Zdeněk Hustý
Perturbierte homogene lineare Differentialgleichungen

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 91 (1966), No. 2, 154--169

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108112

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 91 (1966), Praha

PERTURBIERTE HOMOGENE LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

ZDENĚK HUSTÝ, Brno

(Eingelangt am 28. November 1964)

VORBEMERKUNGEN UND HILFSSÄTZE

Anstatt „homogene lineare Differentialgleichung" sagen wir kurz „Gleichung". Die Symbole $f', f^{(n)}[f^{[n]}]$ bedeuten die Ableitungen der Funktion f nach $x[t]$. „$x \in I_1$" lesen wir wie folgt: „für alle x im Intervall I_1". Die Funktion $x = T_{-1}(t)$ ist die zu $t = T(x)$ inverse Funktion. Insofern kein Mißverständnis zu befürchten ist, werden wir kurz T statt $T(x)$ schreiben. Ist q eine nichtnegative ganze Zahl, so bedeutet das Symbol $T(x) \in C_q(I_1)$, daß die Funktion $T^{(q)}$ im Intervall I_1 stetig ist. Mit E_1 bezeichnen wir die Menge aller (endlichen) reellen Zahlen.

Es sei $T(x) \in C_3(I_1)$, $T' \neq 0$ in I_1. Der Ausdruck

$$\{T, x\} = \frac{1}{2}\frac{T'''}{T'} - \frac{3}{4}\left(\frac{T''}{T'}\right)^2, \quad x \in I_1$$

heißt die Schwarzsche Ableitung der Funktion $T(x)$ im Intervall I_1.

Die *allgemeine* Gleichung n-ter Ordnung ist von der Gestalt

$$\text{(a)} \quad \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i(x)\, y^{(n-i)}(x) = 0\,, \quad a_0 \not\equiv 0 \text{ in } I_1\,, \quad a_i \in C_0(I_1)\,, \quad i = 0, 1, \ldots, n\,.$$

Wenn $a_i/a_0 \in C_0(I_1)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ $(a_0 \equiv 1)$ $[a_1 \equiv 0]$ $\{a_i \equiv 0,\ i = 1, 2\}$ ist, so wird (a) *regulär* (*normal*) [*halbkanonisch*] {*kanonisch*} genannt. Die Gleichung (a) mit $a_0 \neq 0$ in I_1 ist regulär. Wenn (a) in I_1 regulär ist, so bezeichnen wir die Gleichung

$$y^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \frac{a_i}{a_0}\, y^{(n-i)} = 0$$

als *Normalform* von (a) in I_1.

Der Begriff der Dimension wird in [2; I] erklärt. Die Gleichung (a) wird eine *Gleichung mit Dimension* genannt, falls der Koeffizient a_i die Dimension i, $i = 0, 1, \ldots, n$

und die Funktion $y(x)$ die Dimension 0 hat. Der Koeffizient a_i von (a) hat in I_1 eine stetige Dimension, falls $a_i \in C_{n-i}(I_1)$ ist. Die Gleichung (a) wird eine *reguläre Gleichung mit stetiger Dimension* in I_1 genannt, falls $(a_i / a_0) \in C_{n-i}(I_1)$, $i = 1, 2, \dots, n$ ist.

Es sei die Gleichung

(b) $$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} b_i(t)\, z^{[n-i]}(t) = 0$$

in I_2 definiert und es sei $I = I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$. Die Gleichungen (a), (b) sind in I identisch, wenn $a_i = b_i$, $i = 0, 1, \dots, n$, $x \in I$ und wir schreiben (a) = (b). Es sei (a) [(b)] in $I_1[I_2]$ regulär. Die Gleichungen (a), (b) sind in I *quasiidentisch*, wenn sie in I dasselbe Hauptsystem (von Lösungen) haben. Bezeichnung: (a) $\doteq$ (*b*), $x \in I_1$.

Im folgenden setzen wir voraus, daß (a) eine reguläre Gleichung mit stetiger Dimension in I_1 ist.

Der Begriff der iterierten Gleichung ist in [I; S. 40] erklärt.

(0.1) *Die Gleichung* (a) *ist in* I_1 *iteriert dann und nur dann, wenn sie in* I_1 *zu einer regulären Gleichung mit stetiger Dimension quasiidentisch ist, die wir durch* $(n-1)$*-fache Iteration der Gleichung*

$$u^2 y' + [a_1 u^2 - (n-1)\, u u']\, y = 0\,, \quad a_1 \in C_{n-1}(I_1)$$

erhalten, wobei u eine beliebige Lösung der Gleichung

$$y'' + \frac{3}{n+1}\left[\frac{a_2}{a_0} - \left(\frac{a_1}{a_0}\right)' - \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2\right] y = 0\,, \quad x \in I_1$$

ist. Siehe [1; Satz 7,1].

(0.2) *Die Gleichung* (a) *ist in* I_1 *iteriert dann und nur dann, wenn sie in* I_1 *mit der Gleichung*

(0.2.1) $$I_n\left(y; \frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}\right) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f_i\left(\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}\right) y^{(n-i)} = 0$$

wobei $f_i(x_1, x_2)$, $i = 0, 1, \dots, n$ *für gegebenes n das iterierte Polynom zweier Veränderlichen mit Dimension i ist, quasiidentisch ist.* Siehe [1; Bem. 8,1a].

(0.3) $$f_0(x_1, x_2) = 1\,, \quad f_1(x_1, x_2) = x_1\,, \quad f_2(x_1, x_2) = x_2\,.$$

Siehe [1; Satz 6,1, (7,29)].

(0.4) $$I_n\left(y; 0, \frac{a_2}{a_0}\right) = I_n\left(y; \frac{a_2}{a_0}\right) = y^{(n)} + \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} f_i\left(\frac{a_2}{a_0}\right) y^{(n-i)}\,,$$

wobei $f_i(x_2) = f_i(0, x_2)$, $i = 0, 2, 3, \dots, n$ für gegebenes n das iterierte Polynom einer Veränderlichen mit Dimension i ist. Siehe [1; Bem. 7,3c].

Es sei $\emptyset \neq I_{1x} \subset I_1$. Mit dem Symbol $m(I_{1x})$ bezeichnen wir die Menge, deren Elemente folgendermaßen definiert sind: eine zweigliedrige Folge $\{T(x), u(x)\} \in \in m(I_{1x})$, falls

$$T(x) \in C_{n+1}(I_{1x}),\ T'(x) \neq 0,\ x \in I_{1x},\ T'(x) \text{ hat die Dimension } 0\,,$$
$$u(x) \in C_n(I_{1x}),\quad u(x) \neq 0,\ x \in I_{1x},\ u(x) \text{ hat die Dimension } 0\,.$$

Wählen wir ein Element $\{T(x), u(x)\} \in m(I_{1x})$. Die Gleichung (a) geht durch die Transformation $y(x) = u(x)\, Z(x)$, $t = T(x)$ in eine Gleichung (ā) über, die wir das *Bild* von (a) in I_{1x} der Koordinaten $T(x), u(x)$ nennen. Bezeichnung: (ā) $\{T(x), u(x)\}$. Mit $o_a(I_{1x})$ $[p_a(I_{1x})]$ $\{k_a(I_{1x})\}$ bezeichnen wir die Menge aller Bilder [halbkanonischer Bilder] {kanonischer Bilder} von (a) in I_{1x}, deren Koordinaten Elemente der Menge $m(I_{1x})$ sind.

(0.5) *Das Bild* (ā) $\{T(x), U(x)\} \in o_a(I_{1x})$ *ist halbkanonisch dann und nur dann, wenn*

$$(0.5.1) \qquad U(x) = c \exp\left\{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_1}{a_0}\,\mathrm{d}s\right\} |T'|^{(1-n)/2}\,, \quad 0 \neq c \in E_1\,, \quad x \in I_{1x}\,.$$

Siehe [2; I- (3,2.11)].

Da das halbkanonische Bild (ā) $\{T(x), U(x)\} \in p_a(I_{1x})$ laut (0.5.1) durch die erste Koordinate bestimmt wird, schreiben wir statt (ā) $\{T(x), U(x)\} \in p_a(I_{1x})$ kurz (ā) $\{T(x)\} \in p_a(I_{1x})$.

Das Bild (ā) $\{x\} \in p_a(I_1)$ nennen wir das *halbkanonische Hauptbild* von (a) oder auch die *halbkanonische Hauptform* von (a).

Gilt

$$(0.6) \qquad A_i(x) = \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} a_k(x)\, \chi_{i-k}\left(-\frac{a_1}{a_0}\right), \quad i = 0, 1, \ldots, n\,, \quad x \in I_1\,,$$

wobei χ_{i-k} das Polynom des Elementes $-a_1/a_0$ mit Dimension $i-k$ ist, so können wir das halbkanonische Hauptbild von (a) in der Form

$$(\mathrm{A}) \quad c\,.\exp\left\{-\int_{x_0}^{x} (a_1/a_0)\,\mathrm{d}s\right\}\left[A_0(x)\, Z^{(n)}(x) + \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} A_i(x)\, Z^{(n-i)}(x)\right] = 0\,, \quad x \in I_1$$

schreiben. Siehe [2; I-3,2; S.498]. Laut (0.6) ist $A_0 = a_0$, $A_1 = 0$. Die Funktionen $\mathfrak{A}_i = A_i/A_0$, $i = 2, 3, \ldots, n$ bezeichnen wir als *Hauptkoeffizienten von* (a).

Die Funktionen $\Theta_i(\mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_i)$, kurz Θ_i, $i = 3, 4, \ldots, n$ sind in [2; III-(3.30)] definiert und werden *Hauptinvarianten* von (a) genannt.

(0.7) *Es sei* $a_0 = 1$. *Dann ist*

$$(0.7.1) \qquad A_i = \mathfrak{A}_i\,, \quad i = 2, 3, \ldots, n$$

und laut [2; III-(3,35)] *gelten die Formeln*

(0.7.2) $$\Theta_i(A_2, \dots, A_i) = a_i + h_i(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}), \quad i = 3, 4, \dots, n,$$

wobei h_i *ein Polynom der Elemente* $a_1, a_2, \dots, a_{i-1}$ *mit Dimension* i *ist.*

(0.8) $$(\bar{a})\,\{T(x)\} \in k_a(I_{1x}) \Leftrightarrow \{T, x\} = \frac{3}{n+1}\,\mathfrak{A}_2, \quad x \in I_{1x}.$$

Siehe [2; I-Hilfssatz 3,3.1].

Es seien $\bar{\mathfrak{A}}_j$, $j = 2, 3, \dots, n$ resp. $\Theta_i(\bar{\mathfrak{A}}_2, \dots, \bar{\mathfrak{A}}_i)$, $i = 3, 4, \dots, n$ die Hauptkoeffizienten resp. Hauptinvarianten des Bildes $(\bar{a})\,\{T(x), u(x)\} \in o_a(I_{1x})$. Laut [2; III-Satz 3.3] gilt

(0.9) $$\Theta_i\{\bar{\mathfrak{A}}_2[T(x)], \dots, \bar{\mathfrak{A}}_i[T(x)]\}\,[T'(x)]^i = \Theta_i(\mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_i),$$
$$x \in I_{1x}, \quad i = 3, 4, \dots, n.$$

Den Intervall

(0.10) $$I_{2t} = T(I_{1x})$$

nennen wir Definitionsbereich des Bildes $(\bar{a})\,\{T(x), u(x)\} \in o_a(I_{1x})$.

(0.11) *Das Bild* $(\bar{a})\,\{T(x), u(x)\} \in o_n(I_{1x})$ *ist von der Gestalt*

$(\bar{a})$ $$u(x)\,[T'(x)]^n \left[\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \bar{a}_i(t)\, z^{[n-i]}(t)\right] = 0, \quad x = T_{-1}(t), \quad t \in I_{2t}$$

mit $z(t) = Z[T_{-1}(t)]$,

(0.11.1)
$$\bar{a}_i(t) = [T'(x)]^{-i} \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} a_k(x)\Phi_{i-k}^{n,i}[\eta(x), \zeta(x)], \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad x = T_{-1}(t),$$

(0.11.2) $$\eta(x) = \frac{T''(x)}{T'(x)}, \quad \zeta(x) = \frac{u'(x)}{u(x)},$$

wobei $\Phi_{i-k}^{n,i}$ *für gegebenes* n *das* i*-te Polynom der Elemente* η, ζ *mit Dimension* $i - k$ *ist.* Siehe [2; I-Satz 3.1.10].

Laut [2; I-(2,3.4)] ist

(0.12) $$\Phi_0^{n,i}(\eta, \zeta) = 1, \quad \Phi_1^{n,i}(\eta, \zeta) = \frac{n-i}{2}\eta + \zeta, \quad \Phi_2^{n,i}(\eta, \zeta) =$$
$$= \frac{(n-i)(3n-3i+1)}{12}\eta^2 + (n-i)\left(\tfrac{1}{3}\eta' + \eta\zeta\right) + \zeta^2 + \zeta', \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

(0.13) *Das halbkanonische Bild* $(\bar{\mathrm{A}})$ $\{T(x)\} \in p_a(I_{1x})$ *ist von der Gestalt*

$(\bar{\mathrm{A}})$

$$U(x)\,[T'(x)]^n \left[\bar{A}_0(t)\, z^{[n]}(t) + \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} \bar{A}_i(t)\, z^{[n-i]}(t)\right] = 0\,, \quad x = T_{-1}(t)\,, \quad t \in I_{2t}\,,$$

mit

$$(0.13.1)\quad \bar{A}_i(t) = [T'(x)]^{-i} \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} A_k(x)\, \Phi^{n,i}_{i-k}[\eta(x)]\,, \quad i = 2, 3, \ldots, n\,, \quad x = T_{-1}(t)\,,$$

wobei (0.5.1), (0.6) *gilt.* Siehe [2; I- Satz 3,2.15)].

Nach [2; I- (2,3.6)] ist

(0.14)

$$\Phi^{n,i}_0(\eta) = 1\,, \quad \Phi^{n,i}_1(\eta) = -\frac{i-1}{\eta}\,, \quad \Phi^{n,i}_2(\eta) = \frac{n + 3i^2 - 7i + 3}{12}\,\eta^2 - \frac{n + 2i - 3}{6}\,\eta'\,.$$

(0.15) *Wenn* $\{T, x\} = [3/(n+1)]\,\mathfrak{A}_2$ *gilt, so ist das Bild* $(\bar{\mathrm{A}})$ $\{T(x)\} \in p_a(I_{1x})$ *kanonisch und läßt sich in der Form* $(\bar{\mathrm{A}})$ *mit* (0.13.1) *schreiben, wobei* $\bar{A}_2 = 0$, (0.5.1), (0.6),

$$(0.15.1)\qquad \eta' = \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{6}{n+1}\,\mathfrak{A}_2$$

$$(0.15.2)\qquad \Phi^{n,i}_{i-k}(\eta) = \frac{(n-i)!\,(i-k)!}{(n-k)!} \sum_{\varrho=0}^{i-k} \eta^{i-k-\varrho} F^{n,i,k}_{\varrho}(\mathfrak{A}_2)\,, \quad x \in I_{1x}\,,$$

$$i = 0, 1, \ldots, n\,; \quad k = 0, 1, \ldots, i$$

gilt. $F^{n,i,k}_{\varrho}$ *ist für gegebene n, i das k-te Polynom des Elementes* $\mathfrak{A}_2$ *mit Dimension* ϱ. Siehe [2; I- Satz 3,3.5].

1. PERTURBIERTE GLEICHUNGEN

Es sei

$$\text{(a)}\qquad y^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a_i(x)\, y^{(n-i)}(x) = 0$$

eine Gleichung mit stetiger Dimension im Intervall I_1. Es seien ferner $f_i(x_1, x_2)$, $i = 0, 1, \ldots, n$ für gegebenes n iterierte Polynome. Setzen wir

$$\textbf{(1.1)}\qquad \omega_i = a_i - f_i(a_1, a_2)\,, \quad i = 3, 4, \ldots, n\,, \quad x \in I_1\,,$$

Die Gleichung (a) können wir mit Hilfe von (1.1) umformen und finden

$$(\omega) \qquad I_n(y; a_1, a_2) + \sum_{i=3}^{n} \binom{n}{i} \omega_i(x)\, y^{(n-i)}(x) = 0\,, \quad x \in I_1\,.$$

Die Gleichung (ω) bezeichnen wir als *perturbierte Gleichung* oder *perturbierte Form von* (a) und die Funktion ω_i nennen wir *Perturbationskoeffizient von* (a) *der Dimension i.*

(1.2) *Die Gleichung* (a) *ist im Intervall* I_1 *iteriert dann und nur dann, wenn* $a_i = f_i(a_1, a_2)$, $i = 3, 4, \ldots, n$, $x \in I_1$ *ist.*

Der Beweis ergibt sich aus (0.2), (0.3).

(1.3) *Die Gleichung* (a) *ist im Intervall* I_1 *iteriert dann und nur dann, wenn* $\omega_i \equiv 0$, $i = 3, 4, \ldots, n$, $x \in I_1$ *ist, wobei* ω_i, $i = 3, 4, \ldots, n$ *Perturbationskoeffizienten von* (a) *sind.*

Folgt aus (1.1), (1.2).

(1.4) *Die Gleichung* (a) *ist im Intervall* I_1 *iteriert dann und nur dann, wenn* $\Theta_i \equiv 0$, $i = 3, 4, \ldots, n$, $x \in I_1$ *ist, wobei* Θ_i, $i = 3, 4, \ldots, n$ *Hauptinvarianten von* (a) *sind.*

Der Beweis ergibt sich aus dem Satz 4.4, der in [2; III] hergeleitet wird.

Im folgenden setzen wir die Funktionen $\omega_i[\Theta_i]$, $i = 3, 4, \ldots, n$ als Perturbationskoeffizienten [Hauptinvarianten] von (a) voraus. Zu bemerken ist, daß für die Hauptkoeffizienten von (a) die Beziehungen (0.7.1) und (0.6) mit $a_0 = 1$ gelten.

(1.5) $\omega_i \equiv 0\,, \quad i = 3, 4, \ldots, n\,, \quad x \in I_1 \Leftrightarrow \Theta_i \equiv 0\,, \quad i = 3, 4, \ldots, n\,, \quad x \in I_1\,.$

Folgt aus (1.3), (1.4).

(1.6) $$\omega_k \equiv 0\,, \quad k = 3, 4, \ldots, i\,, \quad x \in I_1 \Leftrightarrow \Theta_k \equiv 0\,, \quad k = 3, 4, \ldots, i\,, \quad x \in I_1\,, \quad 3 \leqq i \leqq n\,.$$

Für $i = n$ folgt (1.6) aus (1.5). Setzen wir also voraus, daß $3 \leqq i < n$ ist. I. Nehmen wir zunächst an, daß $\omega_k \equiv 0$, $k = 3, 4, \ldots, i$, $x \in I_1$ ist. Es verbleibt $\Theta_k \equiv 0$, $k = 3, 4, \ldots, i$, $x \in I_1$ zu zeigen. Dazu machen wir die Widerspruchsannahme $\Theta_j \not\equiv 0$, $3 \leqq j \leqq i$, $\Theta_k \equiv 0$, $k = 3, 4, \ldots, j-1$. Betrachten wir jetzt die Gleichung

$$(1.6.1) \qquad y^{(n)} + \sum_{\nu=1}^{j} \binom{n}{\nu} a_\nu y^{(n-\nu)} + \sum_{\nu=j+1}^{n} \binom{n}{\nu} f_\nu(a_1, a_2)\, y^{(n-\nu)} = 0\,, \quad x \in I_1\,.$$

Laut (0.7.2) [(1.1)] sind die Funktionen $\Theta_\nu[\omega_\nu]$, $\nu = 3, 4, \ldots, j$ durch die Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots, a_\nu[a_1, a_2, a_\nu]$ eindeuting bestimmt, so daß die Funktionen $\Theta_\nu[\omega_\nu]$, $\nu = 3, 4, \ldots, j$ Hauptinvarianten [Perturbationskoeffizienten] von (1.6.1) sind. Nach (1.1) und der Voraussetzung verschwinden in I_1 alle Perturbationskoeffizienten von (1.6.1). Laut (1.5) verschwinden in I_1 auch alle Hauptinvarianten von (1.6.1), was zu $\Theta_j \not\equiv 0$ im Widerspruch steht. II. Es sei jetzt $\Theta_k \equiv 0$, $k = 3, 4, \ldots, i$ und es existiere ein derartiger Perturbationskoeffizient ω_j, daß $3 \leqq j \leqq i$, $\omega_j \not\equiv 0$, $\omega_k \equiv 0$, $k = 3, 4, \ldots, j - 1$. Betrachten wir jetzt die Gleichung

$$(1.6.2) \quad y^{(n)} + \sum_{\nu=1}^{j} \binom{n}{\nu} a_\nu y^{(n-\nu)} + \sum_{\nu=j+1}^{n} \binom{n}{\nu} \bar{h}_\nu(a_1, a_2, \ldots, a_{\nu-1})\, y^{(n-\nu)} = 0\,, \quad x \in I_1\,,$$

wobei

$$(1.6.3) \qquad \bar{h}_{j+1}(a_1, a_2, \ldots, a_j) = -h_{j+1}(a_1, a_2, \ldots, a_j)\,,$$

$$(1.6.4) \quad \bar{h}_\nu(a_1, a_2, \ldots, a_{\nu-1}) = -h_\nu(a_1, a_2, \ldots, a_j, \bar{h}_{j+1}, \bar{h}_{j+2}, \ldots, \bar{h}_{\nu-1}),$$
$$\nu = j + 2, j + 3, \ldots, n\,.$$

Die Funktionen h_ν, $\nu = j + 1, j + 2, \ldots, n$ sind durch die Formeln (0.7.2) bestimmt. Zu bemerken ist, daß die Funktionen $\Theta_\nu[\omega_\nu]$, $\nu = 3, 4, \ldots, j$ Hauptinvarianten [Perturbationskoeffizienten] von (1.6.2) sind. Nach (0.7.2), (1.6.3), (1.6.4) und der Voraussetzung verschwinden in I_1 alle Hauptinvarianten von (1.6.2). Laut (1.5) verschwinden in I_1 auch alle Perturbationskoeffizienten von (1.6.2), was zu $\omega_j \not\equiv 0$ im Widerspruch steht. Damit ist (1.6) bewiesen.

(1.7)
$$\omega_k \equiv 0\,, \quad k = 3, 4, \ldots, i - 1\,, \quad \omega_i \not\equiv 0\,, \quad x \in I_1 \Leftrightarrow$$
$$\Theta_k \equiv 0\,, \quad k = 3, 4, \ldots, i - 1\,, \quad \Theta_i \not\equiv 0\,, \quad x \in I_1\,.$$

Folgt aus (1.6).

(1.8) $\Theta_i = \omega_i + g_i(\omega_3, \omega_4, \ldots, \omega_{i-1}, a_1, a_2)\,, \quad i = 3, 4, \ldots, n\,, \quad x \in I_1\,,$

wo g_i ein Polynom der Elemente $\omega_3, \omega_4, \ldots, \omega_{i-1}, a_1, a_2$ mit Dimension i ist, dessen jedes Glied wenigstens eine der Funktionen $\omega_k^{(s)}$, $k = 3, 4, \ldots, i - 1$; $s = 0, 1, \ldots, i - k$ als Koeffizient hat.

Wenn wir in (0.7.2) $a_\nu = \omega_\nu + f_\nu(a_1, a_2)$, $\nu = 3, 4, \ldots, i$ einsetzen, erhalten wir

$$(1.8.1) \quad \Theta_i = \omega_i + f_i(a_1, a_2) + h_i[a_1, a_2, \omega_3 + f_3(a_1, a_2), \ldots, \omega_{i-1} + f_{i-1}(a_1, a_2)]\,.$$

Das Polynom h_i teilen wir in zwei Teile. Zum ersten Teil, den wir mit $g_i(\omega_3, \omega_4, \ldots, \omega_{i-1}, a_1, a_2)$ bezeichnen, gehören jene Glieder des Polynoms h_i, die wenigstens eine der Funktion $\omega_k^{(s)}$, $k = 3, 4, \ldots, i - 1$, $s = 0, 1, \ldots, i - k$ als Koeffizient haben, so daß $g_i \equiv 0$, wenn $\omega_k \equiv 0$, $k = 3, 4, \ldots, i - 1$. Zum zweiten Teil, den wir mit $\bar{g}_i(f_1, f_2, \ldots, f_{i-1})$, $f_1 = a_1$, $f_2 = a_2$, $f_j = f_j(a_1, a_2)$, $j = 3, 4, \ldots, i - 1$ bezeichnen, gehören die anderen Glieder des Polynoms h_i. Die Gleichung (1.8.1) können wir also in der Form

$$\Theta_i = \omega_i + g_i(\omega_3, \omega_4, \ldots, \omega_{i-1}, a_1, a_2) + f_i(a_1, a_2) + \bar{g}_i(f_1, f_2, \ldots, f_{i-1})$$

schreiben. Nach (1.6) gilt

$$(1.8.2) \qquad f_i(a_1, a_2) = -\bar{g}_i(f_1, f_2, \ldots, f_{i-1}), \quad x \in I_1,$$

so daß (1.8) in Kraft ist.

(1.9) *Der erste Perturbationskoeffizient von* (a), *der in* I_1 *identisch nicht verschwindet, ist die Hauptinvariante von* (a).

Folgt aus (1.8). Diese Behauptung setzt die Anordnung der Perturbationskoeffizienten nach der Dimension voraus, wo ω_j vor ω_k ist, wenn $j < k$ ist, so daß ω_3 als der erste Perturbationskoeffizient bezeichnet wird und immer $\omega_3 = \Theta_3$ gilt.

$$\textbf{(1.10)} \qquad \omega_i = \Theta_i + G_i(\Theta_3, \Theta_4, \ldots, \Theta_{i-1}, a_1, a_2), \quad i = 3, 4, \ldots, n, \quad x \in I_1,$$

wo G_i *ein Polynom der Elemente* $\Theta_3, \Theta_4, \ldots, \Theta_{i-1}, a_1, a_2$ *mit Dimension* i *ist, dessen jedes Glied wenigstens eine der Funktionen* $\Theta_k^{(s)}$, $k = 3, 4, \ldots, i-1$, $s = 0, 1, \ldots, i-k$ *als Koeffizient hat.*

Folgt aus (1.8).

(1.11) Nach (1.8.2) schließen wir, daß $f_i(a_1, a_2)$ *das Polynom der Elemente* $f_1, f_2, \ldots, f_{i-1}$ *mit Dimension* i *ist.*

Es seien $f_i(X)$, $i = 0, 2, 3, \ldots, n$ iterierte Polynome in einer Unbestimmten einer Gleichung n-ter Ordnung. Durch die Substitutionen

$$\textbf{(1.12)} \qquad \Omega_i = A_i - f_i(A_2), \quad i = 3, 4, \ldots, n, \quad x \in I_1,$$

wo A_i, $i = 2, 3, \ldots, n$ die Hauptkoeffizienten von (a) sind, geht die halbkanonische Hauptform von (a) in eine Gleichung der Gestalt

$$(\Omega) \qquad I_n(Z; A_2) + \sum_{i=3}^{n} \binom{n}{i} \Omega_i(x)\, Z^{(n-i)}(x) = 0, \quad x \in I_1$$

über. Die Gleichung (Ω) bezeichnen wir als *perturbierte halbkanonische Hauptform* von (a) und die Funktion Ω_i nennen wir *Hauptsemiinvariante* von (a) der Dimension i.

2. TRANSFORMATION PERTURBIERTER GLEICHUNGEN

In den Absätzen 2. und 3. werden alle Bezeichnungen aus dem Absatz 1. verwendet.

(2.1) *Die perturbierte Form des Bildes* ($\bar{a}$) $\{T(x), u(x)\} \in o_a(I_{1x})$ *ist eine Gleichung von der Gestalt*

$$(\bar{\omega}) \quad u[T_{-1}(t)]\, \{T'[T_{-1}(t)]\}^n \{I_n(z; \bar{a}_1, \bar{a}_2) + \sum_{i=3}^{n} \binom{n}{i} \bar{\omega}_i(t)\, z^{[n-i]}(t)\} = 0, \quad t \in I_{2t},$$

mit

$$(2.1.1)\quad \bar{a}_1(t) = [T'(x)]^{-1}\{\Phi_1^{n,1}[\eta(x),\zeta(x)] + a_1(x)\}\,, \quad x = T_{-1}(t)\,, \quad t \in I_{2t}\,,$$

$$(2.1.2)\quad \bar{a}_2(t) = [T'(x)]^{-2}\{\Phi_2^{n,2}[\eta(x),\zeta(x)] + 2\Phi_1^{n,2}[\eta(x),\zeta(x)]\,a_1(x) + a_2(x)\}\,,$$
$$x = T_{-1}(t)\,, \quad t \in I_{2t}\,,$$

$$(2.1.3)\qquad I_n(z;\bar{a}_1,\bar{a}_2) = z^{[n]}(t) + \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i} f_i(\bar{a}_1,\bar{a}_2)\, z^{[n-i]}(t)\,,$$

$$(2.1.4)\qquad f_i(\bar{a}_1,\bar{a}_2) = [T'(x)]^{-i}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k} f_k(a_1,a_2)\,\Phi_{i-k}^{n,i}(\eta,\zeta)\,,$$
$$x = T_{-1}(t)\,, \quad t\in I_{2t}\,, \quad i = 1,2,\ldots,n\,,$$

$$(2.1.5)\qquad \bar{\omega}_i(t) = [T'(x)]^{-i}\sum_{k=3}^{i}\binom{i}{k}\omega_k(x)\,\Phi_{i-k}^{n,i}(\eta,\zeta)\,, \quad x = T_{-1}(t)\,,$$
$$t\in I_{2t}\,, \quad i = 3,4,\ldots,n\,,$$

wobei (0.12) *für* $i = 1, 2$ *gilt.*

Laut (0.11) ist das Bild (ā) $\{T(x), u(x)\} \in o_a(I_{1x})$ von der Gestalt (ā), wobei (0.11.1) (0.11.2) mit $a_0 = 1$ gilt. Wenn wir in (0.11.1) $i = 1, 2$ einsetzen, erhalten wir (2.1.1) (2.1.2). Führen wir die Funktionen

$$(2.1.6)\qquad \bar{\omega}_i(t) = \bar{a}_i(t) - f_i(\bar{a}_1,\bar{a}_2)\,, \quad i = 3,4,\ldots,n\,, \quad t\in I_{2t}\,,$$

ein. Dann können wir die Gleichung (ā) mit Hilfe von (2.1.6) umformen und erhalten die perturbierte Form ($\bar{\omega}$) von (a). Setzen wir ferner (1.1) in (0.11.1) ein. Dann folgt aus (0.11.1) unter Benutzung von (0.3)

$$(2.1.7)\qquad \bar{a}_i(t) = [T'(x)]^{-i}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k} f_k(a_1,a_2)\,\Phi_{i-k}^{n,i}[\eta,\zeta] +$$
$$+ [T'(x)]^{-i}\sum_{k=3}^{i}\binom{i}{k}\omega_k\,\Phi_{i-k}^{n,i}[\eta,\zeta]\,, \quad x = T_{-1}(t)\,, \quad t\in I_{2t}\,, \quad i = 1,2,\ldots,n\,,$$

wobei wir $\sum_{k=3}^{i} = 0$, $i = 1, 2$ setzen. Die Gleichungen (2.1.6) können wir unter Berücksichtigung von (2.1.7) in folgender Form schreiben:

$$(2.1.8)\qquad \bar{\omega}_i(t) = [T'(x)]^{-i}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k} f_k(a_1,a_2)\,\Phi_{i-k}^{n,i}[\eta,\zeta] -$$
$$- f_i(\bar{a}_1,\bar{a}_2) + [T'(x)]^{-i}\sum_{k=3}^{i}\binom{i}{k}\omega_k\,\Phi_{i-k}^{n,i}[\eta,\zeta]\,, \quad i = 3,4,\ldots,n\,.$$

Nach (0.9), (1.6) schließen wir, daß (2.1.4) für $i = 3, 4, \ldots, n$ in Kraft ist. Laut (0.3), (2.1.1), (2.1.2) gilt (2.1.4) für $i = 1, 2$. Nach Einführung der Ergebnisse (2.1.4) in (2.1.8) folgt (2.1.5). Damit ist alles bewiesen.

(2.2) $$\omega_k \equiv 0\,, \quad k = 3, 4, \ldots, i\,, \quad x \in I_{1x} \Leftrightarrow \bar{\omega}_k \equiv 0\,, \quad k = 3, 4, \ldots, i\,,$$
$$t \in I_{2t}\,, \quad 3 \leqq i \leqq n\,.$$

Folgt aus (0.9), (1.6).

(2.3) $$\omega_k \equiv 0\,, \quad k = 3, 4, \ldots, i - 1\,, \quad \omega_i \not\equiv 0\,, \quad x \in I_{1x} \Leftrightarrow \bar{\omega}_k \equiv 0\,,$$
$$k = 3, 4, \ldots, i - 1\,, \quad \bar{\omega}_i \not\equiv 0\,, \quad t \in I_{2t}\,.$$

Folgt aus (0.9), (1.7).

(2.4) Wenn (2.3) gilt, so ist $\bar{\omega}_i[T(x)]\,[T'(x)]^i = \omega_i(x)$.

Folgt aus (0.9), (1.9).

(2.5) *Die perturbierte halbkanonische Hauptform von* (a) *ist von der Gestalt* (Ω) *mit*

$$A_2 = a_2 - a_1' - a_1^2\,,$$

$$I_n(Z; A_2) = Z^{(n)}(x) + \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} f_i(A_2)\, Z^{(n-i)}(x)\,;$$

$$f_i(A_2) = \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} f_k(a_1, a_2)\, \chi_{i-k}(-a_1)\,, \quad i = 2, 3, \ldots, n\,, \quad x \in I_1\,,$$

$$\Omega_i(x) = \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} \omega_k \chi_{i-k}(-a_1)\,, \quad i = 3, 4, \ldots, n\,, \quad x \in I_1\,,$$

wobei A_i, $i = 2, 3, \ldots, n$ *die Hauptkoeffizienten von* (a) *sind.*

Folgt aus (2.1), falls wir $T(x) = x$, $u(x) = c\,.\exp\{-\int_{x_0}^{x} a_1\, ds\}$, $0 \neq c \in E_1$, $x_0 \in I_1$, $\bar{a}_1 = 0$, $\bar{a}_2 = A_2$, $\zeta = -a_1$, $\Phi_{i-k}^{n,i}(0, -a_1) = \chi_{i-k}(-a_1)$ setzen, s. [2; I, (2,3.2)].

(2.6) *Die perturbierte Form des halbkanonischen Bildes* ($\bar{\text{A}}$) $\{T(x)\} \in p_a(I_{1x})$ *ist von der Gestalt*

$$(\bar{\Omega}) \quad U[T_{-1}(t)]\,\{T'[T_{-1}(t)]\}^n \left\{ I_n(z; \bar{A}_2) + \sum_{i=3}^{n} \binom{n}{i} \bar{\Omega}_i(t)\, z^{[n-i]}(t) \right\} = 0\,, \quad t \in I_{2t}\,,$$

mit

$$\bar{A}_2(t) = [T'(x)]^{-2} \left\{ \frac{n+1}{6} \left[\frac{1}{2} \eta^2(x) - \eta'(x) \right] + A_2(x) \right\}, \quad x = T_{-1}(t)\,, \quad t \in I_{2t}\,,$$

$$I_n(z; \bar{A}_2) = z^{[n]}(t) + \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} f_i(\bar{A}_2)\, z^{[n-i]}(t)\,,$$

$$(2.6.1)\qquad f_i(\bar{A}_2) = [T'(x)]^{-i}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k} f_k(A_2)\,\Phi^{n,i}_{i-k}(\eta)\,, \quad x = T_{-1}(t)\,,$$

$$t \in I_{2t}\,, \quad i = 2, 3, \ldots, n\,,$$

$$(2.6.2)\qquad \bar{\Omega}_i(t) = [T'(x)]^{-i}\sum_{k=3}^{i}\binom{i}{k}\Omega_k(x)\,\Phi^{n,i}_{i-k}(\eta)\,, \quad x = T_{-1}(t)\,,$$

$$t \in I_{2t}\,, \quad i = 3, 4, \ldots, n\,,$$

wobei A_i, $i = 2, 3, \ldots, n[\Omega_j$, $j = 3, 4, \ldots, n]$ *die Hauptkoeffizienten* [*die Hauptsemiinvarianten*] *von* (a) *sind und* (0.5.1) *gilt.*

Diese Behauptung beweisen wir auf dieselbe Art wie (2.1), wenn wir (0.13), (0.14), $\bar{\Omega}_i(t) = \bar{A}_i - f_i(\bar{A}_2)$, $i = 3, 4, \ldots, n$ statt (0.11), (0.12), (2.1.6) benützen.

(2.7) *Die perturbierte Form des kanonischen Bildes* ($\bar{\alpha}$) $\{T(x)\} \in k_a(I_{1x})$ *ist von der Gestalt*

$$[U(T_{-1}(t)]\,\{T'[T_{-1}(t)]\}^n\left\{z^{[n]}(t) + \sum_{i=3}^{n}\binom{n}{i}\bar{\Omega}_i(t)\,z^{[n-i]}(t)\right\} = 0\,, \quad t \in I_{2t}$$

mit

$$(2.7.1)\qquad \bar{\Omega}_i(t) = i!\,(n-i)!\,[T'(x)]^{-i}\sum_{k=3}^{i}\frac{1}{k!\,(n-k)!}\,\Omega_k(x)\sum_{\varrho=0}^{i-k}\eta^{i-k-\varrho}F^{n,i,k}_{\varrho}(A_2)\,,$$

$$i = 3, 4, \ldots, n\,, \quad x = T_{-1}(t)\,, \quad t \in I_{2t}\,,$$

wobei A_2 *der Hauptkoeffizient von* (a), Ω_i, $i = 3, 4, \ldots, n$ *die Hauptsemiivarianten von* (a) *sind und* (0.5.1), (0.15.1) *gilt.*

Folgt aus (2.6), falls wir $\bar{A}_2 = 0$,

$$(2.7.2)\qquad f_i(\bar{A}_2) = 0\,, \quad i = 2, 3, \ldots, n\,,$$

$I_n(z; \bar{A}_2) = z^{[n]}(t)$, (0.15.2) setzen.

(2.8)

$$\sum_{k=0}^{\nu}\frac{1}{k!\,(n-k)!}f_k(A_2)\,F^{n,i,k}_{\nu-k}(A_2) = 0\,, \quad \nu = 0, 1, \ldots, i\,, \quad i = 3, 4, \ldots, n\,, \quad x \in I_1\,.$$

Es sei $T(x)$ eine Lösung der Gleichung $\{T, x\} = [3/(n+1)]\,A_2$, die in einem beliebigen Punkt $x_0 \in I_1$ die Anfangsbedingungen

$$(2.8.1)\qquad T(x_0) = t_0\,, \quad T'(x_0) = 1\,, \quad T''(x_0) = \xi$$

erfüllt und die im Intervall $\emptyset \neq I_{1x_0} \subset I_1$ definiert ist, wobei $\xi \in E_1$ ebenfalls beliebig ist. Es sei $T(I_{1x_0}) = I_{2t_0}$. Laut (2.7.2), (2.6.1), (0.15.2) gilt

$$(2.8.2)\quad i!\,(n-i)!\,[T'(x)]^{-i}\sum_{k=0}^{i}\frac{1}{k!\,(n-k)}f_k(A_2)\sum_{\varrho=0}^{i-k}\eta^{i-k-\varrho}F_{\varrho}^{n,i,k}(A_2)=0\,,$$
$$x=T_{-1}(t)\,,\quad t\in I_{2t_0}\,,\quad i=3,4,\ldots,n\,.$$

Durch Einsetzen $\varrho = \nu - k$, $t = T(x)$ in (2.8.2) finden wir

$$(2.8.3)\quad \sum_{\nu=0}^{i}\eta^{i-\nu}\sum_{k=0}^{\nu}\frac{1}{k!\,(n-k)!}f_k(A_2)\,F_{\nu-k}^{n,i,k}(A_2)=0\,,\quad x\in I_{1x_0}\,,\quad i=3,4,\ldots,n\,.$$

Führen wir in (2.8.3) $x = x_0$ ein, so ist mit Rücksicht auf (2.8.1), (0.11.2)

$$(2.8.4)\quad \sum_{\nu=0}^{i}\xi^{i-\nu}\sum_{k=0}^{\nu}\frac{1}{k!\,(n-k)!}f_k[A_2(x_0)]\,F_{\nu-k}^{n,i,k}[A_2(x_0)]=0\,,\quad i=3,4,\ldots,n\,.$$

Da ξ eine beliebige Zahl ist, muß (2.8) im Punkt $x_0 \in I_1$ gelten. Da $x_0 \in I_1$ ebenfalls beliebig ist, gilt (2.8) für alle $x \in I_1$.

3. GESCHLECHT HOMOGENER LINEARER GLEICHUNGEN

Es seien Θ_i, $i = 3, 4, \ldots, n$ die Hauptinvarianten von (a) und es sei k, $2 \leqq k \leqq n$ eine natürliche Zahl. Gilt $\Theta_j \equiv 0$, $j = 3, 4, \ldots, n + 2 - k$, $\Theta_{n+3-k} \not\equiv 0$ (für $k = 2$ setzen wir $\Theta_{n+1} = 0$), so sagen wir, daß die Gleichung (a) des *Geschlechtes* k ist. Äquivalente Gleichungen sind desselben Geschlechtes. S. [3; III].

(3.1) (a) *ist genau dann eine Gleichung des Geschlechtes k, wenn*

$$(3.1.1)\quad I_n(y;\,a_1,a_2)+\sum_{i=n+3-k}^{n}\binom{n}{i}\omega_i y^{(n-i)}=0\,,\quad \omega_{n+3-k}\not\equiv 0\,,\quad \sum_{i=n+1}^{n}\equiv 0\,,$$

die perturbierte Form von (a) *ist.*

Folgt aus (1.7).

(3.2) (a) *ist genau dann eine Gleichung des Geschlechtes k, wenn*

$$I_n(z;\,\bar a_1\bar a_2)+\sum_{i=n+3-k}^{n}\binom{n}{i}\bar\omega_i z^{[n-i]}=0\,,\quad \bar\omega_{n+3-k}\not\equiv 0\,,\quad t\in I_{2t}\,.$$

mit (2.1.1)–(2.1.5) *die perturbierte Normalform des Bildes* (ā) $\{T(x), u(x)\} \in o_a(I_{1x})$ *ist.*

Folgt aus (2.1), (2.3), (3.1).

(3.3) (a) *ist genau dann eine Gleichung des Geschlechtes k, wenn*

$$z^{[n]}+\sum_{i=n+3-k}^{n}\binom{n}{i}\bar\Omega_i z^{[n-i]}=0\,,\quad \bar\Omega_{n+3-k}\not\equiv 0\,,\quad t\in I_{2t}$$

mit (2.7.1) *die perturbierte Normalform des Bildes* ($\bar\alpha$) $\{T(x)\} \in k_a(I_{1x})$ *ist.*

Folgt aus (3.2).

Es sei M die Menge aller regulären Gleichungen mit stetiger Dimension im Intervall I_1. Auf der Menge M existiert die Zerlegung in Klassen der Gleichungen desselben Geschlechtes.

Aus [3; Satz 2.9] folgt diese Behauptung: *Eine selbstadjungierte Gleichung n-ter Ordnung ist eine Gleichung des Geschlechtes höchstens* $n - 1$.

(a) *ist genau dann eine Gleichung des Geschlechtes* 2, *wenn sie iteriert ist.*

(a) *ist genau dann eine Gleichung des Geschlechtes* $\leqq 3$, *wenn jedes ihrer kanonischen Bilder eine binomische Gleichung ist.*

In der Arbeit [4] wurden einige Eigenschaften von Gleichungen des Geschlechtes 2, 3 und 4 untersucht. Auf Grund der in [4] angeführten Ergebnisse gilt z.B. folgende Behauptung: *Es sei im Intervall* $I_1 \equiv \langle x_0, \infty)$ (a) *eine Gleichung des Geschlechtes* $\leqq 3$ *und es sei* $A_2[\Omega_n]$ *der Hauptkoeffizient [die Hauptinvariante] von* (a). *Wenn die Gleichung* $y'' + [3/(n + 1)] A_2 y = 0$ *oszillatorisch ist und* $\Omega_n \geqq 0$, $x \in I_1$, *so oszilliert jede Lösung von* (a), *die wenigstens eine Nullstelle hat. Falls n gerade ist, so ist* (a) *streng oszillatorisch.*

Viele für Gleichungen 2-ter Ordnung bewiesenen Eigenschaften kann man leicht für Gleichungen n-ter Ordnung und des Geschlechtes 2 formulieren. Man kann erwarten, daß einige für Gleichungen k-ter Ordnung bewiesenen Eigenschaften allgemein für Gleichungen n-ter Ordnung und des Geschlechtes k gelten werden, s. [4].

Literatur

[1] *Hustý Z.*: Die Iteration homogener linearer Differentialgleichungen. Publ. Fac. Sci. Univ. J. E. Purkyně, Brno, No. 449 (1964), 23—56.

[2] *Hustý Z.*: Über die Transformation und Äquivalenz linearer Differentialgleichungen von höherer als der zweiten Ordnung. Czech. Math. J. I. Teil *15* (*90*) 1965, No. 4, 479—502. II. Teil *16* (*91*) 1966, No. 1, 1—13. III. Teil *16* (*91*) 1966 No. 2, (im Druck).

[3] *Hustý Z.*: Adjungierte und selbstadjungierte lineare Differentialgleichungen. Archivum mathematicum (Brno) T *1* (1965), 21—34.

[4] *Густы З.*: Некоторые колебательные свойства однородного линейного дифференциального уравнения n-ого порядка ($n \geqq 3$). Чех. мат. ж. *14* (*89*) 1964, 27—38.

Anschrift des Verfassers: Brno - Černá Pole, Zemědělská 5, (Vysoká škola zemědělská).

Výtah

PERTURBOVANÉ HOMOGENNÍ LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

ZDENĚK HUSTÝ, Brno

Rovnici (a) $y^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a_i y^{(n-i)} = 0$, $a_i \in C_{n-i}(I_1)$ můžeme psát v perturbovaném tvaru (ω) $I_n(y; a_1, a_2) + \sum_{i=3}^{n} \binom{n}{i} \omega_i y^{(n-i)} = 0$, kde $I_n(y; a_1, a_2) = 0$ je iterovaná rovnice n-tého řádu, ω_i je koeficient perturbace rovnice (a) dimense i. **(1.3)** *Rovnice (a) je iterovaná právě tehdy, když* $\omega_i \equiv 0$, $i = 3, 4, \ldots, n$. Nechť Θ_i, $i = 3, 4, \ldots, n$ jsou fundamentální invarianty rovnice (a). **(1.6)** $\omega_k \equiv 0$, $k = 3, 4, \ldots, i \Leftrightarrow \Theta_k \equiv 0$, $k = 3, 4, \ldots, i$; $3 \leqq i \leqq n$. **(1.8)** $\Theta_i = \omega_i + g_i(\omega_3, \omega_4, \ldots, \omega_{i-1}, a_1, a_2)$, $i = 3, 4, \ldots, \ldots, n$, *kde* g_i *je polynom prvků* $\omega_3, \omega_4, \ldots, \omega_{i-1}, a_1, a_2$ *dimense* $i - k$, *jehož každý člen má za součinitele aspoň jednu z funkcí* $\omega_k^{(s)}$, $k = 3, 4, \ldots, i - 1$; $s = 0, 1, \ldots, \ldots, i - k$. **(1.9)** *První nenulový koeficient perturbace je fundamentálním invariantem.* Rovnici (A) $Z^{(n)} + \sum_{i=3}^{n} \binom{n}{i} A_i Z^{(n-i)} = 0$, kde A_i, $i = 2, 3, \ldots, n$ jsou fundamentální koeficienty rovnice (a), nazýváme fundamentálním polokanonickým tvarem rovnice (a). Rovnici (A) můžeme psát v perturbovaném tvaru (Ω) $I_n(Z; A_2) + \sum_{i=3}^{n} \binom{n}{i} \Omega_i Z^{(n-i)} = 0$, kde Ω_i je fundamentální semiinvariant rovnice (a) dimense i, $i = 3, 4, \ldots, n$.

Nechť $I_{1x} \subset I_1$, $T(x) \in C_{n+1}(I_{1x})$, $u(x) \in C_n(I_{1x})$, $T'(x)\, u(x) \neq 0$ v I_{1x}. Transformací $y(x) = u(x)\, Z(x)$, $t = T(x)$ převedeme rovnici (a) na rovnici (ā), kterou nazýváme obrazem rovnice (a) v intervalu I_{1x} o souřadnicích $T(x)$, $u(x)$ a zavádíme označení (ā) $\{T(x), u(x)\}$. **(0.5)** *Obraz* (ā) $\{T(x), U(x)\}$ *je polokanonický právě tehdy, když* $U(x) = c \,.\, \exp\{-\int_{x_0}^{x} (a_1/a_0)\, ds\}\, |T'|^{(1-n)/2}$. Podle (0.5) soudíme, že polokanonický obraz je určen první souřadnicí a proto zavádíme označení (ā) $\{T(x)\}$. **(2.1)** *Obraz* (ā) $\{T(x), u(x)\}$ *má perturbovaný tvar* ($\bar{\omega}$) $u(T')^n[I_n(z; \bar{a}_1, \bar{a}_2) + \sum_{i=3}^{n} \binom{n}{i} \bar{\omega}_i z^{[n-i]}] = 0$, *kde klademe* $\bar{a}_1 = (T')^{-1}[\Phi_1^{n,1}(\eta, \zeta) + a_1]$, $\bar{a}_2 = (T')^{-2}[\Phi_2^{n,2}(\eta, \zeta) + 2\Phi_1^{n,2}(\eta, \zeta)\, a_1 + a_2)$, $\bar{\omega}_i = (T')^{-i} \sum_{k=3}^{i} \binom{i}{k} \omega_k \Phi_{i-k}^{n,i}(\eta, \zeta)$, $\Phi_{i-k}^{n,i}(\eta, \zeta)$ *jsou jisté polynomy dimense* $i - k$ *prvků* $\eta = T''/T'$, $\zeta = u'/u$. **(2.2)** $\omega_k \equiv 0$, $k = 3, 4, \ldots, i \Leftrightarrow \bar{\omega}_k \equiv 0$, $k = 3, 4, \ldots, i$, $3 \leqq i \leqq n$. **(2.6)** *Polokanonický obraz* ($\bar{A}$) $\{T(x)\}$ *má perturbovaný tvar* $U(T')^n [I_n(z; \bar{A}_2) + \sum_{i=3}^{n} \binom{n}{i} \bar{\Omega}_i z^{[n-i]}] = 0$, *kde klademe* $\bar{A}_2 = (T')^{-2}\{[(n+1)/6]\, (\frac{1}{2}\eta^2 - \eta') + A_2\}$, $\bar{\Omega}_i = (T')^{-i} \sum_{k=3}^{i} \binom{i}{k} \Omega_k \Phi_{i-k}^{n,i}(\eta)$, $\Phi_{i-k}^{n,i}(\eta)$ *jsou jisté polynomy dimense* $i - k$ *prvku* η. **(2.7)** *Kanonický obraz* ($\bar{\alpha}$) $\{T(x)\}$ *má per-*

turbovaný tvar $U(T')^n\left[z^{[n]} + \sum_{i=3}^{n} \binom{n}{i} \bar{\Omega}_i z^{[n-i]}\right] = 0$, *kde klademe* $\bar{\Omega}_i = i!(n-i)!\,.$ $.\,(T')^{-i} \sum_{k=3}^{n} (1/k!\,(n-k)!)\, \Omega_k \sum_{\varrho=0}^{i-k} \eta^{i-k-\varrho} F_{\varrho}^{n,i,k}(A_2)$, $F_{\varrho}^{n,i,k}(A_2)$ *jsou jisté polynomy dimense* ϱ *prvku* A_2. **(2.8)** $\sum_{k=0}^{\nu} (1/k!\,(n-k)!) f_k(A_2)\, F_{\nu-k}^{u,i,k}(A_2) = 0$, $\nu = 0, 1, \ldots, i$, $i = 3, 4, \ldots, n$, kde $f_k(A_2)$ je iterovaný polynom dimense k prvku A_2.

Jestliže $\Theta_j \equiv 0$, $j = 3, 4, \ldots, n+2-k$, $\Theta_{n+3-k} \not\equiv 0$ (pro $k = 2$ klademe $\Theta_{n+1} = 0$), pak říkáme, že rovnice (a) je *rodu k*. **(3.1)** *Rovnice* (a) *je rodu k tehdy a jen tehdy, když rovnice* $I_n(y;\, a_1, a_2) + \sum_{i=n+3-k}^{n} \binom{n}{i} \omega_i y^{(n-i)} = 0$ *je perturbovaným tvarem rovnice* (a). Samoadjungované rovnice n-tého řádu jsou rodu nejvýše $n-1$. Rovnice n-tého řádu jsou rodu nejvýše 3 právě tehdy, když jejich kanonické obrazy jsou binomické rovnice. Rovnice je rodu 2 právě tehdy, když je iterovaná. Mnoho vlastností rovnic druhého řádu můžeme snadno formulovat pro rovnice n-tého řádu rodu 2. Dá se očekávat, že některé vlastnosti rovnic k-tého řádu budou platit obecně pro rovnice n-tého řádu rodu k.

Резюме

ПЕРТУРБИРОВАННЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ЗДЕНЕК ГУСТЫ (Zdeněk Hustý), Брно

Уравнение (a) $y^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a_i y^{(n-i)} = 0$, $a_i \in C_{n-i}(I_1)$ можно писать в пертурбированном виде (ω) $I_n(y;\, a_1, a_2) + \sum_{i=3}^{n} \binom{n}{i} \omega_i y^{(n-i)} = 0$, где $I_n(y; a_1, a_2) = 0$ является итерированным уравнением n-ого порядка, ω_i коэффициентом пертурбации уравнения (a) размерности i. **(1.3)** *Уравнение* (a) *является итерированным тогда и только тогда, если* $\omega_i \equiv 0$, $i = 3, 4, \ldots, n$. Пусть Θ_i, $i = 3, 4, \ldots, n$ являются фундаментальными инвариантами уравнения (a). **(1.6)** $\omega_k \equiv 0$, $k = 3, 4, \ldots, i \Leftrightarrow \Theta_k \equiv 0$, $k = 3, 4, \ldots, i$; $3 \leqq i \leqq n$. **(1.8.)** $\Theta_i = \omega_i + g_i(\omega_3, \omega_4, \ldots, \omega_{i-1}, a_1, a_2)$, $i = 3, 4, \ldots, n$, *где* g_i *— полином элементов* $\omega_3, \omega_4, \ldots, \omega_{i-1}, a_1, a_2$ *размерности* i, *каждый член которого имеет в качестве коэффициента одну из функций* $\omega_k^{(s)}$, $k = 3, 4, \ldots, i-1$; $s = 0, 1, \ldots, i-k$. **(1.9)** *Первый коэффициент пертурбации, который отличен от нуля в некоторой точке интервала* I_1, *является фундаментальным инвариантом.* Уравнение (A) $Z^{(n)} + \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} A_i Z^{(n-i)} = 0$, где A_i, $i = 2, 3, \ldots, n$ являеются фундаментальными коэффициентами уравнения (a), мы называем фундаментальной полуканонической формой уравнения (a).

Уравнение (A) возможно писать в пертурбированном виде (Ω) $I_n(Z; A_2) + \sum_{i=3}^{n} \binom{n}{i} \Omega_i Z^{(n-i)} = 0$, где Ω_i является фундаментальным семиинвариантом уравнения (a) размерности i, $i = 3, 4, \ldots, n$.

Пусть $I_{1x} \subset I_1$, $T(x) \in C_{n+1}(I_{1x})$, $u(x) \in C_n(I_{1x})$, $T'(x)\,u(x) \neq 0$, $x \in I_{1x}$. Трансформацией $y(x) = u(x)\,Z(x)$, $t = T(x)$ переведем уравнение (a) в уравнение (ā), которое называем образом уравнениея (a) в интервале I_{1x} с координатами $T(x)$, $u(x)$; введем обозначение (ā) $\{T(x), u(x)\}$. **(0.5)** *Образ* (ā) $\{T(x), U(x)\}$ *является полуканоническим тогда и только тогда, если* $U(x) = c \exp\{-\int_{x_0}^{x} (a_1/a_0)\,ds\} \cdot |T'|^{(1-n)/2}$. Из (0.5) следует, что полуканонический образ определен первой координатой, и поэтому мы вводим обозначение (ā) $\{T(x)\}$. **(2.1)** *Образ* (ā) $\{T(x), u(x)\}$ *принимает пертурбированную форму* ($\bar{\omega}$) $u(T')^n [I_n(z; a_1, a_2) + \sum_{i=3}^{n} \binom{n}{i} \bar{\omega}_i z^{[n-i]}] = 0$, *где* $\bar{a}_1 = (T')^{-1} [\Phi_1^{n,1}(\eta, \zeta) + a_1]$, $\bar{a}_2 = (T')^{-1} [\Phi_2^{n,2}(\eta, \zeta) + 2\Phi_1^{n,2}(\eta, \zeta)\, a_1 + a_2]$, $\bar{\omega}_i = (T')^{-i} \sum_{k=3}^{i} \binom{i}{k} \omega_k \Phi_{i-k}^{n,i}(\eta, \zeta)$, $\Phi_{i-k}^{n,i}(\eta, \zeta)$ *являются полиномами размерности* $i - k$ *элементов* $\eta = T''/T'$, $\zeta = u'/u$. **(2.2)** $\omega_k \equiv 0$, $k = 3, 4, \ldots, i \Leftrightarrow \bar{\omega}_k \equiv 0$, $k = 3, 4, \ldots, n$, $3 \leqq i \leqq n$. **(2.6)** *Полуканонический образ* ($\bar{\text{A}}$) $\{T(x)\}$ *имеет пертурбированную форму* $U(T')^n [I_n(z; \bar{A}_2) + \sum_{i=3}^{n} \binom{n}{i} \bar{\Omega}_i z^{[n-i]}] = 0$, *где* $\bar{A}_2 = (T')^{-2} [((n+1)/6)(\frac{1}{2}\eta^2 - \eta') + A_2]$, $\bar{\Omega}_i = (T')^{-i} \sum_{k=3}^{i} \binom{i}{k} \Omega_k \Phi_{i-k}^{n,i}(\eta)$, $\Phi_{i-k}^{n,i}(\eta)$ *являются полиномами размерности* $i - k$ *элемента* η. **(2.7)** *Канонический образ* ($\bar{\alpha}$) $\{T(x)\}$ *имеет пертурбированную форму* $U(T')^n [z^{[n]} + \sum_{i=3}^{n} \binom{n}{i} \bar{\Omega}_i z^{[n-i]}] = 0$, *где* $\bar{\Omega}_i = i!\,(n-i)!\,(T')^{-i} \sum_{k=3}^{n} (1/k!\,(n-k)!)\,\Omega_k \sum_{\varrho=0}^{i-k} \eta^{i-k-\varrho} F_{\varrho}^{n,i,k}(A_2)$, $F_{\varrho}^{n,i,k}(A_2)$ *являются полиномами размерности* ϱ *элемента* A_2. **(2.8)** $\sum_{k=0}^{\nu} (1/k!\,(n-k)!) \cdot f_k(A_2)\, F_{\nu-k}^{n,i,k}(A_2) = 0$, $\nu = 0, 1, \ldots, i$, $i = 3, 4, \ldots, n$, *где* $f_k(A_2)$ *является итерированным полиномом размерности* k *элемента* A_2.

Если $\Theta_j \equiv 0$, $j = 3, 4, \ldots, n + 2 - k$, $\Theta_{n+3-k} \not\equiv 0$ (для $k = 2$ положим $\Theta_{n+1} = 0$), потом говорим, что уравнение (a) рода k. **(3.1)** *Уравнение* (a) *является уравнением рода* k *тогда и только тогда, если уравнение* $I_n(y; a_1, a_2) + \sum_{i=n+3-k}^{n} \binom{n}{i} \cdot \omega_i y^{(n-i)} = 0$ *является пертурбированной формой уравнения* (a). Самосопряженные уравнения n-ого порядка являются рода $\leqq n - 1$. Уравнения n-того порядка является рода $\leqq 3$ тогда и только тогда, когда их канонические образы являются биномическими уравнениями. Уравнение является рода 2 тогда и только тогда, если оно итерировано. Много свойств уравнений второго порядка можно легко сформулировать для уравнений n-ого порядка рода 2. Можно ожидать, что некоторые свойства уравнений k-ого порядка будут справедливы вообще для уравнений n-ого порядка рода k.