy prostory s konstantní holomorfní křivostí, připouštějící volnou pohyblivost v sebe.

Dodatek (který byl ke knize přidán při korektuře) obsahuje řadu vysoce zajímavých (a mnohdy velmi důležitých) doplňků k předchozím kapitolám. Podrobněji nelze dodatek popisovati, protože jeho 25 stran je naplněno jednotlivými větami (bez důkazů) a citacemi.

Sloh Yanovy knihy je skvělý. Autor se nebojí uváděti věty bez důkazů (ovšem vždy cituje pramen), někdy uvádí i historický postup zlepšování jednotlivých vět. Z knihy je přímo cítit, jak autor suverénně ovládá látku a téměř dramaticky ji podává čtenáři. Kniha se čte jako napínavý román, který dává dokonalý přehled o současném stavu studovaných otázek. Kniha je dobře formálně vybavena, nalezl jsem jen několik málo na první pohled patrných omylů v sazbě, je připojen abecední seznam v textu citovaných autorů, seznam pojmů (chybí definice prostoru P_n) a seznam literatury do října 1956. Zajímavé je to, že autor mohl během tisku přidati dodatek s přehledem nejnovějších výsledků. Myslím (a to snad bude největší chvála), že vedle vlastní obsahové hodnoty může recensovaná kniha sloužiti jako vzor pro to, jak má vypadati matematická kniha.

Alois Švec, Praha

C. F. GAUSS, GEDENKBAND ANLÄSSLICH DES 100. TODESTAGES AM 23. FEBRUAR 1955. Herausgegeben von Hans Reichardt, Berlin. (Spis na paměť stého výročí smrti C. F. Gausse dne 23. 2. 1955. Vydavatel Hans Reichardt, Berlín.) B. G. Teubner, Lipsko 1957, VIII, 252 str.

Svazek je skvěle vypraven ve vazbě přímo přepychové a obsahuje dva Gaussovy portréty, ukázky jeho písma a mapu objasňující jeho činnost v geodesii.[1])

Gauss byl duch univerzální, kdežto dnešní matematikové jsou většinou specialisty v určitých oborech matematiky. Bylo proto účelné rozhodnutí, aby jednotlivé obory vědecké činnosti C. F. Gausse byly zhodnoceny specialisty příslušných oborů. Proto pamětní spis obsahuje mimo biografické poznámky jedenáct pojednání předních německých a sovětských matematiků, která umožňují seznat život a dílo Gaussovo z různých hledisek. Podávám seznam těchto pojednání.

E. Kähler, Lipsko: Vztahy matematiky k astronomii a fyzice. — *H. Salié,* Lipsko: Data ze života a působení C. F. Gausse. — *G. J. Rieger,* Vídeň: Číselná teorie u C. F. Gausse. — *K. Kochendörffer,* Rostock: Gaussovy algebraické práce. — *W. Blaschke,* Hamburk: C. F. Gauss a diferenciální geometrie. — *W. Klingenberg,* Göttingen: Základy geometrie. — *A. I. Markuševič,* Moskva: Práce C. F. Gausse z funkční teorie. — *K. Schröder,* Berlín: C. F. Gauss a reální analýza. — *B. V. Gněděnko,* Kijev: O pracích C. F. Gausse z počtu pravděpodobnosti. — *O. Folk,* Würzburg: Astronomie a geodézie u C. F. Gausse. — *H. Falkenhagen,* Rostock: Nejdůležitější příspěvky C. F. Gausse z fyziky.

Pojednání sovětských matematiků jsou přeložena ze „Sborníku statí".

K. Rychlík, Praha

---

[1]) O dvou publikacích vydaných na počest stého úmrtí C. F. Gausse jsem se zmínil v tomto časopise, *82,* 1957, str. 203—204. Je to populární knížka E. WORBSE a sovětský „Sborník statí".

Г. И. Дринфельд. ДОПОЛНЕНИЯ К ОБЩЕМУ КУРСУ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА. (G. I. Drinfeld, Doplňky k obecnému kursu matematické analýzy.) Schváleno ministerstvem vysokoškolského vzdělání USSR jako učební pomůcka pro posluchače matematického oboru universit USSR. Charkov 1958, 120 str.

V anotaci a předmluvě autor uvádí: V této knize jsou sebrány některé doplňky k universitnímu kursu matematické analýzy roztroušené v různých knihách a pojednáních, které nejsou vždy dosti snadno dostupné studentům. Tyto doplňky se zabývají hlavně otázkami, které v universitním kursu nelze pominout mlčením, které však není možno při přednáškách pro nedostatek času podrobně probrat; nutno tedy požadovat, aby si je posluchači sami osvojili. Kniha jim má při tom sloužit jako učební pomůcka.

Nepotřebujeme podotýkat, že podobné služby by mohla kniha konat i u nás.

Mezi příklady na funkce spojité nikde nediferencovatelné je uvedena na prvním místě „funkce Bolzanova". Avšak funkce, kterou se B. Bolzano skutečně zabýval, je složitější. Zde je podána zjednodušená modifikace funkce Bolzanovy, pocházející od V. F. Břečky (Usp. mat. n. *4*, 1949, 15—21). Je to vlastně speciální případ funkce z pojednání E. Steinitze (Math. Ann. *52*, 1899, 58—69).

K. Rychlík, Praha

ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР. СБОРНИК СТАТЕЙ В ЧЕСТ 250-ЛЕТИЯ СО ДЛЯ РОЖДЕНИЯ, ПРЕСТАВЛЕННЫХ АКАДЕМИИ НАУК СССР (Leonhard Euler, Sborník statí předložených Akademii věd SSSR na počest 250. výročí jeho narození). Vydalo za redakce *M. A. Lavrenteva, A. P. Juškeviče* a *A. T. Grigorjana* Nakladatelství Akademie věd SSSR, Moskva 1958; 612 str., rozměr 18 × 24 cm, 36 obr., z nich 28 celostr., cena 29 r. 70 kop.

15. dubna 1957 uplynulo 250 let od narození matematika Leonharda Eulera, který působil 31 let (1727—1741 a 1766—1783) v Petrohradě a 25 let v Berlíně (1741—1766). Toto významné jubileum vědce, který po 56 let obohacoval řadou svých prací publikace jak petrohradské tak berlínské Akademie, zavdalo podnět ke společným oslavám obou akademií, uspořádaných jubilejními komisemi, ruskou za předsednictví M. A. Lavrenteva a německou za předsednictví K. Schrödera. Každá z uvedených Akademií uspořádala několikadenní slavnostní zasedání. Bylo usneseno vydati přednášky na těchto zasedáních proslovené a práce v nich předložené ve dvousvazkovém sborníku, jehož jeden svazek vydala Akademie věd SSSR; o druhý svazek se postará berlínská Akademie. K ruským statím moskevského svazku je připojen německý výtah a k německé stati výtah ruský.

Činnost Eulerova obsáhla téměř všechny obory matematiky ryzí i aplikované, a proto může sborník zajímati všechny matematické odborníky. Protože Eulerovy práce většinou ještě ani dnes nezastaraly, nemá tento sborník jen význam historický; i lze jej doporučiti široké obci matematické.

Po kratičké předmluvě obou předsedů Eulerovských jubilejních komisí (str. 5—6) následuje úvodní proslov *M. A. Lavrenteva* na jubilejním zasedání Akademie věd SSSR (str. 7—19). Řečník zdůraznil, že Euler za svého pobytu v Berlíně stále spolupracoval s Akademií petrohradskou a po návratu do Petrohradu s Akademií berlínskou. Lze jej nazvati zosobněním spolupráce učenců ruských a německých. Dále ukázal Lavrentev na to, že Eulerova vědecká činnost je vzorem práce, v níž se projevuje spojení teorie a praxe, z níž Euler čerpal podněty a úkoly své vědecké práce. Pro ruskou vědu je pak jeho velký význam v tom, že vychoval četné vynikající ruské vědce, že dovedl vyhledati vědecké talenty v širokých vrstvách lidu a že četné jeho práce se staly podkladem pro další rozvoj ruské vědy. On byl původcem mnohých metod a zakladatelem nových disciplin, které až do dnešní doby ruská věda dále rozvíjí. Tato svá tvrzení doložil Lavrentev četnými příklady.

Přednášku *K. Schrödra* tvořily „Poznámky k pracím Leonharda Eulera na poli aplikací" (str. 20—46). Řečník ukázal, že Euler spolu s bratry Bernoulli byl z prvních matematiků, kteří nově objevený infinitesimální počet použili v celém rozsahu k popisu zákonitosti přírodních jevů a tak se stali vlastními zakladateli moderní matematické fysiky. Eulerem vytvořený pojem funkce se stal hlavní pomůckou matematické analysy. V dalším probírá Schröder zásluhy Eulerovy o rozvoj matematické mechaniky, optiky, nauky o elektřině a magnetismu a astronomie. Schröder ukazuje na četných příkladech, s jakou ochotou a svědomitostí Euler každému radil, kdo se na něj obrátil s nějakou praktickou otázkou fysikální nebo technickou, a jak tím přispíval k rozvoji technické praxe. Řečník zakončil svou přednášku vysvětlením rozporů mezi Eulerem a Bedřichem II.

V. J. Smirnov přečetl na jubilejním zasedání svou společnou práci s *G. K. Michajlovem* „Neuveřejněné materiály Leonharda Eulera v Archivu Akademie věd SSSR" (str. 47 až 79). Po stručném přehledu rukopisné pozůstalosti Eulerovy pojednává článek o rukopisech Eulerových dříve neznámých, z nichž je třeba uvésti tři vázané svazky asi o 4000 stránek poznámek z Eulerova mládí, původní znění prací zadaných o ceny pařížské Akademie věd, latinské originály francouzských pojednání v „Mémoires" berlínské Akademie a varianty Eulerových spisů o mechanice, o integrálním počtu, o optice a o astronomii. Některé z těchto rukopisů z mládí Eulerova jsou provázeny poznámkami Jana Bernoulliho I. Třetí část článku je věnována korespondenci Eulerově. Akademie věd uchovává na 2250 těchto dopisů, z nichž přes 500 je psáno rukou Eulerovou. O ohromné Eulerově literární činnosti svědčí provedený odhad, že písař, který by chtěl opsat veškeré jeho práce včetně pozůstalosti, by k tomu při osmihodinové denní práci potřeboval asi 50 let. Článek končí seznamem 245 osob, které si dopisovaly s Eulerem. Mezi nimi je i jméno našeho Prokopa Diviše.

„Úloha prací Eulerových ve vývoji teorie čísel" (str. 80—97) byl obsah přednášky, proslovené *A. G. Gelfondem* na jubilejním zasedání. Ukazuje, že bohatství a hloubka Eulerových výzkumů určily na staletí cesty pro zpracování číselné teorie. Jím vytvořené metody jsou podnes užitečné. V jeho pracích jsou základy této veliké moderní nauky, za jejíž definitivní tvar vděčíme C. F. Gaussovi.

Obsah přednášky *A. I. Markuševiče* tvořily „Základní pojmy analysy a nauky funkcí v Eulerových spisech" (str. 98—132). Autor sleduje vývoj pojmu funkcí v pracích Eulerových. Ukazuje na souvislosti s dnešním výkladem tohoto základního pojmu analysy a jeho vlastností.

„Euler jako geometr" (str. 133—183) nazval svou přednášku *B. N. Delone*. Po stručných poznámkách k 75 původním geometrickým Eulerovým pracím obírá se autor důkladněji nejdůležitějšími šesti z nich. Ukazuje, že lze pokládati Eulera za podněcovatele moderního bádání o prostorové geometrii a za autora prvního souvislého vylíčení prostorové analytické geometrie. Euler byl první matematik, který dokázal známou topologickou větu o mnohostěnech, formuloval a rozřešil základní úlohy diferenciální geometrie a vypracoval klasické metody pro vyšetření prostorových čar. U něho se vyskytují mnohé myšlenky a metody, jež pak Gauss skvěle rozvinul.

B. V. Gnedenko nadepsal svůj článek „O pracích L. Eulera z počtu pravděpodobnosti, z nauky o zhodnocení pozorování, z demografie a z pojistnictví" (str. 184—209). Z počtu pravděpodobnosti se zabýval Euler na žádost Bedřicha II. hlavně některými úlohami z teorie náhodných her. Eulerovy práce o demografii vynikají hloubkou a přesností. Jím zavedené pojmy a metody jsou podnes platné. Některé jeho kritické poznámky o tehdejších tabulkách úmrtnosti měly značný vliv na vývoj demografie. Jeho práce o pojistnictví byly po dlouhou dobu vzorem a neztratily podnes svůj význam.

L. N. Sretenski přednášel o „Dynamice tuhého tělesa v pracích Eulerových" (str. 210 až 230). Již na počátku své vědecké činnosti se Euler zabýval pohybem tuhých těles.

avšak k základním výsledkům došel až v Berlíně a také je uveřejnil v tamější Akademii. Zpracoval kinematiku tuhých těles, zavedl pojem momentu setrvačnosti, odvodil obecné rovnice pohybu tuhého tělesa kolem pevného bodu, provedl integrace těchto rovnic v určitém významném případě a použil analytických výsledků dynamiky tuhých těles na problém precese bodu rovnodennosti.

Dále tu je článek *L. S. Polaka* „Některé otázky mechaniky Leonharda Eulera“ (str. 231 až 267). Autor uveřejňuje z archivu Akademie věd SSSR poznámky a zlomky z Eulerovy pozůstalosti, týkající se základních problémů mechaniky. Z nich je patrný materialistický názor Eulerův a jeho kritika Leibnizova idealismu, jakož i poznání reality a nezávislosti absolutního prostoru a času na našem vědomí. Euler pokládal zákon „živé síly“ za nejdůležitější v mechanice. Eulerovu mechaniku bohatou nesčetnými výsledky a objevy charakterisuje důsledné zavrhování mínění, že geometrické metody jsou jediným způsobem správného řešení konkrétních úloh. V dalším vyšetřuje autor objev principu minimální akce a Eulerovu zásluhu o její využití v analytické mechanice.

M. F. Subbotin uveřejňuje ve sborníku svou rozšířenou přednášku „Astronomické práce Leonharda Eulera“ (str. 268—376). Astronomické práce Eulerovy nebyly dosud soustavně zpracovány, ačkoli z nich může i podnes astronom čerpati mnohé zajímavé poučení.

„O fysikálních názorech Leonharda Eulera“ (str. 377—413) pojednává stať *J. G. Dorfmana.* Autor probírá Eulerovy dnes překonané fysikální názory a končí otázkou, jak mohl takový genius jako Euler hájiti zcela fantastické hypothesy a při tom přehlédnouti hrubé chyby. Zdůrazniv, že tyto rysy se vyskytují u většiny tehdejších učenců, autor je vysvětluje jednak tehdejším výlučně mechanistickým způsobem vysvětlování všech přírodních jevů, jednak privilegovaným a isolovaným sociálním postavením velkých učenců ve feudálním aristokratickém státě, kde se nedostávalo možnosti práce ve svobodném činorodém kolektivu.

„Eulerova dioptrika“ (str. 414—422) je název stati *G. G. Slusarjova.* Vysvětliv stav nauky o sférické a chromatické aberaci čoček před Eulerem, ukazuje Slusarjov, že Euler je zakladatelem optických výpočtů konstruktivních prvků čoček. Jeho výpočty pro vyskytnuvší se chyby mají sice dnes jen historický význam, umožnily však jeho ruským žákům sestrojit první achromatický mikroskop na světě. Velkou zásluhou Eulerovou je také to, že první vyslovil četné exaktní definice a určil pojmy nutné pro další studium.

Stať *V. L. Čenakala* „Euler a Lomonosov“ (str. 423—464) osvětluje vědecké vztahy těchto dvou velkých učenců. Článek se opírá o bohatý dopisový materiál z let 1748 až 1765.

E. Winter a *A. P. Juškevič* napsali práci „O korespondenci Leonharda Eulera s G. F. Müllerem“ (str. 465—498). Je to úvodní kapitola k I. dílu spisu „Berlínská a petrohradská Akademie věd v korespondenci Eulerově“, který vytvoří 3. část velkého díla „Prameny a studie k dějinám Východní Evropy“, vydávaného v Berlíně. Jádrem této korespondence je 187 dopisů z let 1754 až 1768 vyměněných mezi Eulerem, tehdy ředitelem matematické třídy berlínské Akademie a zahraničním členem petrohradské Akademie, a dějepiscem a zeměpiscem G. F. Müllerem, stálým konferenčním tajemníkem petrohradské Akademie. Tato korespondence, dotýkající se nejen mnohých otázek fysikálních a astronomických, avšak i otázek osobních, je důležitým a bohatým pramenem jak pro dějiny obou Akademií, tak pro dějiny věd v XVIII. století vůbec.

Opíraje se o materiál dosud neuveřejněný z archivu Akademie věd SSSR vypracoval *N. M. Raskin* stať „Otázky techniky u Eulera“ (str. 499—556). Eulerův velký zájem o praktické technické problémy umožnil jeho členství v četných komisích Akademií petrohradské i berlínské, jimž bylo svěřeno ocenění různých technických objevů a návrhů.

Euler pokládal za nemožné uskutečnění perpetua mobile, v něž někteří tehdejší učenci věřili. On byl první, kdo vypracoval teorii vodních turbin.

„Pedagogické názory Leonharda Eulera" (str. 557—568) jsou předmětem práce *E. S. Kuljabka.* Zde se poprvé seznamuje veřejnost s dosud neuveřejněným návrhem Eulerovým na reformu gymnasia o pěti ročnících, kde by prostředně nadaní žáci pobyli v každé třídě dva roky, zvláště nadaní jen jeden rok. Hlavním úkolem gymnasia má býti příprava pro universitu a žáci se mají do gymnasia přijímati ze všech vrstev obyvatelstva bez ohledu na stavovské rozdíly, neboť vsichni lidé jsou schopni pro vzdělání. Euler zavádí do gymnasijní osnovy obecné discipliny, vystupuje však proti filologickému rázu gymnasia, neboť by tím trpěly jiné důležité předměty. Žádá, aby vyučovací metody byly voleny tak aby naučily své látce nejsnadnější a nejrychlejší cestou. Vyučování má být snadné, srozumitelné a názorné, počínat nejjednoduššími základními pojmy a ponenáhlu přecházet ke složitější látce. Vědomosti se mají utvrzovat opakováním a cvičeními. Český čtenář vzpomíná mimoděk na J. A. Komenského, kde se setkáváme s týmiž názory. Bylo by zajímavé zjistit, zda Euler spisy Komenského znal.

Ikonografii Eulerovu podává stať *M. E. Glinky* „Leonhard Euler" (str. 569—589). Třicet pět olejů, rytin, skulptur a mincí od r. 1737 až do doby moderní zobrazilo podobu Eulerovu. Jsou to práce mistrů ruských, německých, švýcarských, francouzských a anglických, o nichž jsou zde sebrány stručné údaje.

„Eulerovy siluety od F. Antiga" (str. 590—596) popisuje *G. A. Kňazev.*

Ve stati „Památná Eulerovská místa v Leningradě" (str. 597—604) popisuje *A. V. Petrov* domy, v nichž Euler bydlel, a jeho hrob v Leningradě.

G. E. Pavlová líčí v článku „Zapomenuté svědectví současníka o smrti Leonharda Eulera" (str. 597—608) tuto smrt podle knihy reformovaného pastora A. Burji.

Každá stať je zakončena obsažným seznamem literatury. Sborník je cenným příspěvkem ke studiu L. Eulera a doplňuje novými, dosud neznámými rysy jeho vědecký profil.

Quido Vetter, Praha