Alois Švec

Zobecnění tensorového počtu

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 85 (1960), No. 1, 99

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108131`

ZOBECNĚNÍ TENSOROVÉHO POČTU

(Vlastní referát o přednášce A. ŠVECE konané v matematické obci pražské dne 9. listopadu 1959)

V teorii prostorů s afinní konexí i v prostorech obecnějších (čímž myslím hlavně Königovy prostory, Riemannovy geometrie vyšších druhů, Vitaliův počet) se při užití metod tensorového počtu vychází podstatně z toho, že base lokálních prostorů jsou určeny volbou souřadnic v uvažovaném prostoru. To však působí určitá (a geometricky neodůvodněná) omezení na strukturu lokálních prostorů. Naznačím, jak je možno překonati tyto potíže.

Varietu $AW^r_{p,n}$ $(0 \leqq p \leqq n,\ 0 < r)$ definuji takto: Každému bodu $(\xi) = (\xi^1, \ldots, \xi^r)$ oblasti $\Omega_r \subset A_r$ přiřadím lokální afinní prostory $A_p(\xi) \subset A_n(\xi)$ a lokální basi $\{M; J_1, \ldots, J_n\}_{(\xi)}$ v $A_n(\xi)$ tak, že $\{M; J_1, \ldots, J_p\}_{(\xi)}$ je basí v A_p; dále volím funkce $\Gamma^\alpha_a(\xi)$, $\Gamma^\beta_{a\alpha}(\xi)$.*) Konexe je do $AW^r_{p,n}$ zavedena pomocí rovnic

$$\mathrm{d}M = \Gamma^\alpha_a\, \mathrm{d}\xi^a\, J_\alpha\,, \quad \mathrm{d}J_\alpha = \Gamma^\beta_{a\alpha}\, \mathrm{d}\xi^a\, J_\beta \tag{1}$$

formálně stejným způsobem jako v případě prostoru s afinní konexí $AW^n_{o,n}$. Při změně souřadnic a lokálních basí

$$\xi^a = \xi^a(\xi^{a'})\,; \quad M = M' + \varrho^{A'} J_{A'}\,, \quad J_\alpha = \sigma^{\alpha'}_\alpha J_{\alpha'} \quad (\sigma^{M'}_A = 0) \tag{2}$$

se objekt konexe $(\Gamma^\alpha_a, \Gamma^\beta_{a\alpha})$ transformuje podle

$$\Gamma^{\alpha'}_{a'\beta'} = \sigma^{\alpha'}_\alpha \tilde\sigma^\beta_{\beta'} A^a_{a'} \Gamma^\alpha_{a\beta} - \tilde\sigma^\alpha_{\beta'} \partial_{a'} \sigma^{\alpha'}_\alpha\,, \tag{3}$$

$$\Gamma^{\alpha'}_{a'} = \sigma^{\alpha}_\alpha A^a_{a'} \Gamma^\alpha_a - \partial_{a'} \varrho^{\alpha'} - \varrho^A \sigma^{\alpha'}_\alpha \tilde\sigma^B_A A^a_{a'} \Gamma^\alpha_{aB} + \varrho^A \tilde\sigma^\alpha_A \partial_{a'} \sigma^{\alpha'}_\alpha\,,$$

kde

$$\sigma^{\alpha'}_\alpha \tilde\sigma^\alpha_{\beta'} = \delta^{\alpha'}_{\beta'}\,, \quad \partial_a = \partial/\partial\xi^a\,, \quad A^a_{a'} = \partial_{a'}\xi^a\,, \quad A^{a'}_a = \partial_a \xi^{a'}\,.$$

Je užitečné definovat $(p/q;\ u/v)$-tensor jako souhrn funkcí $T^{\cdots}_{\cdots}$, jež se při (2) transformují podle

$$T^{\alpha_1' \ldots \alpha_p'; a_1 \ldots a_u}_{\beta_1' \ldots \beta_q'; b_1 \ldots b_v} = \sigma^{\alpha_1'}_{\alpha_1} \ldots \sigma^{\alpha_p'}_{\alpha_p} \tilde\sigma^{\beta_1}_{\beta_1'} \ldots \tilde\sigma^{\beta_q}_{\beta_q'} A^{a_1'}_{a_1} \ldots A^{a_u'}_{a_u} A^{b_1}_{b_1'} \ldots A^{b_v}_{b_v'} T^{\alpha_1 \ldots \alpha_p; a_1 \ldots a_u}_{\beta_1 \ldots \beta_q; b_1 \ldots b_v}\,. \tag{4}$$

Kovariantní derivací $(p/q;\ 0/0)$-tensoru nazvu $(p/q;\ 0/1)$-tensor

$$\nabla_a T^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q} = \partial_a T^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q} + \sum_{i=1}^{p} \Gamma^{\alpha_i}_{a\alpha} T^{\alpha_1 \ldots \alpha_{i-1} \alpha \alpha_{i+1} \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q} - \sum_{j=1}^{q} \Gamma^\beta_{a\beta_j} T^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_{j-1} \beta \beta_{j+1} \ldots \beta_q}\,. \tag{5}$$

Zavedu-li objekty torse a křivosti rovnicemi

$$\tfrac{1}{2} S^\alpha_{ab} = \partial_{[b} \Gamma^\alpha_{a]} - \Gamma^{\ \beta}_{[b} \Gamma^\alpha_{a]\beta}\,, \tag{6}$$

$$\tfrac{1}{2} R^\alpha_{ab\beta} = \partial_{[a} \Gamma^\alpha_{b]\beta} + \Gamma^\alpha_{[a|\gamma|} \Gamma^\gamma_{b]\beta}\,, \tag{7}$$

je $R^\alpha_{ab\beta}$ $(1/1;\ 0/2)$-tensorem a S^α_{ab} se transformuje podle

$$S^{\alpha'}_{a'b'} = \sigma^{\alpha'}_\alpha A^a_{a'} A^b_{b'} S^\alpha_{ab} + \varrho^A \sigma^{\alpha'}_\alpha \tilde\sigma^\beta_A A^a_{a'} A^b_{b'} R^\alpha_{ab\beta}\,. \tag{8}$$

V případě $R^\alpha_{ab\beta} = 0$ jsou rovnice (1_2) úplně integrabilní a S^α_{ab} je $(1/0;\ 0/2)$-tensorem. Je-li i $S^\alpha_{ab} = 0$, jsou rovnice (1) úplně integrabilní a uvažovaná $AW^r_{p,n}$ je varietou ∞^r prostorů $A_p = A_p(\xi)$ v afinním A_n.

Konexe variety je metrická, jestliže $\nabla_a g_{\alpha\beta} = 0$, kde $g_{\alpha\beta}$ je symetrický positivně definitní metrický $(0/2;\ 0/0)$-tensor; pro metrickou konexi je $R_{(ab)\beta\gamma} = R_{ab(\beta\gamma)} = 0$, kde $R_{ab\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma} R^\alpha_{ab\beta}$.

V případě prostoru s afinní konexí $AW^n_{o,n}$ je $\Gamma^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta$ a (6), (7) jsou známými tensory torse a křivosti.

Alois Švec, Praha

*) Indexy nabývají těchto hodnot: $\alpha, \beta, \ldots = 1, \ldots, n$; $a, b, \ldots = 1, \ldots, r$; $A, B, \ldots = 1, \ldots, p$; $M, N, \ldots = p + 1, \ldots, n$.