Karel Čulík

K jedné extremální úloze o chromatických číslech konečných grafů

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 85 (1960), No. 1, 14--17

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108133

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 85 (1960), Praha

K JEDNÉ EXTREMÁLNÍ ÚLOZE O CHROMATICKÝCH ČÍSLECH KONEČNÝCH GRAFŮ

KAREL ČULÍK, Brno

(Došlo dne 20. prosince 1958)

V tomto příspěvku se studuje otázka, jak se změní chromatické číslo konečného neorientovaného grafu, když k němu přidáme předepsaný počet dalších hran.

Nechť $V \neq 0$ je konečná množina a E je systém některých jejích dvouprvkových podmnožin $\{x, y\} \subset V$ $(x \neq y)$. *Grafem* rozumíme uspořádanou dvojici (V, E) a E nazýváme jeho *relací*. E se obvykle nazývá množinou hran (neorientovaných), ale každou neorientovanou hranou jsou určeny právě dvě orientované hrany, tj. množinou E je v našem případě určena jistá areflexivní a symetrická binární relace definovaná ve V. Proto lze na relaci E přenést všechny pojmy a výsledky obecné teorie grafů [1]. Zejména E nazýváme **V**-relací, jestliže platí

$$x, y, z \in V\,, \quad x \neq y \neq z \neq x\,, \quad \{x, y\} \in E \Rightarrow \quad \text{buď} \quad \{x, z\} \in E \quad \text{nebo} \quad \{y, z\} \in E \tag{V}$$

a chromatické číslo grafu (V, E) označujeme $\chi(E)$. Graf nazýváme k-chromatickým, jestliže jeho chromatické číslo je k.

V tomto příspěvku jsou zodpovězeny dvě těsně spolu související otázky:

(1) *Jaký je nejmenší počet hran, které musíme přidat ke k-chromatickému grafu (V, E), abychom dostali n-chromatický graf (V, E'), když n je dané přirozené číslo splňující nerovnosti* $k \leqq n \leqq \text{kard}\, V$, *a*

(2) *nejvýše o kolik se zvětší chromatické číslo k-chromatického grafu (V, E), když k němu přidáme m hran, kde m je přirozené číslo splňující nerovnost* $\text{kard}\, E + m \leqq \binom{\text{kard}\, V}{2}$?

Označujme symbolem $\binom{V}{2}$ množinu všech dvouprvkových podmnožin množiny V.

Nechť nyní $\bar{V} = \{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$ je chromatický rozklad k-chromatického grafu (V, E) a nechť E' je libovolná relace splňující $E \subset E' \subset \binom{V}{2}$. Značí-li

$E_i = E' \cap \binom{V_i}{2}$ a jsou-li $\overline{V}_i$ $\chi(E_i)$-chromatické rozklady grafů (V_i, E_i), pak zřejmě $\bigcup_{i=1}^{k} \overline{V}_i = \overline{V}'$ je chromatický rozklad grafu (V, E') a proto $\chi(E') \leqq \leqq \text{kard}\, \overline{V}' = \sum_{i=1}^{k} \chi(E_i)$.

Je-li navíc E **V**-relací, pak podle [1], věta 3, je $E = \binom{V}{2} - \bigcup_{i=1}^{k} \binom{V_i}{2}$, a tedy $E' - E \subset \bigcup_{i=1}^{k} \binom{V_i}{2}$. Odtud pro chromatický rozklad $\overline{V}' = \{V'_1, V'_2, \ldots, V'_h\}$ grafu (V, E'), kard $\overline{V}' = \chi(E')$, plyne, že ke každému V'_j, $1 \leqq j \leqq h$, existuje takový V_i, $1 \leqq i \leqq k$, že $V'_j \subset V_i$, tj. že $\overline{V}'$ je zjemněním rozkladu $\overline{V}$, a proto kard $\overline{V}' \geqq$ kard $\overline{V}$. Nechť dále $\overline{V}_i = \{V'_j \mid V'_j \subset V_i\}$, takže je zřejmé, že $\overline{V}'_i$ jsou chromatické rozklady grafů (V_i, E_i), a proto kard $\overline{V}' \geqq \chi(E_i)$ pro $i = 1, 2, \ldots, k$. To však znamená, že $\chi(E') = \text{kard}\, \overline{V}' = \sum_{i=1}^{k} \text{kard}\, \overline{V}'_i \geqq \sum_{i=1}^{k} \chi(E_i)$. Platí tedy

Věta 1. *Nechť $\overline{V} = \{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$ je chromatický rozklad k-chromatického grafu (V, E) a nechť E' je libovolná relace splňující podmínku $E \subset E' \subset \binom{V}{2}$. Pak $\chi(E') \leqq \sum_{i=1}^{k} \chi(E_i)$, kde $E_i = E' \cap \binom{V_i}{2}$, a jestliže E je **V**-relací, pak platí $\chi(E') = \sum_{i=1}^{k} \chi(E_i)$.*

Z předešlých úvah je vidět, že věta 1 platí i pro nekonečné grafy.

Je-li $\overline{V} = \{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$ chromatický rozklad k-chromatického grafu (V, E), pak $\overline{V}$ je zřejmě hlavním rozkladem (viz [1]), a tedy podle [1], věta 1, platí: $V_i \neq V_j \Rightarrow$ existují takové $x \in V_i$, $y \in V_j$, že $\{x, y\} \in E$. Odtud plyne kard $E \geqq \binom{k}{2}$. Na druhé straně obsahuje-li (V, E) k uzlů, které jsou uzly úplného subgrafu, a jsou-li ostatní uzly isolované, pak kard $E = \binom{k}{2}$, takže platí

Lemma. *k-chromatický graf, který má nejmenší počet hran, je graf, který obsahuje úplný subgraf o k uzlech a jehož ostatní uzly jsou isolované.*

Nechť nyní $\overline{V} = \{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$ je chromatický rozklad k-chromatického **V**-grafu (V, E) a nechť relace E' je taková, že $E \subset E' \subset \binom{V}{2}$ a že $\chi(E') = n$. Nechť dále $E_i = E' \cap \binom{V_i}{2}$; označme $r_i = \chi(E_i)$ pro $1 \leqq i \leqq k$. Pak podle věty 1 platí $\sum_{i=1}^{k} r_i = n$, kde k, n jsou pevná přirozená čísla, a otázka (1) znamená, najít takovou E', aby výraz $\sum_{i=1}^{k} \text{kard}\, E_i$ nabýval nejmenší hodnoty. Podle lemmatu je kard $E_i \geqq \binom{r_i}{2}$ a existují takové E_i, že v předešlé nerovnosti nastane rovnost (totiž E_i je množina všech hran úplného subgrafu o r_i uzlech z V_i). Jde tedy o to najít taková r_i, aby $\sum_{i=1}^{k} r_i = n$ a při tom aby $\sum_{i=1}^{k} \binom{r_i}{2}$ bylo nejmenší. To však podle [2] věta 2, nastane tehdy, když $r_i = \left[\frac{n}{k}\right]$ pro $1 \leqq i \leqq j$ a $r_i = \left[\frac{n+k}{k}\right]$ pro $j < i \leqq k$, kde $j = k\left[\frac{n+k}{k}\right] - n$, a příslušná nejmenší hodnota $m(n, k) = \sum_{i=1}^{k} \binom{r_i}{2}$ je dána výrazem

$$m(n, k) = \left(n - k\left[\frac{n}{k}\right]\right)\left[\frac{n}{k}\right] + k\binom{\left[\frac{n}{k}\right]}{2}. \tag{1}$$

Předpokládáme nyní, že existuje takový k-chromatický graf (V, E) a taková relace E', $E \subset E' \subset \binom{V}{2}$, $\chi(E') = n$, že platí kard $(E' - E) < m(n, k)$. Především existuje taková **V**-relace E_1, že $E \subset E_1 \subset \binom{V}{2}$ a při tom $\chi(E_1) = \chi(E) = k$ (viz [1]). Pak kard $(E' - E_1) \leqq$ kard $(E' - E) < m(n, k)$, takže podle předešlého $\chi(E_1 \cup E') < n$, avšak s druhé strany $E_1 \cup E' \supset E_1$, proto podle [1], lemma 6, musí být $\chi(E_1 \cup E') \geqq \chi(E')$, což je spor. Platí tedy

Věta 2. *Nechť n je přirozené číslo splňující nerovnosti $k \leqq n \leqq \binom{\text{kard } V}{2}$. Pak ke k-chromatickénu grafu je třeba přidat alespoň $m(n, k)$ hran, aby vznikl n-chromatický graf. Existují k-chromatické grafy takové, že přidáním právě $m(n, k)$ vhodných hran vzniknou grafy n-chromatické.*

Funkce $m(n, k)$ je při pevném k (viz [2]) neklesající vzhledem k proměnné n a tedy ke každému přirozenému číslu m je nerovnostmi

$$m(n, k) \leqq m < m(n + 1, k) \tag{2}$$

jednoznačně určeno jisté $n = n(m, k)$. Z věty 2 pak plyne

Důsledek. *Přidáváme-li ke k-chromatickému grafu (V, E) m hran, kde* kard E + $+ m \leqq \binom{\text{kard } V}{2}$, *pak vznikne graf, jehož chromatické číslo je nejvýše rovno $n(m, k)$.*

Poznamenejme ještě, že $m(n + 1, k) = m(n, k) + \vartheta(n, k)$, kde $\vartheta(n, k) = \binom{\left[\frac{n}{k}\right]}{2}$ pro $k\left[\frac{n+k}{k}\right] - n > 1$ a $\vartheta(n, k) = \binom{\left[\frac{n}{k}\right]}{2} + 1$ pro $k\left[\frac{n+k}{k}\right] - n = 1$.

Literatura

[1] *K. Čulík*: On chromatic decompositions and chromatic numbers of graphs, Spisy přír. fak. MU v Brně, sv. *403* (1959), 177—185.

[2] *K. Čulík*: O jedné vlastnosti celočíselných nezáporných řešení rovnice $\sum_{i=1}^{k} r_i = n$, Čas. pro pěst. mat. *82* (1957), 353—359.

Резюме

К ОДНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ О ХРОМАТИЧЕСКИХ ЧИСЛАХ КОНЕЧНЫХ ГРАФОВ

КАРЕЛ ЧУЛИК (Karel Čulík), Брно

Используются результаты из [1] и [2], и доказывается следующая теорема:

Если n — такое натуральное число, что $k \leqq n \leqq \binom{v}{2}$, то к k-хроматическому графу, который имеет v вершин, надо добавить по крайней мере $m(n, k)$ ребер, чтобы получить n-хроматический граф. Существуют такие k-хроматические графы, что после добавления именно $m(n, k)$ ребер возникнут n-хроматические графы, если

$$m(n, k) = \left(n - k\left[\frac{n}{k}\right]\right)\left[\frac{n}{k}\right] + k\binom{\left[\frac{n}{k}\right]}{2}.$$

Zusammenfassung

ZU EINER EXTREMALEN AUFGABE ÜBER DIE CHROMATISCHEN ZAHLEN DER ENDLICHEN GRAPHEN

KAREL ČULÍK, Brno

Mit Hilfe der Resultate aus [1] und [2] wird folgender Satz bewiesen:

Es sei n eine natürliche Zahl, für die $k \leqq n \leqq \binom{v}{2}$ gilt. Zu jedem k-chromatischen Graphen, der v Knotenpunkte enthält, muss man mindestens $m(n, k)$ Kanten zugeben, um einen n-chromatischen Graphen zu bekommen. Es existieren solche k-chromatische Graphen, dass nach dem Zugeben der $m(n, k)$ Kanten die n-chromatischen entstehen, wobei

$$m(n, k) = \left(n - k\left[\frac{n}{k}\right]\right)\left[\frac{n}{k}\right] + k\binom{\left[\frac{n}{k}\right]}{2} \text{ ist.}$$