Časopis pro pěstování matematiky, roč. 85 (1960), Praha

O EXISTENCI JISTÝCH SOUSTAV ÚHLOPŘÍČEK KONVEXNÍHO MNOHOÚHELNÍKA

VÁCLAV POLÁK, Brno

(Došlo dne 13. března 1959)

Nechť $p > k \geqq 0$ jsou celá čísla, jež nejsou současně obě lichá. Pak existuje přirozené číslo $N(p, k)$ tak, že pro všechna $n \geqq N(p, k)$ v každém konvexním n-úhelníku P, jehož žádné tři úhlopříčky nemají společný vnitřní bod, lze vybrat systém $\mathfrak{A}$ p úhlopříček tak, že každá úhlopříčka z $\mathfrak{A}$ se protíná ve vnitřních bodech mnohoúhelníka P právě s k dalšími úhlopříčkami z $\mathfrak{A}$. Práce podává *konstrukci systému* $\mathfrak{A}$ v mnohoúhelníku s dostatečným počtem vrcholů. Je položen problém týkající se čísla $N(p, k)$.

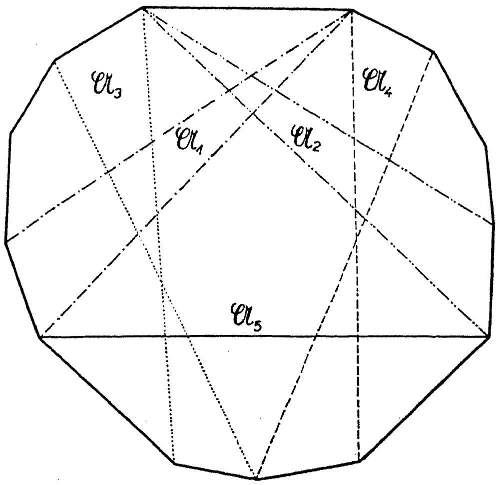
Řekneme, že *mnohoúhelník* P *má vlastnost* (*), jestliže je konvexní a žádné tři úhlopříčky nemají společný vnitřní bod.[1]) Libovolnou neprázdnou množinu $\mathfrak{A}$ úhlopříček z P nazveme *konfigurací úhlopříček*. Řekneme, že dvě úhlopříčky se *protínají*, jestliže přímky, na kterých úhlopříčky leží, se protnou a jestliže tento průsečík leží uvnitř obou úhlopříček. Řekneme, že konfigurace $\mathfrak{A}$ je typu (p, k), jestliže p, k jsou čísla celá, $p > k \geqq 0$, kard $\mathfrak{A} = p$ a každá úhlopříčka z $\mathfrak{A}$ se protíná právě s k úhlopříčkami z $\mathfrak{A}$. Řekneme, že konfigurace $\mathfrak{A}$ je typu δ, existuje-li úhlopříčka mnohoúhelníka P tak, že protne každou úhlopříčku z $\mathfrak{A}$. Jestliže $\mathfrak{A}$ je současně typu (p, k) i typu δ, pak řekneme, že $\mathfrak{A}$ je typu $(p, k)\ \delta$. Na obrázku 1 je systém $\mathfrak{A}$ devíti úhlopříček, každá z nich se protíná se čtyřmi dalšími. Je tedy $\mathfrak{A}$ konfigurací úhlopříček typu (9,4). Přitom však neexistuje žádná úhlopříčka mnohoúhelníka P tak, aby protala všechny úhlopříčky systému $\mathfrak{A}$. Konfigurace $\mathfrak{A}$ není tedy typu δ. Ze systému $\mathfrak{A}$ lze vybrat (jak v obrázku naznačeno) jednotlivé systémy $\mathfrak{A}_i$, jež jsou konfiguracemi úhlopříček typů po řadě $(2, 0)\ \delta$, $(2, 0)\ \delta$, $(2, 1)\ \delta$, $(2, 1)\ \delta$, $(1, 0)\ \delta$.

Na každé úhlopříčce konfigurace typu (p, k) leží právě k průsečíků. Celá konfigurace obsahuje celkem $\frac{1}{2} . p . k$ průsečíků. Jsou-li čísla p, k obě lichá, konfigurace typu (p, k) neexistuje. Množina obsahující jedinou úhlopříčku je

[1]) Tyto mnohoúhelníky studoval J. SEDLÁČEK: O soustavách úhlopříček v konvexním n-úhelníku. Časopis pro pěstování matematiky, *81* (1956), 157—170.

konfigurace typu (1,0). *Jestliže $p \geqq 3$ je liché číslo, pak neexistuje konfigurace typu $(p, \frac{1}{2}(p-1))$ δ.*

Předchozí tvrzení jsou zřejmá kromě posledního, které dokážeme sporem. Nechť $\mathfrak{A}$ je konfigurace uvedeného typu. Poněvadž je typu δ, existují vrcholy $U, V \in \mathsf{P}$ dělící P na dvě části tak, že každá úhlopříčka z $\mathfrak{A}$ spojuje dva vrcholy z různých částí. Nechť UV značí jednu (libovolně vybranou) z těchto dvou částí. Tuto lomenou čáru orientujme ve smyslu z U do V. Tím je dáno uspořádání jejích vrcholů. Označme U_1, V_1 první a poslední (ve smyslu této orientace) z těch vrcholů čáry UV, z nichž vychází alespoň jedna úhlopříčka z $\mathfrak{A}$. Zřejmě $U_1 \neq V_1$. Všechny úhlopříčky z $\mathfrak{A}$, vycházející z U_1, uspořádejme ve smyslu vnitřního úhlu, jehož ramena jsou po řadě strana vcházející do U_1 a strana vycházející z U_1. Označme u první z těchto úhlopříček. Proveďme stejné uspořádání při vrcholu V_1 a označme v poslední z těchto úhlopříček. Nechť u a v se protnou. Poněvadž celkem $\frac{1}{2}(p-1)$ úhlopříček (včetně v) protne u, nebude $\frac{1}{2}(p-1)$ úhlopříček z $\mathfrak{A}$ protínat u a tedy budou protínat v. Tedy má úhlopříčka v celkem $\frac{1}{2}(p+1)$ průsečíků, což je spor. Nechť u, v se neprotnou. Úhlopříček z $\mathfrak{A}$ různých od v, které neprotnou u, je $\frac{1}{2}(p-3)$. Tedy úhlopříčka v nemůže mít $\frac{1}{2}(p-1)$ průsečíků — spor. Důkaz tvrzení je ukončen.



Obr. 1.

Řekneme, že konfigurace $\mathfrak{A}$ vznikla *složením* konfigurací $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, jestliže $\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2 = 0$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2$. O dvou konfiguracích $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ typu δ řekneme, že jsou *rovnoběžné*, značíme $\mathfrak{A}_1 \parallel \mathfrak{A}_2$, jestliže $\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2 = 0$, jejich složením vznikne konfigurace typu δ a žádná úhlopříčka jedné konfigurace neprotíná úhlopříčku druhé konfigurace (a naopak). Na obrázku je $\mathfrak{A}_3 \parallel \mathfrak{A}_4$. O dvou konfiguracích $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ typu δ řekneme, že se *protínají*, značíme $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$, jestliže $\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2 = 0$, jejich složením vznikne konfigurace typu δ a každá úhlopříčka jedné konfigurace protne každou úhlopříčku druhé konfigurace (a naopak). Na obrázku je $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$.

Článek dokazuje následující tvrzení:

Věta. *Nechť p, k jsou celá čísla taková, že nejsou současně obě lichá a $p > k \geqq 0$. Pak v každém mnohoúhelníku typu (*) s dostatečným počtem vrcholů existuje konfigurace úhlopříček typu (p, k).*

Dokážeme nejdříve existenci konfigurací pouze některých typů.

Lemma. *Nechť platí předpoklady naší věty a nechť pro* $p > 1$ *je* $k \neq \frac{1}{2}(p - 1)$. *Pak v každém mnohoúhelníku typu* (*) *s dostatečným počtem vrcholů existuje konfigurace typu* $(p, k)\ \delta$.

Důkaz provedeme úplnou indukcí. Lemma platí zřejmě pro $p = 1, 2, 3$. Nechť $n \geqq 2$ je libovolné přirozené číslo a nechť lemma platí pro všechna $p < 2n$.

V mnohoúhelníku P typu (*) s dostatečným počtem vrcholů zkonstruujme konfiguraci $\mathfrak{A}$ typu $(2n, k)\ \delta$: Pro $k = 0$ konfigurace zřejmě existuje. Pro $0 < k < n$, $k \neq \frac{2}{3}(n - 1)$ sestrojme dvě rovnoběžné konfigurace typů po řadě $(k + 1, k)\ \delta$ a $(2n - k - 1, k)\ \delta$ a jejich složením obdržíme hledanou konfiguraci. Konfigurace $(k + 1, k)\ \delta$ podle indukčního předpokladu existuje, neboť $k + 1 > k > 0$, čísla $k + 1$, k nejsou současně obě lichá, $k \neq \frac{1}{2}((k + 1) - 1)$ a $k + 1 < 2n$. Rovněž existuje konfigurace $(2n - k - 1, k)\ \delta$, neboť pro $k < n$ je též $2k + 1 < 2n$ a tedy $2n - k - 1 > 2k + 1 - k - 1 = k$, obě čísla $2n - k - 1$, k nejsou současně obě lichá, pro $k \neq \frac{2}{3}(n - 1)$ platí $k \neq \frac{1}{2}((2n - k - 1) - 1)$ a konečně $2n - k - 1 < 2n$. Tedy též druhá konfigurace existuje. Uvedené dvě konfigurace sestrojíme tak, aby byly rovnoběžné a aby existovala úhlopříčka mnohoúhelníka P tak, že protne každou úhlopříčku z obou uvedených konfigurací (při dostatečném počtu vrcholů sestrojení takových konfigurací lze provést). Obdržíme tak celkem $(k + 1) + (2n - k - 1) = 2n$ úhlopříček, každá z nich se protíná s k dalšími. Obdrželi jsme zřejmě konfiguraci typu $(2n, k)\ \delta$. Pro $k = \frac{2}{3}(n - 1)$ (jestliže jde o celé číslo) sestrojme konfiguraci $\mathfrak{A}$ složením dvou rovnoběžných konfigurací typů $(k + 2, k)\ \delta$, $(2n - k - 2, k)\ \delta$ (Jestliže je $k = \frac{2}{3}(n - 1)$ číslo celé, je ovšem sudé. Zřejmě $k + 2 > k$, $2n - k - 2 = 2n - \frac{2}{3}(n - 1) - 2 = \frac{4}{3}(n - 1) = 2k > k$, dále zřejmě je $k \neq \frac{1}{2}((k + 2) - 1) = \frac{1}{2}k + \frac{1}{2}$, $k \neq \frac{1}{2}((2n - k - 2) - 1) = \frac{1}{2}(2k - 1)$, neboť k je číslo sudé a obě čísla na pravé straně nejsou celá. Konečně platí $k + 2 = \frac{2}{3}(n - 1) + 2 = \frac{1}{3}(2n + 4) < 2n$ (v důsledku $n \geqq 2$) a dále nerovnost $2n - k - 2 < 2n$. Pro $n \leqq k < 2n$, $k \neq \frac{1}{3}(4n - 1)$ složme konfiguraci $\mathfrak{A}$ ze dvou protínajících se konfigurací typů $(k, 2k - 2n)\ \delta$, $(2n - k, 0)\ \delta$ (Poněvadž $2n > k \geqq n$, je $k > 2k - 2n \geqq 0$ a rovněž $2n - k > 0$. Číslo $2k - 2n$ je sudé. Dále platí $2k - 2n \neq \frac{1}{2}(k - 1)$ pro $k \neq \frac{1}{3}(4n - 1)$. Každá z obou konfigurací má menší počet úhlopříček než $2n$. Tedy indukční předpoklady jsou splněny a obě konfigurace existují. Při dostatečném počtu vrcholů lze obě konfigurace zkonstruovat zřejmě tak, aby se tyto konfigurace protínaly a jejich složením vznikla konfigurace typu δ. Složená konfigurace má celkem $k + (2n - k) = 2n$ úhlopříček. Na každé úhlopříčce první konfigurace leží celkem $(2k - 2n) + (2n - k) = k$ průsečíků, na každé úhlopříčce druhé konfigurace leží $0 + k = k$ průsečíků. Jde tedy opravdu o typ $(2n, k)\ \delta$. Pro $k = \frac{1}{3}(4n - 1)$, jde-li o celé číslo, složme dvě protínající se konfigurace typů $(k - 1, 2k - 2n - 1)\ \delta$, $(2n - k + 1, 1)\ \delta$ (Aby k bylo celé číslo, musí být $n \geqq 4$. Potom zřejmě $k - 1 = \frac{1}{3}(4n - 1) - 1 = \frac{1}{3}(4n - 4) > \frac{1}{3}(2n - 5) = 2k - 2n - 1$, $2n - k +$

$+ 1 = \frac{1}{3}(2n + 4) > 1$. Jestliže k je celé číslo, je to číslo liché. Pak obě čísla $k - 1$ i $2n - k + 1$ jsou sudá. Dále zřejmě $2k - 2n - 1 \neq \frac{1}{2}((k - 1) - 1)$ a $1 \neq \frac{1}{2}((2n - k + 1) - 1)$. Rovněž platí $k - 1 = \frac{4}{3}n - \frac{4}{3} < 2n$, $2n - k + 1 = \frac{1}{3}(2n + 4) < 2n$. Tedy obě konfigurace podle indukčních předpokladů lze sestrojit. Poněvadž každá úhlopříčka jedné konfigurace se protíná s každou úhlopříčkou druhé konfigurace, bude na každé úhlopříčce první konfigurace celkem $(2k - 2n - 1) + (2n - k + 1) = k$ průsečíků a na každé úhlopříčce druhé konfigurace celkem $1 + (k - 1) = k$ průsečíků. Počet všech uvažovaných úhlopříček bude $(k - 1) + (2n - k + 1) = 2n$. Tím máme případ $p = 2n$ vyřešen.

Sestrojme nyní v mnohoúhelníku P konfigurace typu $(2n + 1, k)$ δ pro sudá k: Opět případ $k = 0$ je zřejmý. Pro $0 < k < n$ složme dvě rovnoběžné konfigurace typů $(k + 1, k)$ δ, $(2n - k, k)$ δ (Platí $k + 1 > k$, $2n - k > 2k - k = k$. Dále zřejmě je $k \neq \frac{1}{2}((k + 1) - 1)$ a poněvadž je k číslo sudé, je též $k \neq \frac{1}{2}((2n - k) - 1)$. Poněvadž $0 < k < n$, je $\frac{1}{2}k + \frac{1}{2} < n$, tj. $k + 1 < 2n$ a zřejmě též $2n - k < 2n$. Tedy uvedené konfigurace podle indukčního předpokladu skutečně existují. Pro $n < k \leqq 2n$ složme dvě protínající se konfigurace typů $(k, 2k - 2n - 1)$ δ, $(2n - k + 1, 0)$ δ (Platí $2k - 2n - 1 \leqq 2k - k - 1 = k - 1 < k$. Poněvadž k je číslo sudé, nemohou být obě čísla k, $2k - 2n - 1$ současně obě lichá. Dále je zřejmě $2k - 2n - 1 \neq \frac{1}{2}(k - 1)$, neboť k je sudé. Konečně zřejmě $k < 2n + 1$ a $2n - k + 1 < 2n + 1$. Uvedené konfigurace tedy existují. Případ $k = n$ nemusíme vyšetřovat, neboť (jak bylo v poznámce již dokázáno) konfigurace tohoto typu neexistuje. Tím máme případ $p = 2n + 1$ vyřešen. Lemma je dokázáno.

Uvedené lemma dokazuje naši větu jen zčásti. Zbývá zkonstruovat konfigurace typu $(4n + 1, 2n)$ pro všechna přirozená n (každou konfiguraci konstruujme v mnohoúhelníku typu (*) s dostatečným počtem vrcholů). To se však na základě našeho lemmatu snadno podaří. Stačí uvážit, že je možno zkonstruovat 5 konfigurací $\mathfrak{A}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ typů po řadě $(n, 0)$ δ, $(n, 0)$ δ, $(n, n - 1)$ δ, $(n, n - 1)$ δ, $(1, 0)$ δ tak, že platí $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_4$, $\mathfrak{A}_4 \times \mathfrak{A}_5$, $\mathfrak{A}_5 \times \mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{A}_3 \times \mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_1 \parallel \mathfrak{A}_4$, $\mathfrak{A}_1 \parallel \mathfrak{A}_5$, $\mathfrak{A}_2 \parallel \mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{A}_2 \parallel \mathfrak{A}_5$, $\mathfrak{A}_3 \parallel \mathfrak{A}_4$ (viz obrázek). Naše věta je dokázána.

Problém. K daným číslům p, k nalézt nejmenší číslo n tak, aby v n-úhelníku vlastnosti (*) existovala konfigurace typu (p, k). Bylo by zajímavé studovat konfigurace na jejich minimálních mnohoúhelnících.

О СУЩЕСТВОВАНИИ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ДИАГОНАЛЕЙ ВЫПУКЛОГО МНОГОУГОЛЬНИКА

ВАЦЛАВ ПОЛАК (Václav Polák), Брно

Пусть $p > k \geqq 0$ — целые числа, не одновременно нечетные. Тогда существует натуральное число $N(p, k)$ такое, что для всех $n \geqq N(p, k)$ в каждом выпуклом n-угольнике P, в котором никакие три его диагонали не имеют общую внутреннюю точку, можно построить систему $\mathfrak{A}$ p диагоналей так, что каждая диагональ из $\mathfrak{A}$ пересекает во внутренних точках многоугольника P точно k диагоналей из $\mathfrak{A}$. В статье показана конструкция системы $\mathfrak{A}$. Проблема разыскания нижней грани чисел $N(p, k)$ для данных p, k до сих пор открыта.

ON THE EXISTENCE OF CERTAIN SYSTEMS OF DIAGONALS IN CONVEX POLYGONS

VÁCLAV POLÁK, Brno

Let $p > k \geqq 0$ be two integers not simultaneously odd. Then there exists a positive integer $N(p, k)$ such that for all integers $n \geqq N(p, k)$ in every convex n-gon P, no three diagonals of which have a common interior point, there exists a set $\mathfrak{A}$ of the diagonals with the following property: Every diagonal of $\mathfrak{A}$ is intersected by exactly k other diagonals of $\mathfrak{A}$ and card $\mathfrak{A} = p$. The construction of $\mathfrak{A}$ is given. The problem of finding the lest number $N(p, k)$ with given p and k remains open.