Vlastimil Dlab

Poznámka k jednomu problému týkajícímu se Frattiniho podgrup

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 85 (1960), No. 1, 87--90

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108120

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 85 (1960), Praha

POZNÁMKA K JEDNOMU PROBLÉMU TÝKAJÍCÍMU SE FRATTINIHO PODGRUP

VLASTIMIL DLAB, Khartoum (Sudan)

(Došlo dne 23. května 1959)

V poznámce je elementárním způsobem dokázáno za jistých předpokladů tvrzení, že Frattiniho podgrupa direktního součinu grup je direktním součinem Frattiniho podgrup jednotlivých faktorů.

Frattiniho podgrupou $\Phi(G)$ grupy G rozumíme průnik všech maximálních podgrup této grupy, jestliže G má maximální podgrupy; jinak $\Phi(G) = G$. Podgrupu $\Phi(G)$ můžeme charakterisovati též pomocí tzv. „negenerátorů", tj. takových prvků grupy G, které mohou být vynechány z každého systému generátorů této grupy, aniž porušíme vlastnost býti systémem generátorů celé grupy: $\Phi(G)$ je právě podgrupou všech těchto negenerátorů.

Je-li grupa G direktním součinem svých podgrup G_δ, $\delta \in \Delta$: $G = \prod_{\delta \in \Delta} G_\delta$, naskýtá se otázka, platí-li potom

$$\Phi(G) = \prod_{\delta \in \Delta} \Phi(G_\delta) \,. \tag{1}$$

G. A. MILLER dokázal platnost vztahu (1) v případě, že G je konečná (viz [3]), autor v případě, že G je Abelova (viz [1]). Položený problém studuje obecně VL. KOŘÍNEK a autor v práci, která bude publikována v časopise Čechoslovackij matematičeskij žurnal (viz [2]). Tato poznámka řeší zmíněnou otázku pro některé zvláštní třídy grup.

Lemma. *Budiž* $G = \prod_{\delta \in \Delta} G_\delta$. *Potom platí*

$$\Phi(G) \subseteq \prod_{\delta \in \Delta} \Phi(G_\delta) \,. \tag{2}$$

Důkaz. Je-li M_{δ_0} maximální podgrupa grupy G_{δ_0}, $\delta_0 \in \Delta$, je zřejmě $M_{\delta_0} \times \times \prod_{\delta \in \Delta \setminus (\delta_0)} G_\delta$ maximální podgrupa grupy G. Je tedy

$$\Phi(G) \subseteq \Phi(G_{\delta_0}) \times \prod_{\delta \in \Delta \setminus (\delta_0)} G_\delta \quad \text{pro každé} \quad \delta_0 \in \Delta \,. \tag{3}$$

Jelikož

$$\bigcap_{\delta_0 \in \Delta} (\Phi(G_{\delta_0}) \times \prod_{\delta \in \Delta \setminus (\delta_0)} G_\delta) = \prod_{\delta_0 \in \Delta} \Phi(G_{\delta_0}) ,$$

dostáváme ze vztahu (3) ihned inklusi (2).

Věta. *Budiž $G = \prod_{\delta \in \Delta} G_\delta$. Nechť je splněna některá z následujících podmínek:*

a) *G je Abelova;*

b) *$\Phi(G_\delta)$ je konečně generovaná pro každé $\delta \in \Delta$;*

c) *G_δ je konečně generovaná pro každé $\delta \in \Delta$;*

d) *G je konečně generovaná, či speciálně konečná.*

Potom platí vztah (1).

Důkaz. Předpokládejme, že (1) neplatí; potom dostáváme podle lemmatu ostrou inklusi

$$\Phi(G) \subsetneqq \prod_{\delta \in \Delta} \Phi(G_\delta) .$$

Existuje tedy pro jisté $\delta_0 \in \Delta$ prvek $g_0 \in G_{\delta_0}$ takový, že

$$g_0 \text{ non} \in \Phi(G) \quad \text{a} \quad g_0 \in \Phi(G_{\delta_0}) .$$

To znamená, že existuje maximální podgrupa M v G taková, že

(4) $$g_0 \text{ non} \in M .$$

Potom ale

$$\{M \cup (g_0)\} = G ,$$[1]

tj. každý prvek $g^* \in G_{\delta_0}$ se dá psát ve tvaru

(5) $$g^* = m_1 g_0^{k_1} m_2 g_0^{k_2} \dots m_r g_0^{k_r}$$

s vhodnými $m_i \in M$ a celými čísly k_i ($i = 1, 2, \dots, r$).

a) Nechť G je Abelova. Potom podle (5)

$$g^* = m_1 m_2 \dots m_r g_0^{k_1 + k_2 + \dots + k_r} ,$$

a tedy

$$m_1 m_2 \dots m_r \in G_{\delta_0} .$$

Množina $(M \cap G_{\delta_0}) \cup (g_0)$ je tudíž systémem generátorů grupy G_{δ_0}, a jelikož $g_0 \in \Phi(G_{\delta_0})$, je též $M \cap G_{\delta_0}$ systémem generátorů grupy G_{δ_0}, tj. $M \cap G_{\delta_0} = \{M \cap G_{\delta_0}\} = G_{\delta_0}$, ve sporu s (4).

b) Nechť $(g_{0i})_{i=1,2,\dots,s}$ je konečný systém generátorů grupy $\Phi(G_{\delta_0})$. Jelikož $\Phi(G_{\delta_0})$ je normální v G_{δ_0}, je podle (5)

(6) $$g^* = m_1 m_2 \dots m_r g_0^* \quad \text{pro jisté} \quad g_0^* \in \Phi(G_{\delta_0}) .$$

Odtud dostáváme $m_1 m_2 \dots m_r \in G_{\delta_0}$, a tedy množina

$$(M \cap G_{\delta_0}) \cup (g_{0i})_{i=1,2,\dots,s}$$

[1]) Symbol $\{\mathscr{G}\}$ značí grupu, generovanou množinou $\mathscr{G}$.

je systémem generátorů grupy G_{δ_0}. Pak ale též množina $M \cap G_{\delta_0}$ je systémem generátorů grupy G_{δ_0}, a dostáváme opět spor s (4).

c) Budiž $(g_i^*)_{i=1,2,\ldots,t}$ systémem generátorů grupy G_{δ_0}. Podle (6) platí pro $i = 1, 2, \ldots, t$

$$g_i^* = m_i^* g_{0i}^* , \quad \text{kdež} \quad m_i^* \in M \quad \text{a} \quad g_{0i}^* \in \mathbf{\Phi}(G_{\delta_0}) ;$$

odtud vyplývá, že $m_i^* \in G_{\delta_0}$ pro $i = 1, 2, \ldots, t$. Tedy

$$(m_i^*)_{i=1,2,\ldots,t} \cup (g_{0i}^*)_{i=1,2,\ldots,t}$$

je systémem generátorů grupy G_{δ_0}, tj. též $(m_i^*)_{i=1,2,\ldots,t}$ je systémem generátorů grupy G_{δ_0}. Pak ale $M \cap G_{\delta_0} = G_{\delta_0}$ — opět spor s (4).

d) V tom případě vyplývá platnost (1) ihned z c), neboť, je-li G konečně generovaná, je též každý faktor G_δ konečně generovaný (Δ má dokonce konečnou mohutnost). Speciálně tedy také platí (1), je-li G konečná.

Poznámka. Snadno nahlédneme, že větu možno dokázat též za následujícího předpokladu, zobecňujícího podmínky a) a b):

e) *Označme $\mathscr{G}$ třídu konjugovaných prvků s prvkem $g \in \mathbf{\Phi}(G_\delta)$ v grupě G_δ, $\delta \in \Delta$. Nechť ke každé takové třídě $\mathscr{G}$ existuje konečný počet prvků $g_{\delta_i} \in \mathbf{\Phi}(G_\delta)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, pro něž*

$$\mathscr{G}_\delta \subseteq \{g_{\delta i}\}_{i=1,2,\ldots,n} .$$

Literatura

[1] *Vl. Dlab*: The Frattini subgroups of abelian groups, Czechoslovak Mathematical Journal. *10(85)*, 1960.

[2] *Vl. Dlab, Vl. Kořínek*: The Frattini subgroup of a direct product of groups, Czechoslovak Mathematical Journal *10(85)*, 1960.

[3] *G. A. Miller*: The Φ-subgroup of a group, Trans. Amer. Math. Society, *16* (1915), 20–26.

Резюме

ЗАМЕТКА К ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ, КАСАЮЩЕЙСЯ ПОДГРУПП ФРАТТИНИ

ВЛАСТИМИЛ ДЛАБ (Vlastimil Dlab), Кхартоум (Судан)

В заметке элементарным способом доказана следующая

Теорема. *Пусть $G = \prod_{\delta \in \Delta} G_\delta$. Пусть выполнено одно из следующих предположений:*

a) G — *абелева группа.*

b) $\mathbf{\Phi}(G_\delta)$[1]) *обладает конечной системой образующих для всякого* $\delta \in \Delta$.

c) G_δ *обладает конечной системой образующих для всякого* $\delta \in \Delta$.

d) G — *группа с конечным числом образующих или, в частности, конечная группа.*

Тогда

$$\mathbf{\Phi}(G) = \prod_{\delta \in \Delta} \mathbf{\Phi}(G_\delta) .$$

Summary

NOTE ON A PROBLEM CONCERNING THE FRATTINI SUBGROUPS

VLASTIMIL DLAB, Khartoum (Sudan)

In this note the following assertion is proved in an elementary way:

Theorem. *Let* $G = \prod_{\delta \in \Delta} G_\delta$. *(*$G$, G_δ *are groups). Let one of the following assumptions be fulfilled:*

a) G *is abelian.*

b) $\mathbf{\Phi}(G_\delta)$[2]) *is a finitely generated group for every* $\delta \in \Delta$.

c) G_δ *is a finitely generated group for every* $\delta \in \Delta$.

d) G *is a finitely generated group or, in particular, a finite group.*

Then

$$\mathbf{\Phi}(G) = \prod_{\delta \in \Delta} \mathbf{\Phi}(G_\delta) .$$

[1]) $\mathbf{\Phi}(H)$ обозначает подгруппу фраттини группы H.

[2]) $\mathbf{\Phi}(H)$ denotes the Frattini subgroup of a group H.