Milan Hejný

Korešpondencia smerov dotykového a normálového priestoru variety $\mathfrak{V}_k$ in $E_n$

*Časopis pro pěstování matematiky*, Vol. 91 (1966), No. 2, 198--204

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108110`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 91 (1966), Praha

# KOREŠPONDENCIA SMEROV DOTYKOVÉHO A NORMÁLOVÉHO PRIESTORU VARIETY $\mathscr{V}_k$ V $E_n$

MILAN HEJNÝ, Bratislava

(Došlo dňa 5. mája 1965)

Nech je daná varieta $\mathscr{V}_k$ v $E_n$: $\mathrm{M} = \mathrm{M}(u^1, \ldots, u^k)$, kde $(u^1, \ldots, u^k)$ je bod reálnej, $k$-rozmernej oblasti parametrov. Nech je M regulárny bod variety $\mathscr{V}_k$. Dotykový a normálový priestor variety v bode M označíme v danom poradí $\mathscr{T}(\mathrm{M})$ a $\mathscr{N}(\mathrm{M})$. Potom $\dim \mathscr{T} = k$, $\dim \mathscr{N} = h = n - k$. Priestory $\mathscr{T}$ a $\mathscr{N}$ sú totálne ortogonálne a preto je možné voliť sprievodný ortonormálny repér variety $\mathscr{V}_k$ tak, aby bolo

$$(1) \qquad \mathscr{T}\colon \{\mathrm{M}; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\} \quad \mathscr{N}\colon \{\mathrm{M}; \mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}\,.$$

Aby sme mohli využiť špeciálnej voľby repéru, danej podmienkami (1), zavedieme následujúce označenie

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_k \end{pmatrix}_{kn} \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n \end{pmatrix}_{hn}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \end{pmatrix}_{nn}$$

a ďalej

$$\boldsymbol{\tau} = (\omega^1, \ldots, \omega^k)_{1k}\,; \quad \boldsymbol{\nu} = (\omega^{k+1}, \ldots, \omega^n)_{1h}\,; \quad \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\tau}; \boldsymbol{\nu})_{1n}\,.$$

Indexy, pripísané k pravému dolnému okraju matice značia v danom poradí počet riadkov a počet stĺpcov danej matice.

Rovnice štruktúry priestoru $E_n$ budeme písať v maticovom tvare

$$(2) \qquad \begin{aligned} \mathrm{d}\mathrm{M} &= \boldsymbol{\omega}\mathbf{E} \\ \mathrm{d}\mathbf{E} &= \boldsymbol{\Omega}\mathbf{E} \\ \boldsymbol{\Omega} &+ \boldsymbol{\Omega}' = 0\,, \end{aligned}$$

pričom čiarka, pripísaná k pravému hornému rohu symbolu matice značí operátor transponovania matice. Podmienky integrability majú potom tvar

$$(3) \qquad \begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{\omega} &= \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\Omega} \\ \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega} &= \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\Omega} \end{aligned}$$

kde symbol pfaffovského násobenia $\wedge$, je zrejmým spôsobom aplikovaný i na súčin matíc.

Maticu $\mathbf{\Omega}$ rozdelíme na 4 polia takto:

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Pi} & \mathbf{\Phi} \\ \mathbf{\Psi} & \mathbf{\Sigma} \end{pmatrix}_{nn},$$

kde $\mathbf{\Pi}_{kk}$, $\mathbf{\Phi}_{kh}$, $\mathbf{\Psi}_{hk}$, $\mathbf{\Sigma}_{hh}$.

Pomocou uvedeného označenia je možné prepísať rovnice (2) v tvare

$$(2') \qquad \begin{aligned} \mathrm{d}\mathbf{M} &= \boldsymbol{\tau}\mathbf{T} + \boldsymbol{\nu}\mathbf{N} \\ \mathrm{d}\mathbf{T} &= \mathbf{\Pi}\mathbf{T} + \mathbf{\Phi}\mathbf{N} \\ \mathrm{d}\mathbf{N} &= \mathbf{\Psi}\mathbf{T} + \mathbf{\Sigma}\mathbf{N} \end{aligned}$$

$$\mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}' = \mathbf{0}\,, \quad \mathbf{\Sigma} + \mathbf{\Sigma}' = \mathbf{0}\,, \quad \mathbf{\Phi} + \mathbf{\Psi}' = \mathbf{0}$$

a podmienky integrability v tvare

$$(3') \qquad \begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{\tau} &= \boldsymbol{\tau} \wedge \mathbf{\Pi} + \boldsymbol{\nu} \wedge \mathbf{\Psi} \\ \mathrm{d}\boldsymbol{\nu} &= \boldsymbol{\tau} \wedge \mathbf{\Phi} + \boldsymbol{\nu} \wedge \mathbf{\Sigma} \\ \mathrm{d}\mathbf{\Pi} &= \mathbf{\Pi} \wedge \mathbf{\Pi} + \mathbf{\Phi} \wedge \mathbf{\Psi} \\ \mathrm{d}\mathbf{\Phi} &= \mathbf{\Pi} \wedge \mathbf{\Phi} + \mathbf{\Phi} \wedge \mathbf{\Sigma} \\ \mathrm{d}\mathbf{\Psi} &= \mathbf{\Psi} \wedge \mathbf{\Pi} + \mathbf{\Sigma} \wedge \mathbf{\Psi} \\ \mathrm{d}\mathbf{\Sigma} &= \mathbf{\Psi} \wedge \mathbf{\Phi} + \mathbf{\Sigma} \wedge \mathbf{\Sigma} \end{aligned}$$

Použijeme teraz špecializáciu repéru, ktorá je daná podmienkami (1) – tj. prejdeme od repéru nultého rádu k repéru prvého rádu. Pretože $\mathrm{d}\mathbf{M} \in \mathscr{T}$, vyplýva z (1)

$$\boldsymbol{\nu} = \mathbf{0} \quad \text{a teda aj} \quad \mathrm{d}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{0}\,.$$

Dosaďme tieto vzťahy do druhej z rovníc (3') a na obdržanú rovnicu

$$\boldsymbol{\tau} \wedge \mathbf{\Phi} = \mathbf{0}$$

aplikujme Cartanovu lemu. Tak dostaneme maticovú rovnicu

$$(4) \qquad \mathbf{\Phi} = (\underset{1}{\mathbf{A}}\boldsymbol{\tau}'; \ldots; \underset{h}{\mathbf{A}}\boldsymbol{\tau}')$$

kde

$$\underset{1}{\mathbf{A}}, \ldots, \underset{h}{\mathbf{A}}$$

sú štvorcové symetrické matice stupňa $k$. Prvky týchto matíc sú reálne čísla, resp. funkcie.

Na ploche v $E_3$ je možné definovať krivoznačné čiary ako krivky, ktorých normálová (normála vzhľadom k ploche!) priamková plocha je rozvinuteľná. Pokúsime sa o zovšeobecnenie takto zavedených význačných čiar plochy na variety $\mathscr{V}_k$ v $E_n$.

Nech $\Gamma \equiv R = R(t)$ je krivka na variete $\mathscr{V}_k$. Hľadajme obálky jednoparametrického systému normálových priestorov $\mathscr{N}(t)$. Normálová obálka, ako hľadané krivky stručne nazveme, bude určená dvoma geometrickými požiadavkami:

$$1) \quad X(t) \in \mathscr{N}(t)$$

$$2) \quad dX \equiv \mathbf{0} \bmod \mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n .$$

Súradnice vektoru $\mathbf{x} = X - M$ v báze $\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n$ označme

$$\mathbf{x} = (x^1, \ldots, x^h)_{1h} .$$

Horeuvedené požiadavky zapíšeme v tvare

$$\begin{aligned} X &= M + \mathbf{x}\mathbf{N} \\ dX &= \mathbf{0} \bmod \mathscr{T} . \end{aligned} \tag{5}$$

Diferencovaním prvej z rovníc (5) a užitím (2′) bude

$$dX = (\boldsymbol{\tau} + \mathbf{x}\boldsymbol{\Psi}) \,.\, \mathbf{T} + (d\mathbf{x} + \mathbf{x}\boldsymbol{\Sigma})\, \mathbf{N} ,$$

z čoho, použitím druhej z rovníc (5) obdržíme

$$\boldsymbol{\tau} + \mathbf{x}\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{0} .$$

Túto rovnicu je možné ďalej upraviť použitím poslednej z rovníc (2′) a vzťahu (4) na tvar

$$\mathbf{x} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\tau}\underset{1}{\mathbf{A}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\tau}\underset{h}{\mathbf{A}} \end{pmatrix}_{hk} - \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$$

odkiaľ po meušej úprave dostávame konečný tvar

$$\boldsymbol{\tau}(x^1 \underset{1}{\mathbf{A}} + \ldots + x^h \underset{h}{\mathbf{A}} - \mathbf{I}) = \mathbf{0} , \tag{6}$$

kde $\mathbf{I}$ je jednotková matica stupňa $k$.

Na maticovú rovnicu (6) je možné hľadieť ako na sústavu k homogenných rovníc o $k$ neznámych $\omega^1, \ldots, \omega^k$. Nutná a postačujúca podmienka pre existenciu netriviálneho riešenia je anulovanie determinantu sústavy, tj.

$$|x^1 \underset{1}{\mathbf{A}} + \ldots + x^h \underset{h}{\mathbf{A}} - \mathbf{I}| = 0 . \tag{7}$$

Rovnica (7) je rovnicou $k$-teho stupňa pre $h$ súradníc bodu X. Odtiaľ vyplýva

**Veta 1.** *Množina bodov dotyku pevného normálového priestoru $\mathscr{N}(M)$ a normálo-*

*vých obálok, tvorí v priestore $\mathscr{N}$ algebraickú nadplochu $\pi(\mathrm{M})$ stupňa k. Bod* M *sám pritom na nadploche $\pi(\mathrm{M})$ neleží.*

V ďalšom ukážeme, že rovnica (6) indukuje korešpondenciu smerov priestorov $\mathscr{T}(\mathrm{M})$ a $\mathscr{N}(\mathrm{M})$. Nech Q je bod nadplochy $\pi(\mathrm{M})$ a nech

$$\mathrm{Q} = \mathrm{M} + q^1\mathbf{e}_{k+1} + \ldots + q^h\mathbf{e}_n\,.$$

Ak do rovnice (6) dosadíme za vektor $\mathbf{x}$ horeuvedený vektor $\mathbf{q}$, potom takto vzniklá maticová rovnica bude mať aspoň jedno netriviálne riešenie. Všetky riešenia $\boldsymbol{\tau}$ vytvoria lineárny priestor, ktorého dimenzia je rovná defektu matice

$$(q^1\underset{1}{\mathbf{A}} + \ldots + q^h\underset{h}{\mathbf{A}} - \mathbf{I})_{kk}\,.$$

Rovnica (6) indukuje takto korešpondenciu medzi bodmi nadplochy $\pi(\mathrm{M})$ a istými lineárnymi podpriestormi vektorového priestoru $\mathscr{T}$. Túto korešpondenciu označíme $\mathfrak{K}$. Symbolom $\mathfrak{K}(\mathrm{Q})$ budeme značiť ten lineárny podpriestor v $\mathscr{T}$, ktorý odpovedá v korešpondencii $\mathfrak{K}$ bodu $\mathrm{Q} \in \pi(\mathrm{M})$.

**Lema.** *Nech* $\mathrm{Q}_1$, $\mathrm{Q}_2$ *sú dva rôzne body nadplochy* $\pi(\mathrm{M})$, *ktoré ležia na priamke idúcej bodom* M. *Potom lineárne priestory* $\mathfrak{K}(\mathrm{Q}_1)$ *a* $\mathfrak{K}(\mathrm{Q}_2)$ *sú ortogonálne. (Samozrejme, že nie nutne totálne ortogonálne.)*

Dôkaz. Nech $\boldsymbol{\sigma}_i \in \mathfrak{K}(\mathrm{Q}_i)$ a $\mathbf{q}_i = \mathrm{Q}_i - \mathrm{M}$ pre $i = 1, 2$. Potom je podľa predpokladu $\mathbf{q}_2 = \lambda\mathbf{q}_1$. Z rovnice (6) vyplýva

$$\boldsymbol{\sigma}_1(q_1^1\underset{1}{\mathbf{A}} + \ldots + q_1^h\underset{h}{\mathbf{A}} - \mathbf{I}) = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_2(q_2^1\underset{1}{\mathbf{A}} + \ldots + q_2^h\underset{h}{\mathbf{A}} - \mathbf{I}) = \mathbf{0}$$

a ďalej

$$\boldsymbol{\sigma}_1(q_1^1\underset{1}{\mathbf{A}} + \ldots + q_1^h\underset{h}{\mathbf{A}}) = \boldsymbol{\sigma}_1\mathbf{I}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_2(q_2^1\underset{1}{\mathbf{A}} + \ldots + q_2^h\underset{h}{\mathbf{A}}) = \boldsymbol{\sigma}_2\mathbf{I}\,.$$

Poslednú rovnicu môžeme, vzhľadom na symetriu matíc $\mathbf{A}$ písať v nasledujúcom tvare

$$(q_2^1\underset{1}{\mathbf{A}} + \ldots q_2^h\underset{h}{\mathbf{A}})\,\boldsymbol{\sigma}_2' = \mathbf{I}\boldsymbol{\sigma}_2'\,.$$

Použitím uvedených vzťahov dostávame postupné rovnosti

$$\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2' = \boldsymbol{\sigma}_1\mathbf{I}\boldsymbol{\sigma}_2' = \boldsymbol{\sigma}_1(q_2^1\underset{1}{\mathbf{A}} + \ldots + q_2^h\underset{h}{\mathbf{A}})\,\boldsymbol{\sigma}_2' =$$

$$= \lambda\boldsymbol{\sigma}_1(q_1^1\underset{1}{\mathbf{A}} + \ldots + q_1^h\underset{h}{\mathbf{A}})\,\boldsymbol{\sigma}_2' = \lambda\boldsymbol{\sigma}_1\mathbf{I}\boldsymbol{\sigma}_2' = \lambda\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2'\,.$$

Pretože sú body $Q_1$ a $Q_2$ podľa predpokladu rôzne, je $\lambda \neq 1$, a preto

$$\sigma_1 \cdot \sigma_2' = 0 ,$$

čiže smery $\sigma_1$ a $\sigma_2$ sú na seba kolmé, čo sme chceli dokázať.

**Veta 2.** *Nech je v priestore* $\mathcal{N}(\mathrm{M})$ *daná taká priamka* p *idúca bodom* M, *ktorá pretne nadplochu* $\pi(\mathrm{M})$ *v* $k$ *rôznych bodoch* $Q_1, \ldots, Q_k$. *Potom priestory* $\mathfrak{K}(Q_1), \ldots, \mathfrak{K}(Q_k)$ *sú jednorozmerné a navzájom kolmé.*

Dôkaz. Ortogonalita priestorov $\mathfrak{K}(Q_1)$, popísaná v texte vety, je zaručená lemmou. Zo zrejmých nerovností

$$\dim \mathfrak{K}(Q_i) \geqq 1 , \quad i = 1, \ldots, k$$

a

$$\dim \mathfrak{K}(Q_1) + \ldots + \dim \mathfrak{K}(Q_k) \leqq k$$

vyplýva

$$\dim \mathfrak{K}(Q_1) = \ldots = \dim \mathfrak{K}(Q_k) = 1 .$$

Nech $\mathbf{n}$ je vektor priestoru $\mathcal{N}$. Predpokladajme „regulárny" prípad, že plocha $\pi(\mathrm{M})$ sa nerozpadá. Potom priamka určená bodom M a vektorom $\mathbf{n}$ (s výnimkou niekoľkých „singulárnych" smerov $\mathbf{n}$), pretína plochu $\pi(\mathrm{M})$ v $k$ rôznych bodoch. Každému z týchto odpovedá podľa poslednej vety $k$ vzájomne ortogonálnych smerov priestoru $\mathcal{T}$. Tak dostávame korešpondenciu jedno-$k$-značnú medzi smermi priestorov $\mathcal{T}$ a $\mathcal{N}$. Označme túto korešpondenciu $\mathfrak{L}$. Potom $\mathfrak{L}(\mathbf{n})$ predstavuje $k$ navzájom kolmých smerov, tj. jednorozmerných podpriestorov v $\mathcal{T}$. Túto korešpondenciu je možné využiť pri kanonizácii repéru. Stačí totižto nájsť invariantný smer v normálovom priestore a pomocou korešpondencie $\mathfrak{L}$ získame hneď ortogonálnu bázu priestoru $\mathcal{T}$. Singularitami a presnejšou algebraickou štruktúrou korešpondencie $\mathfrak{L}$ sa tu nebudeme zaoberať.

Nepresne povedané: skoro každému smeru priestoru $\mathcal{N}$ prísluší $k$ smerov priestoru $\mathcal{T}$ v korešpondencii $\mathfrak{L}$. Položme opačnú otázku: Je možné ku každému smeru priestoru $\mathcal{T}$ nájsť smer v priestore $\mathcal{N}$ tak, aby tieto boli v uvedenej korešpondencii? Stručnejšie je možné napísať túto otázku symbolicky takto: $\mathfrak{L}(\mathcal{N}) \stackrel{?}{=} \mathcal{T}$.

Z konštrukcie korešpondencie $\mathfrak{K}$ a potom $\mathfrak{L}$ vyplýva:

$$\dim \mathfrak{L}(\mathcal{N}) \leqq \dim \mathcal{N} = h .$$

Pretože je však $\dim \mathcal{T} \doteq k$, platí

**Veta 3.** *Ak je* $k > h$, *potom množina* $\mathfrak{L}(\mathcal{N})$ *je kužeľová varieta priestoru* $\mathcal{T}$. *Vrchol uvedenej kužeľovej variety je bod* M, *jej dimenzia menšia alebo rovná číslu* $h$.

Uvedenú vetu by bolo možné zosilniť. Vyžadovalo by to ďalšie algebraické štúdium korešpondencií $\mathfrak{K}$ a $\mathfrak{L}$.

Záverom uvedieme aspoň stručne jeden príklad: $k = 2$, $n = 4$. Nadplocha $\pi(M)$ je zrejme kužeľosečkou. Ak zapíšeme rovnice (4) v tvare

$$\omega_1^3 = a\omega^1 + b\omega^2\,, \quad \omega_1^4 = A\omega^1 + B\omega^2\,,$$
$$\omega_2^3 = b\omega^1 + c\omega^2\,, \quad \omega_2^4 = B\omega^1 + C\omega^2\,,$$

potom matica kužeľosečky $\pi(M)$ bude mať tvar

$$\begin{pmatrix} ac - b^2 & \frac{1}{2}(aC + Ac) - bB & -\frac{1}{2}(a + c) \\ \frac{1}{2}(aC + Ac) - bB & AC - B^2 & -\frac{1}{2}(A + C) \\ -\frac{1}{2}(a + c) & -\frac{1}{2}(A + C) & 1 \end{pmatrix}$$

Bez veľkej námahy si môže čitateľ dokázať rozborom uvedenej matice nasledujúce faktá: 1) Kužeľosečka $\pi(M)$ je vždy reálna. 2) Ak $\pi(M)$ degeneruje na dvojnásobne počítanú priamku, tak $\mathscr{V}_2$ je vnoriteľná do $E_3$. 3) Ak je priamka, na ktorú degeneruje $\pi(M)$, nevlastná, tak $\mathscr{V}_2$ je rovina. 4) Ak $\pi(M)$ degeneruje na dve rôznobežky a ich priesečník leží na priamke $\{M, \mathbf{e}_4\}$, tak $A = C$, $B = 0$ a recipročné hodnoty čísiel $a$, $c$, $A$ sú rovné úsekom, ktoré utínajú priamky $\pi(M)$ na osiach. Pritom sme užili špecializácie $\mathfrak{L}(\mathbf{e}_3) = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, čo implikuje $b = 0$. 5) Kužeľosečka $\pi(M)$ je regulárna práve vtedy, keď determinant

$$\begin{vmatrix} b & a - c \\ B & A - C \end{vmatrix}$$

je rôzny od nuly a stredová potom práve vtedy, keď platí

$$\begin{vmatrix} a & c \\ A & C \end{vmatrix}^2 \neq \begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b & c \\ B & C \end{vmatrix}.$$

V tomto prípade možeme voliť bázu v $\mathscr{N}$ tak, aby stred kužeľosečky ležal na priamke $\{M, \mathbf{e}_3\}$ resp. $\{M, \mathbf{e}_4\}$. Na špecializácii repéru sa to odrazí platnosťou vzťahu $a + c = 0$, resp. $A + C = 0$. Ak naviac položíme $\mathfrak{L}(\mathbf{e}_3) = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, resp. $\mathfrak{L}(\mathbf{e}_4) = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, bude aj $b = 0$, resp. $B = 0$.

*Adresa autora:* Bratislava, Šmeralova 2b (Prírodovedecká fakulta UK).

## Резюме

## СООТВЕТСТВИЕ НАПРАВЛЕНИИ КАСАТЕЛЬНОГО И НОРМАЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВ МНОГООБРАЗИЯ $\mathscr{V}_k$ В $\boldsymbol{E}_n$

МИЛАН ГЕЙНЫ (Milan Hejný), Братислава

Пусть в $n$-мерном эвклидовом пространстве $\boldsymbol{E}_n$ дано многообразие $\mathscr{V}_k$ размерности $k$. Через $\mathscr{T}(\mathrm{M})$ и $\mathscr{N}(\mathrm{M})$ обозначим касательное и нормальное пространство многообразия $\mathscr{V}_k$ в регулярной точке M. Пользуясь огибающей подходящего однопараметрического семейства нормальных пространств строим алгебраическую гиперповерхность $\pi$ пространства $\mathscr{N}(\mathrm{M})$ (см. 7). Между точками X гиперповерхности $\pi$ и некоторыми векторами $\tau$ пространства $\mathscr{T}(M)$ определяем 1-1 соответствие $\mathfrak{R}$ (см. 6). Из соответствия $\mathfrak{R}$ получим другое соответствие $\mathfrak{L}$ векторных пространств $\mathscr{T}$ и $\mathscr{N}$ (в случае $2k \leqq n$) или векторного пространства $\mathscr{N}$ и конического многообразия (с вершиной в точке $M$), погруженного в пространство $\mathscr{T}$ (в случае $2k > n$). Вектору $\mathbf{n} \in \mathscr{N}$ в соответствии $\mathfrak{L}$ отвечает $k$ взаимно ортогональных векторов. Теория проиллюстрирована на примере $\mathscr{V}_2 \subset \boldsymbol{E}_4$.



## Summary

## CORRESPONDENCE BETWEEN TANGENT AND NORMAL SPACES OF $\mathscr{V}_k$ IN $\boldsymbol{E}_n$

MILAN HEJNÝ, Bratislava

Let $\mathscr{V}_k$ be a $k$-dimensional manifold in an $\boldsymbol{E}_n$. Denote the tangent and the normal spaces of $\mathscr{V}_k$ at an ordinary point M by $\mathscr{T}(\mathrm{M})$ and $\mathscr{N}(\mathrm{M})$ respectively. Using envelopes of fitting one-parameter families of the normal spaces $\mathscr{N}$ we obtain, in each ordinary space $\mathscr{N}(\mathrm{M})$, an algebraic hypersurface $\pi$ of degree $k$ (see 7). Between the points X of $\pi$ and some vectors $\tau$ of $\mathscr{T}(\mathrm{M})$, there is constructed a one-to-one correspondence $\mathfrak{R}$ (see 6). From the correspondence $\mathfrak{R}$ we obtain another correspondence $\mathfrak{L}$ between the vector spaces $\mathscr{T}$ and $\mathscr{N}$ (in case $2k \leqq n$), or between the vector space $\mathscr{N}$ and some conic (with M as vertex) in $\mathscr{T}$ (in case $2k > n$). Under the mapping $\mathfrak{L}$, one vector $\mathbf{n} \in \mathscr{N}$ corresponds to $k$ vectors orthogonal to each other. The theory is illustrated on the example of $\mathscr{V}_2 \subset \boldsymbol{E}_4$.