Časopis pro pěstování matematiky

Karel Rychlík

Výpočet základu e přirozených logaritmů

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 85 (1960), No. 1, 37--43

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108130

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1960

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 85 (1960), Praha

VÝPOČET ZÁKLADU e PŘIROZENÝCH LOGARITMŮ

KAREL RYCHLÍK, Praha

(Došlo 21. ledna 1959)

Na podnět prof. F. J. STUDNIČKY vypočetl r. 1890 BOHUMÍR TICHÁNEK,[1]) tehdy kandidát profesury, číslo e na 225 D (desetinných míst), z nichž je 224 správných. Tento výpočet předstihl přesností výpočty Tichánkových předchůdců a byl to po dlouhou řadu let nejlepší výsledek.

1. V nynější době, kdy použitím elektronických počítacích strojů bylo dosaženo neobyčejného rozvoje početní techniky, je namístě uvést práce, v nichž bylo číslo e vypočteno na více než 100 D:

1. WILLIAMS SHANKS [8] r. 1853: 137 D a r. 1854: 205 D, z čehož je pouze 187 D správných. Přitom použito řady $e = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$.[2])

2. J. W. L. GLAISHER [3] r. 1871: 137 D pomocí Eulerova řetězce (1). Výsledek je v souhlase s výpočtem Shanksovým.

3. J. BOORMAN [1] r. 1884 pomocí řady pro e: 346 D, z čehož je 223 D správných.

4. BOHUMÍR TICHÁNEK (uveřejněno v knize Studničkově [9c], str. 25; viz též recenzi této knihy podepsanou *Std* [9d], str. 736) r. 1890: 225 D, z nichž je 224 D správných. Východiskem byl Eulerův řetězec (1).

5. DERRICK HENRY LEHMER [4] r. 1926: 707 D pomocí Eulerova řetězce (1).

[1]) BOHUMÍR TICHÁNEK se narodil 28. 12. 1868 v Turnově jako syn učitele hlavní školy. Po maturitní zkoušce (19. 7. 1888 v Liberci) studoval na filosofické fakultě Karlovy university v Praze matematiku a fyziku. Státní zkoušku z těchto oborů složil v Praze 15. 6. 1894. Pak vyučoval na středních školách na Moravě: v Brně, v Olomouci, v Přerově, v Uherském Hradišti a Třebíči. 1. 11. 1920 byl jmenován ředitelem střední školy a působil v Brně a v Novém Městě na Moravě. 1. 7. 1931 odešel do výslužby a žil pak většinou v Brně až do své smrti (26. 12. 1956).

[2]) Od W. SHANKSE pochází též výpočet čísla π na 707 D, z nichž je však pouze 556 správných.

6. PEDER PEDERSEN [5] r. 1940: 404 D, r. 1942: 606 D a r. 1944: 808 D pomocí Eulerova řeztěce (1).

7. G. W. REITWIESNER [7][3]) r. 1950: 2010 D a téhož roku výpočet doplněn na 2500 D pomocí řady pro e. Výpočet byl proveden elektronickým počítacím strojem ENIAC.[4])

Lehmerův výpočet čísla e [4] potvrzuje výpočty předcházející;[5]) tento výpočet je potvrzován výpočtem Pedera Pedersena [5c]. Konečně výpočet e pomocí stroje ENIAC [7] potvrzuje výpočet Pedera Pedersena [5c].

2. L. EULER[6]) udal pro e nekonečný pravidelný řetězec

$$\frac{e-1}{2} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2\,.\,3 + \cfrac{1}{2\,.\,5 + \cfrac{1}{2\,.\,7 + \ldots}}}} \tag{1}$$

Odtud odvodil F. J. STUDNIČKA ([9c], str. 23—25, nebo též [9b], str. 61—65) rekurentní vzorce, z nichž je možno odvodit posloupnost s limitou e. Úvahy Studničkovy trochu upravím a doplním.

Ze vzorce (1) plyne

$$e = 1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{1}{2\,.\,3 + \cfrac{1}{2\,.\,5 + \ldots}}}\,, \tag{2}$$

tedy

$$e = 1 + \cfrac{2}{-1 + 2\,.\,1 + \cfrac{1}{2\,.\,3 + \cfrac{1}{2\,.\,5 + \ldots}}}\,,$$

---

[3]) Tato práce vznikla na podnět JOHNA von NEUMANNA. Desetinný rozvoj čísel π a e s velkým počtem D měl sloužit ke zkoumání náhodnosti rozložení číslic v desetinném rozvoji těchto čísel. Kdežto u čísla π se neobjevila znatelná odchylka od náhodnosti, není tomu tak u čísla e: zde se zřetelně projevuje odchylka od náhodného rozložení číslic. Tak dostalo počítání čísel π a e s velkým počtem D nový cíl, kdežto dříve šlo snad nejvýš o závod v dosažení co největšího počtu D.

[4]) ENIAC (Electronic numerical integrator and computer) je jeden z prvních elektronických počítacích strojů. Byl postaven za poslední války v USA a sloužil původně k výpočtu střeleckých tabulek. Má 18 000 elektronek a 1500 relé. Bližší popis viz: H. H. a ADELE GOLDSTINE, Mathematical tables *2* (1946), 97—110.

[5]) Jako pramen práce Tichánkovy uvádí D. H. LEHMER recenzi [9d] Studničkova spisu [9c]. V ní je uvedena hodnota e vypočtená Tichánkem. Je v ní však tisková chyba: na 43.D má být 6 místo 0.

[6]) L. EULER, De fractionibus continuis, Commentarii Petropolitani *11*, ad annum 1739. Odvození vzorce (1) viz v [6], 1. vyd. § 64, str. 333 — 4, 3. vyd. II § 28, str. 156—7 a zcela elementární odvození v 3. vyd. I § 34, str. 123—4. Viz též [9a].

takže můžeme psát $e = 1 + \dfrac{1}{-1+g}$, označíme-li g nekonečný pravidelný řetězec[7])

$$g = [2 \,.\, 1;\, 2 \,.\, 3,\, 2 \,.\, 5, \ldots, 2(2n-1), \ldots] \,. \tag{3}$$

Je tedy

$$e = \frac{g+1}{g-1} \,. \tag{4}$$

Položíme-li

$$g_n = [2 \,.\, 1;\, 2 \,.\, 3,\, 2 \,.\, 5, \ldots, 2(2n+1), \ldots] = \frac{p_n}{q_n} \,, \qquad n \geqq 0 \,, \tag{5}$$

$$p_0 = 2 \,, \quad q_0 = 1 \,; \quad p_1 = 13 \,, \quad q_1 = 6 \,, \tag{6}$$

je možno určit p_n, q_n pro $n \geqq 2$ rekurentními vzorci[8])

$$p_n = 2(2n+1)\, p_{n-1} + p_{n-2} \,, \quad q_n = 2(2n+1)\, q_{n-1} + q_{n-2} \,. \tag{7}$$

Klademe-li

$$p_{-1} = 1 \,, \quad q_{-1} = 0 \,, \tag{8}$$

platí vzorce (7) pro $n \geqq 1$.

Pak jsou p_n, q_n čísla nesoudělná.[9])

Z konvergence řetězce (3) plyne, že je $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = g$. Ze vzorců (7) plyne snadno $p_n > p_{n-1}$, $q_n > q_{n-1}$ pro $n \geqq 1$, takže p_n a q_n jako celá kladná čísla rostou do nekonečna. Dále platí[10])

$$g_0 < g_2 < \ldots < g_n < \ldots < g < \ldots < g_{2k-1} < \ldots < g_5 < g_3 < g_1 \,. \tag{9}$$

Položme

$$e_n = \frac{g_{n-1} - 1}{g_{n-1} + 1} \quad \text{pro} \quad n \geqq 1, \; e_0 = 1 \,. \tag{10}$$

Pak je

$$\lim_{n\to\infty} e_n = \frac{g+1}{g-1} = e \,.$$

[7]) Používám terminologie, označení a vět z [2]. Konečný pravidelný řetězec

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{\ddots}{+ \cfrac{1}{a_k}}}}$$

budu tedy značit $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k]$ a podobně pro nekonečný pravidelný řetězec $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$. Bude se nám vyskytovat pouze případ, kdy $a_1, a_2, \ldots$ jsou celá čísla kladná, kdežto a_0 může být libovolné celé číslo. Takový nekonečný řetězec je vždy konvergentní. Při takto zavedeném označení bude možno psát vzorce (1) v tvaru

$$\tfrac{1}{2}(e-1) = [0; 1, 2 \,.\, 3, 2 \,.\, 7, \ldots, 2(2n-1)\,, \ldots] \,.$$

[8]) Věta 1 [2], str. 9.

[9]) Věta 11 [2], str. 16.

[10]) Věta 4 [2], str. 11.

Platí

$$e_n = \frac{\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} + 1}{\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - 1} = \frac{p_{n-1} + q_{n-1}}{p_{n-1} - q_{n-1}} \quad \text{pro} \quad n \geqq 0 \,.$$

Pro $n \geqq 0$ zaveďme

(11) $$p_{n-1} + q_{n-1} = r_n \,, \quad p_{n-1} - q_{n-1} = s_n \,,$$

takže je

(12) $$e_n = \frac{r_n}{s_n} \,,$$

(13) $$e = \lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{s_n} \,.$$

Pak je

(14) $$r_0 = s_0 = 1 \,, \quad r_1 = 3 \,, \quad s_1 = 1 \,.$$

Ze vzorců (11) a (7) plyne

$$r_n = p_{n-1} + q_{n-1} = (2(2n-1)\, p_{n-2} + p_{n-3}) + (2(2n-1)\, q_{n-2} + q_{n-3}) =$$
$$= q(2n-1)(p_{n-2} + q_{n-2}) + (p_{n-3} + q_{n-3}) \,,$$

tedy

(15) $r_n = 2(2n-1)\, r_{n-1} + r_{n-2}$ a podobně $s_n = 2(2n-1)\, s_{n-1} + s_{n-2}$.

Tyto vzorce platí pro $n \geqq 2$.

Ježto r_0, s_0, r_1, s_1 jsou podle (14) lichá čísla, plyne ze vzorců (15) úplnou indukcí, že r_n a s_n jsou pro $n \geqq 0$ lichá čísla.

Nyní můžeme snadno dokázat, že r_n, s_n jsou pro $n \geqq 0$ nesoudělná. Pro n. s. d. (z_n, s_n) čísel r_n, s_n totiž platí

$$(r_n, s_n) = (r_n, s_n, r_n + s_n, r_n - s_n) = (r_n, s_n, 2p_{n-1}, 2q_{n-1}) =$$
$$= (r_n, s_n, 2(p_{n-1}, q_{n-1})) = (r_n, s_n, 2) \,.$$

(r_n, s_n) je tedy dělitelem čísla 2, a ježto r_n, s_n jsou lichá čísla, jsou tato čísla nesoudělná.[11])

Ze vzorce (10) plyne

(16) $$e_n = \frac{g_{n-1} + 1}{g_{n-1} - 1} = 1 + \frac{2}{g_{n-1} - 1} \,.$$

---

[11]) Nesoudělnost čísel p_n, q_n plyne ze vzorce

$$q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = (-1)^n \quad (n \geqq 0. \text{ Věta 2 [2], str. 10}) \,.$$

Zcela podobně by se dalo dokázat, že jsou čísla r_n, s_n nesoudělná pomocí vzorce

$$s_n r_{n-1} - r_n s_{n-1} = 2(-1)^n \quad (n \geqq 1) \,,$$

který je možno odvodit ze vzorce předešlého.

Podle (9) je $g_0, g_2, g_4, \ldots$ rostoucí, $g_1, g_2, g_5, \ldots$ klesající posloupnost. Z (16) lze soudit, že je $e_0, e_2, e_4, \ldots$ rostoucí a $e_1, e_3, e_5, \ldots$ klesající posloupnost. Dále bude platit

$$(17) \quad e_0 < e_2 < e_4 < \ldots < e_{2k} < \ldots < e < \ldots < e_{2k-1} < \ldots < e_3 < e_1 .$$

Čitatele r_n a jmenovatele s_n zlomku e_n můžeme pro $n \geqq 2$ určit rekurentně pomocí vzorců (15) z počátečních hodnot (14). $e_n = \frac{r_n}{s_n}$ nejsou však sblížené zlomky pravidelného řetězce, jak plyne ze (14). Jsou to však sblížené hodnoty zobecněného řetězce (2). Klademe-li $r_{-1} = 1$, $s_{-1} = 0$, můžeme sestavit pro tento řetězec schéma

(18)

n	-1	0	1	2	3	...	n	...
Částečný čitatel		1	2	1	1	...	1	...
Částečný jmenovatel		1	1	2 . 3	2 . 5	...	$2(2n-1)$	...
r_n	1	1	3	19	193	...	r_n	...
s_n	0	1	1	7	71	...	s_n	...

$$3 = 1 . 1 + 2 . 1 , \quad 19 = 6 . 3 + 1 ,$$
$$1 = 1 . 1 + 2 . 0 , \quad 7 = 6 , 1 + 1 ,$$

z něhož je možno r_n, s_n pro $n \geqq 2$ vypočíst pomocí vzorců (15).

Pomocí sblíženého zlomku e_n, který měl ve jmenovateli 112 a v čitateli 113 číslic, určil B. Tichánek[12]) 225 D čísla e a dostal tak

$$(19) \quad \begin{aligned} e = 2{,}71828 \ \ & 18284 \ \ 59045 \ \ 23536 \ \ 02874 \\ 71352 \ \ & 66249 \ \ 77572 \ \ 47093 \ \ 69995 \\ 95749 \ \ & 66967 \ \ 62772 \ \ 40766 \ \ 30353 \\ 54759 \ \ & 45713 \ \ 82178 \ \ 52516 \ \ 64274 \\ 27466 \ \ & 39193 \ \ 20030 \ \ 59921 \ \ 81741 \\ 35966 \ \ & 29043 \ \ 57290 \ \ 03342 \ \ 95260 \\ 59563 \ \ & 07381 \ \ 32328 \ \ 62794 \ \ 34907 \\ 63233 \ \ & 82988 \ \ 07531 \ \ 95251 \ \ 01901 \\ 15738 \ \ & 34187 \ \ 93070 \ \ 21540 \ \ 89151 \ldots \end{aligned}$$

[12]) Jmenovatel n-tého sblíženého zlomku pravidelného řetězce (1) pro $\frac{1}{2}(e - 1)$ je roven jmenovateli sblíženého zlomku zobecněného řetězce (2) pro e. V pojednáních P. Pedersena jsou tito jmenovatelé určeni až do $n = 170$. Z Pedersenova pojednání [5a], str. 27, lze stanovit, že u B. Tichánka bylo $n = 60$.

Všechna D až na poslední jsou správná a hodnota pro e udávaná Tichánkem je větší než pravá hodnota e o hodnotu málo větší než jednotka posledního D (skupina pěti posledních číslic a číslice za nimi následující měly by totiž být 89149 9).

Literatura

[1] *J. M. Boorman*: The mathematical Magazine *1* (1884), 204.

[2] *A. J. Chinčin*: Řetězové zlomky, Praha, 1952. Přeložil *K. Rychlík* z 2. vyd. (А. Я. Хинчин, Цепные дроби).

[3] *J. W. L. Glaisher*: On the calculation of e from a Continued Fraction. Report of the British Association for the Advancement of Science (1871), 16—18.

[4] *D. H. Lehmer*: On the Value of the Naperian Base, Amer. J. of Math., *48* (1926), 139—143.

[5] *Peder Pedersen*: Geodaetisk Institut, København, Meddelelse. a) No. 14. Über die numerische Berechnung der Kettenbrüche nebst einer Berechnung der Grundzahl der natürlichen Logarithmen (1940), 36 str.

b) No. 16. Berechnung der Grundzahl e der natürlichen Logarithmem mit 606 Dezimalen (1942), 17 str.

c) No. 17. Fortsetzung der Berechnung der Grundzahl e der natürlichen Logarithmen bis zur 808. Dezimalstelle (1944), 21 str.

[6] *O. Perron*: Die Lehre von den Kettenbrüchen, 1. vyd. 1913; 3. vyd. I, 1954, II, 1957.

[7] *G. W. Reitwiesner*: An ENIAC Determination of π and e to more than 2000 Decimal Places, Mathem. Tables *4* (1950), 11—15; 110.

[8] *W. Shanks*: Proceedings of the Royal Society of London *6* (1954), 397.

[9] *F. J. Studnička*: a) Všeobecné tvarosloví algebraické, Praha 1880, 161—164.

b) Časopis pro pěst. mat. a fyz., *20* (1891), 61—65.

c) Výklady o funkcích monoperiodických, Praha 1892.

d) Recenze této knihy podepsaná *Std*, Jahrb. ü. d. Fortschritte d. Math., *25*, ročník 1893—94, vyšel r. 1897, str. 736.

Резюме

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЧИСЛА e, ОСНОВАНИЯ НАТУРАЛЬНЫХ ЛОГАРИФМОВ

КАРЕЛ РЫХЛИК, (Karel Rychlík), Прага

По инициативе проф. Ф. Й. Студничка в 1890 г. Богумир Тиханек, в то время кандидат профессуры, вычислил число e на 255 D (десятичных знаков), из которых 224 D были правильны; в то время это было наилучшим результатом, который долго не был превзойден.

Для вычисления Тиханком был использован метод, предложенный профессором Студничка, который исходнл из цепи Эйлера [1]. Отсюда он вывел представление e в виде $\lim\limits_{n\to\infty} e_n$, где $e_n = r_n/s_n$, а r_n и s_n определяются рекуррентными формулами (15) с начальными значениями (14). e_n не являются сближенными дробями регулярной цепи, но представляют собой сближенные дроби обобщенной цепи (2). Тиханек определил 225 D числа e при помощи сближенной дроби e_n, числитель которой r_n соедржал по его словам 113 цифр, а знаменатель s_n — 112 цифр. Из работы П. Педерсена [5a], стр. 27, я обнаружил, что было $n = 60$.

Zusammenfassung

BERECHNUNG DER GRUNDZAHL e DER NATÜRLICHEN LOGARITHMEN

KAREL RYCHLÍK, Praha

Auf Veranlassen von Prof. F. J. STUDNIČKA berechnete im J. 1890 BOHUMÍR TICHÁNEK (*1868, †1956), damals Kandidat der Professur (später Mittelschullehrer und -Direktor), die Zahl e mit 225 D (Dezimalstellen), wovon 224 richtig sind. Diese Berechnung ist an Genauigkeit den Ergebnissen seiner Vorgänger überlegen und sie blieb lange Zeit das beste Ergebnis.

Zur Berechnung benutzte Tichánek den Vorgang von F. J. Studnička. Dieser ging vom Eulerschen Kettenbruche (1) aus. Daraus leitete er den Ausdruck von e als $\lim_{n\to\infty} e_n$, wo $e_n = r_n/s_n$ und r_n und s_n sind durch rekurrente Formeln (15) mit den Anfangswerten (14) bestimmt. e_n sind nicht Näherungsbrüche eines regulären Kettenbruches; es sind dies vielmehr Näherungsbrüche des verallgemeinerten Kettenbruches (2). Tichánek bestimmte die 225 D der Zahl e mit Hilfe eines Näherungsbruches e_n, dessen Zähler r_n nach seiner Angabe 113 Ziffern und der Nenner s_n 112 Ziffern besass. Aus der Abhandlung von P. PEDERSEN [5a] S. 27, stellte ich fest, dass $n = 60$ war.