Časopis pro pěstování matematiky

Naděžda Poláková

Systémy s vlastností α

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 91 (1966), No. 2, 205--216

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108103`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 91 (1966), Praha

SYSTÉMY S VLASTNOSTÍ α

NADĚŽDA POLÁKOVÁ, Brno

(Došlo dne 2. června 1965)

Řekneme, že systém $\mathscr{K}$ $2k$ konvexních n-dimensionálních oblastí v E_n (buď vesměs otevřených nebo vesměs uzavřených) má vlastnost α, jestliže systém $\mathscr{K}$ lze rozložit na dva disjunktní uspořádané podsystémy $\mathscr{K}'$, $\mathscr{K}''$ o k oblastech tak, že pro $i', j' \in \mathscr{K}'$, $i'', j'' \in \mathscr{K}''$ (i-tou oblast v $\mathscr{K}'$ resp. $\mathscr{K}''$ značíme i' resp. i''), $i' \neq j'$, $i'' \neq j''$ je

$$\text{a) } i' \cap j' = \emptyset,\ i'' \cap j'' = \emptyset\,, \quad \text{b) } i' \cap j'' \neq \emptyset\,, \quad \text{c) } i' \cap i'' = \emptyset\,.$$

Buď v_n maximální číslo k s touto vlastností.

Systém $\mathscr{K}$ budeme v následujících úvahách vybírat z různých tříd. Nejdříve si všimneme třídy $\mathscr{K}$ otevřených n-dimensionálních krychlí (n-krychlí) s navzájem rovnoběžnými stěnami (($n - 1$)-dim.). Platí následující tvrzení.

Věta 1. *Je-li $\mathscr{K}$ systém otevřených n-krychlí s navzájem rovnoběžnými stěnami v $\mathsf{E}_n(n \geqq 1)$, je $v_1 = 2$, $v_2 = 4$, $v_3 = 5$ a pro $n \geqq 4$ platí nerovnost $2(n - 1) \leqq \leqq v_n \leqq 2^{n-1} + 1$.*

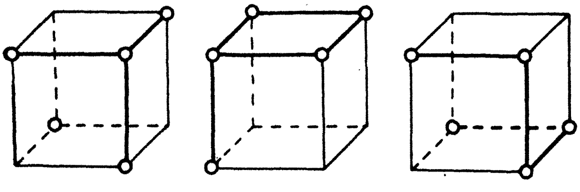
Pro $n = 1$ je věta zřejmá, pro $n \geqq 2$ plyne bezprostředně z následujících čtyř lemmat a příkladů 1,2.

Budeme předpokládat, že n-krychle mají hrany vesměs rovnoběžné se souřadnými osami. Nechť na n-krychli je dán graf takový, že množina jeho vrcholů resp. hran je podmnožinou množiny vrcholů resp. hran n-krychle a hrana grafu spojuje dva vrcholy právě tehdy, když jsou koncovými vrcholy téže hrany n-krychle. Systém $k \leqq n$ hran grafu nazveme význačným, nejsou-li žádné dvě hrany tohoto systému rovnoběžné s touž souřadnou osou. Pod slovem graf budeme v následujícím rozumět pouze graf takto definovaný.

Lemma 1. *Pro $n \geqq 2$ obsahuje graf na n-krychli K o $2^{n-1} + 1$ vrcholech význačný systém o aspoň n hranách a pro $n \geqq 3$ existuje v tomto grafu vrchol X takový, že nenáleží žádné z hran význačného systému.*

Důkaz úplnou indukcí pro n. Pro $n = 2$ lemma platí. Nechť tedy platí pro všechna $2 \leqq m < n$. Buďte Π, Π' dvě protější stěny n-krychle K. Jedna z $(n - 1)$-krychlí

Π, Π', řekněme Π, obsahuje aspoň $2^{n-2} + 1$ vrcholů grafu. Podle indukčního předpokladu na této $(n - 1)$-krychli Π existuje význačný systém o $n - 1$ hranách. Poněvadž uvažovaných vrcholů je o jeden více než je vrcholů $(n - 1)$-krychle Π, existují dva vrcholy A, A' grafu tak, že $A \in \Pi$, $A' \in \Pi'$ a $\overline{AA'}$ je hranou grafu. Tato hrana je n-tou hranou význačného systému. Zbytek tvrzení pro $n \geqq 4$ plyne z nerovnosti $2^{n-1} + 1 > 2n$, pro $n = 3$ mohou nastat pouze případy na obr. 1, kde se snadno hledaný vrchol X nalezne.



Obr. 1

Lemma 2. *Nechť K_1, K_2 jsou dvě různé n-krychle s navzájem rovnoběžnými stěnami, které mají společné nejvýše body hranice. Pak existuje aspoň jedna stěna n-krychle K_1 tak, že nadrovina jí procházející odděluje vnitřky daných n-krychlí.*

Důkaz indukcí pro n zřejmý.

Lemma 3. *Buďte K_1, K_2 dvě n-krychle s navzájem rovnoběžnými stěnami. Má-li K_1 délku hrany menší nebo rovnou délce hrany n-krychle K_2 a $\operatorname{int} K_1 \cap \operatorname{int} K_2 \neq \emptyset$, pak pro aspoň jeden vrchol n-krychle K_1 existuje n-okolí O, pro něž platí $O \cap \cap K_1 \subset K_2$.*

Důkaz úplnou indukcí. Pro $n = 2$ je lemma zřejmé. Nechť $n \geqq 3$ a lemma platí pro všechna $2 \leqq m < n$. Buďte K_1, K_2 dvě n-krychle s uvedenými vlastnostmi. Je-li $K_1 \subset K_2$, lemma zřejmě platí. Nechť tento případ nenastane. Pak existuje stěna n-krychle K_2 tak, že nadrovina ϱ jí procházející rozděluje int K_1 na dvě disjunktní neprázdné části (důkaz sporem zřejmý). $L_1 = K_1 \cap \varrho$, $L_2 = K_2 \cap \varrho$ jsou pak $(n - 1)$-krychle, které jsou zároveň průmětem n-krychlí K_1, K_2 do nadroviny ϱ ve směru k ní kolmém. Tedy je $\operatorname{int} L_1 \cap \operatorname{int} L_2 \neq \emptyset$. Podle indukčního předpokladu existuje aspoň jeden vrchol A $(n - 1)$-krychle L_1 takový, že existuje $(n - 1)$-okolí O' vrcholu A tak, že $O' \cap L_1 \subset L_2$. Buď l ta část hrany n-krychle K_1, na níž leží vrchol A, která leží ve stejném poloprostoru určeném nadrovinou ϱ jako K_2. Je zřejmé, že $l \subset K_1 \cap K_2$. Koncový bod $X \neq A$ úsečky l je vrcholem n-krychle K_1. Pak libovolné n-okolí O vrcholu X, pro něž $O \cap K_1 \subset O' \times l$, je hledaným n-okolím.

Lemma 4. *Neexistuje systém $\mathscr{K} = \mathscr{K}' \cup \mathscr{K}''$ o $2(2^{n-1} + 2)$ otevřených n-krychlí v $E_n (n > 2)$ s navzájem rovnoběžnými stěnami s vlastností α, neexistuje 2.5 čtverců s vlastností α v E_2.*

Důkaz. Nechť pro $n > 2$ takový systém existuje. Označme K' ten podsystém, ve kterém existuje n-krychle, označme ji $1'$, s nejkratší hranou. Podle lemmatu 3 každá z n-krychlí $2'', \ldots, (2^{n-1} + 2)'' \in \mathscr{K}''$ obsahuje aspoň jeden vrchol n-krychle $1'$ a každý z uvažovaných vrcholů n-krychle $1'$ náleží právě do jedné z těchto n-krychlí.

Uvažujme o grafu na n-krychli $1'$, jehož vrcholy jsou právě ty vrcholy n-krychle, které náleží do některé z n-krychlí $2'', \ldots, (2^{n-1} + 2)''$; přitom z množiny vrcholů, které náleží vždy jedné z těchto n-krychlí, vybereme po jednom representantu. Těchto vrcholů je právě $2^{n-1} + 1$. Dva vrcholy spojme hranou, náleží-li téže hraně n-krychle $1'$. Podle lemmatu 1 existuje v tomto grafu význačný systém o n hranách a vrchol X, který nenáleží žádné z hran tohoto systému. Krychli z $\mathscr{K}''$ příslušnou vrcholu X označme $2''$. Podle lemmatu 2 k n-krychli $2'$ existuje stěna n-krychle $1'$ taková, že nadrovina ϱ jí procházející odděluje obě n-krychle. Všechny zbylé n-krychle (vyjma $1''$, $2''$) systému $\mathscr{K}''$, speciálně ty, které odpovídají vrcholům význačného systému, musí mít neprázdný průnik s n-krychlemi $1'$, $2'$ a tedy i neprázdný průnik s nadrovinou ϱ. Poněvadž ale množina všech vrcholů všech hran význačného systému není podmnožinou žádného $(n - 1)$-dimensionálního prostoru, neexistuje žádná stěna n-krychle $1'$ tak, že nadrovina jí procházející má neprázdný průnik se všemi n-krychlemi systému $\mathscr{K}''$ příslušnými vrcholům všech hran význačného systému. (Nechť taková stěna existuje. Ve význačném systému existuje hrana $\overline{AB}$, která je kolmá k této stěně a jejíž jeden vrchol A v této stěně leží. Zřejmě n-krychle z $\mathscr{K}''$, která přísluší vrcholu B, má s nadrovinou jdoucí touto stěnou prázdný průnik.) To je spor s předchozím výsledkem.

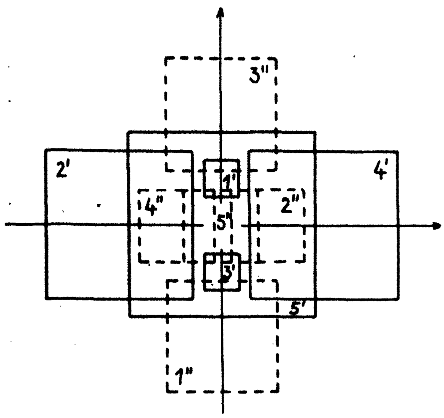
Pro $n = 2$ je důkaz zcela analogický: Na čtverci o nejkratší hraně sestrojme graf stejně jako nahoře. Ze čtyř vrcholů lze jakýkoliv odstranit a zbylé vrcholy patří význačnému systému hran. Zbytek důkazu zůstává doslova stejný.

Příklad 1. Buď K otevřená n-krychle v E_n, $n \geqq 3$ s délkou hrany 2, jejíž střed leží v počátku soustavy souřadné a stěny jsou rovnoběžné se souřadnicovými nadrovinami. Buď Π_j, $j = 1, \ldots, n$ resp. $j = n + 1, \ldots, 2n$ stěna n-krychle K, jež je proťata kladnou resp. zápornou poloosou x_j resp. $-x_{j-n}$. Každé stěně Π_j, $j = 1, \ldots, n$ přiřaďme mnohohran $O_j + e_j$, kde O_j je ortant určený poloosami $x_1, x_2, \ldots, x_j(-x_{j+1}), \ldots, x_n$, přičemž $x_{n+1} \equiv x_1$ a e_j je jednotkový vektor vycházející z počátku ve směru osy x_j. Každé stěně Π_j $j = n + 1, \ldots, 2n$ přiřaďme mnohohran $P_{j-n} - e_{j-n}$, kde P_{j-n} je ortant opačný k O_{j-n}.

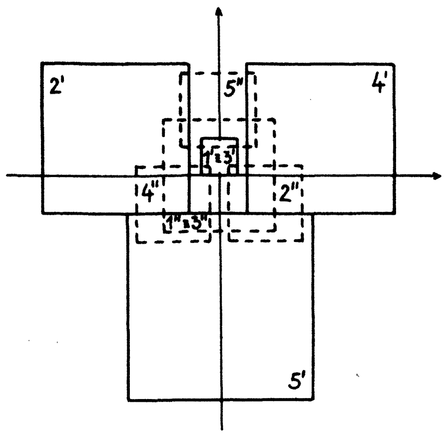
Sestrojme systém $2.2n$ $(n + 1)$-krychlí v E_{n+1} následujícím způsobem: Uvažujme o n-dimensionálních otevřených n-krychlích L_i, $i = 1, \ldots, 2n$ takových, že $L_i \supset K$ a stěna Π_i n-krychle K je vlastní částí stěny n-krychle L_i. Dále buď L'_i, $i = 1, \ldots, 2n$ taková n-krychle vhodné délky hrany, že $L'_i \subset O_i + e_i$ pro $i = 1, \ldots, n$ a $L'_i \subset P_{i-n} - e_{i-n}$ pro $i = n + 1, \ldots, 2n$ a jeden vrchol n-krychle L'_i je právě vrchol mnohohranu $O_i + e_i$ resp. $P_{i-n} - e_{i-n}$. Buď p přímka kolmá k uvažovanému n-dimensionálnímu prostoru jdoucí počátkem (osa $(n + 1)$-ní dimense) a na ní systém $2n$ navzájem disjunktních otevřených úseček l_i, jejichž délky jsou postupně rovny délkám hran n-krychlí L_i, $i = 1, \ldots, 2n$. Utvořme $(n + 1)$-krychle $K_i = L_i \times l_i$ pro $i = 1, \ldots, 2n$. Ty jsou navzájem disjunktní a tvoří jeden podsystém $(n + 1)$-krychlí hledaného systému. Na přímce p dále zvolme otevřenou úsečku l' tak, že $l' \cap l_i \neq \emptyset$ pro všechna $i = 1, \ldots, 2n$. Za délku hran n-krychlí L'_i, $i = 1, \ldots, 2n$

volme délku úsečky l'. Pak $K_i' = L_i' \times l'$, $i = 1, \ldots, 2n$ je druhý podsystém $(n + 1)$-krychlí. Snadno se ověří, že $\{K_i\} \cup \{K_i'\}$ $i = 1, \ldots, 2n$ má vlastnost α.

Z lemmatu 4 plyne, že $v_2 \leqq 4$, $v_3 \leqq 5$. Že mohou nastat rovnosti, ukazuje následující příklad 2. (Viz obr. 2. Příklad systému krychlí v prostoru je zobrazen v promítání na dvě průmětny, příklad v rovině získáme na obr. 2a vynecháním čtverců 5', 5".)



Obr. 2a.



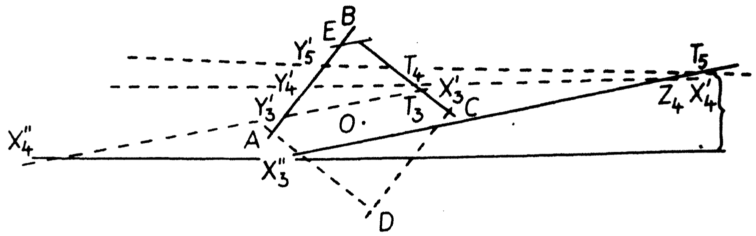
Obr. 2b.

Příklad 2. Stěny krychlí jsou rovnoběžné se souřadnými rovinami. Každá krychle je určena souřadnicemi levého dolního předního vrcholu a délkou hrany:

1': $\{[-2, 3, 0]; 4\}$	1": $\{[-6, -18, -6]; 12\}$
2': $\{[-19, -8, -4]; 16\}$	2": $\{[1, -4, -7]; 8\}$
3': $\{[-2, -7, 0]; 4\}$	3": $\{[-6, 6, -6]; 12\}$
4': $\{[3, -8, -4]; 16\}$	4": $\{[-9, -4, -7]; 8\}$
5': $\{[-10, -10, -24]; 20\}$	5": $\{[-4, -4, 3]; 8\}$

Poznámka 1. Číslo v_n zůstává stejné, je-li $\mathscr{K}$ systém uzavřených n-krychlí v E_n s navzájem rovnoběžnými stěnami. Důkaz. Nechť $\mathscr{K}$ je systém uzavřených n-krychlí v E_n s vlastností α takový, že příslušný systém otevřených n-krychlí vlastnost α nemá. Ke každé n-krychli $k \in \mathscr{K}$ sestrojme novou n-krychli k_1 tak, že stěny obou jsou navzájem rovnoběžné a k leží celá uvnitř k_1. Přitom délku hrany n-krychle k_1 volme tak, aby nově vzniklý systém měl vlastnosti a), b), c). (To vždy lze, neboť systém je konečný.) Vnitřky nově vzniklých n-krychlí tvoří systém s vlastnosti α o stejném počtu prvků. Stejně tak vhodným nepatrným „zmenšením" otevřených n-krychlí s vlastností α vznikne systém uzavřených n-krychlí o téže vlastnosti. Odtud plyne tvrzení.

Neklademe-li na oblasti žádnou podmínku kromě konvexity, existuje pro libovolné přirozené $k \geqq 2$ systém $\mathscr{K} = \mathscr{K}' \cup \mathscr{K}''$ o $2k$ oblastech v E_n takový, že každá oblast ze systému $\mathscr{K}''$ je dokonce středově symetrická k oblasti, která jí odpovídá v $\mathscr{K}'$ (podle téhož středu), jak ukazuje následující příklad uložení úseček. Stačí pak sestrojit např. ortotopy v E_n takto: Jedním z koncových bodů každé z úseček daného



Obr. 3.

systému veďme $(n - 1)$-dimensionální prostor kolmý na tuto úsečku a v něm zvolme $(n - 1)$-dimensionální n-krychle o dostatečně malé délce hrany tak, že její střed je právě uvažovaný koncový bod úsečky. Kartézský součin úsečky a $(n - 1)$-krychle je ortotop v E_n.

Příklad 3. Buď k libovolné přirozené číslo $\geqq 2$. V rovině buď dán čtverec se středem v bodě O a vrcholy A, B, C, D (obr. 3). Úsečku $\overline{AB}$ nepatrně prodlužme v obou jejích směrech a nově vzniklou úsečku označme $1''$. Úsečku $\overline{BC}$ nepatrně posuňme po přímce jí procházející v polorovině určené přímkou AB a bodem O tak, aby vzniklá úsečka $2''$ byla disjunktní s $1''$. Příslušné úsečky k nim středově souměrné podle O označme $1', 2'$. Buď Y'_3 libovolný vnitřní bod úsečky $\overline{AB}$ a T_3 vnitřní bod úsečky $\overline{BC}$, který je současně bodem úsečky $2''$. Buď $\overrightarrow{X'_3Y'_3}$ polopřímka obsahující polopřímku $\overrightarrow{T_3Y'_3}$ taková, že $X'_3 \neq T_3$ je vhodně blízko bodu T_3, $\overrightarrow{X''_3Y''_3}$ polopřímka k ní souměrná podle O. Koncovým bodem úsečky $2''$ (posunutý bod B) veďme rovnoběžku s přímkou $Y'_3X'_3$ a její průsečík s úsečkou $\overline{AB}$ označme E. Buď Y'_4 libovolný vnitřní bod úsečky $\overline{Y'_3E}$ a T_4 vnitřní bod úsečky $\overline{BT_3}$ takový, že ostrý úhel, který svírá přímka Y'_4T_4 s přímkou BC je menší než pro přímku Y'_3T_3. Přímka Y'_4T_4 protne tedy polopřímku $\overrightarrow{X''_3Y''_3}$ v bodě, který označíme Z_4. Buď $\overrightarrow{X'_4Y'_4}$ polopřímka obsahující polopřímku $\overrightarrow{Z_4Y'_4}$ taková, že bod $X'_4 \neq Z_4$ je dostatečně blízko bodu Z_4, a $\overrightarrow{X''_4Y''_4}$ polopřímka k ní souměrná. Nechť dále Y'_5 je libovolný vnitřní bod úsečky $\overline{Y'_4E}$ a T_5 bod na polopřímce $\overrightarrow{X''_3Y''_3}$ vně úsečky $\overline{X''_3Z_4}$ tak blízko bodu Z_4, že ostrý úhel, který svírá přímka Y'_5T_5 s BC je menší než pro přímku Y'_4T_4. Přímka Y'_5T_5 protne polopřímku $\overrightarrow{X''_4Y''_4}$ v bodě, který označíme Z_5. Buď $\overrightarrow{X'_5Y'_5}$ polopřímka obsahující polopřímku $\overrightarrow{Z_5Y'_5}$ taková, že bod $X'_5 \neq Z_5$ je dostatečně blízko bodu Z_5, a $\overrightarrow{X''_5Y''_5}$ polopřímka k ní souměrná. Vhodnou volbou bodů X'_i, $i = 3, 4, 5$ dosáhneme toho, že polopřímky $\overrightarrow{X'_iY'_i}$ pro $i = 3, 4, 5$ jsou navzájem disjunktní. Nechť máme zkonstruovány polopřímky $\overrightarrow{X'_jY'_j}$ pro každé $j < i$ pro $i \geqq 5$. Buď Y'_i libovolný vnitřní bod úsečky $\overline{Y'_{i-1}E}$, T_i bod na polopřímce $\overrightarrow{X''_{i-2}Y''_{i-2}}$ vně úsečky $\overline{X''_{i-2}Z_{i-1}}$ tak blízko bodu Z_{i-1}, že ostrý úhel, který svírá přímka Y'_iT_i s BC je menší než pro přímku $Y'_{i-1}T_{i-1}$. Přímka Y'_iT_i protne tedy polopřímku $\overrightarrow{X''_{i-1}Y''_{i-1}}$ v bodě, který označíme Z_i. Buď $\overrightarrow{X'_iY'_i}$ polopřímka obsahující polopřímku $\overrightarrow{Z_iY'_i}$ taková, že bod $X'_i \neq Z_i$ je dostatečně blízko bodu Z_i, a $\overrightarrow{X''_iY''_i}$ polopřímka k ní souměrná. Sestrojme takto polopřímky pro všechna $i = 3, \ldots, k$. Buď nyní K kruh se středem v bodě O takový, že uvnitř něj leží úsečky $1', 2'$ a všechny body X'_i pro $i = 3, \ldots, k$. Označme i' úsečku, která vznikne průnikem kruhu K a polopřímky $\overrightarrow{X'_iY'_i}$ pro $i = 3, \ldots, k$. Je-li i'' úsečka k ní souměrná podle středu O, má systém $\{i'\} \cup \{i''\}$ pro $i = 1, \ldots, k$ vlastnost α.

Pro třídu konvexních mnohohranů v E_n, $n \geqq 3$ se společným vrcholem je možno úvahy provádět v ekvivalentní formě na $(n - 1)$-kouli následovně: Nechť na $(n - 1)$-kouli S v E_n, $n \geqq 3$ o středu v počátku O je dán systém $\mathfrak{M}$ konvexních sférických polytopů, z nichž každé dva mohou mít společné nejvýše body hranice. Řekneme, že systém $\mathfrak{M}$ má vlastnost α, jestliže pro libovolné $a \in \mathfrak{M}$ je $\operatorname{int} a \cap \operatorname{int}(-b) \neq \emptyset$ pro každé $b \in \mathfrak{M}$, $b \neq a$, kde $-b$ značí polytop symetrický k b podle středu O.

Ukáže se, že počet prvků takového systému nemusí být omezen, dokonce lze jej libovolně předem předepsat. Nejdříve si všimneme polyedrických sítí na 2-kouli s vlastností α.

Věta 2. *Existuje polyedrická síť na 2-kouli s vlastností α o $k + 2$ ploškách, kde $k > 3$ je libovolné přirozené číslo.*

Důkaz je podán konstrukcí. Na kouli buď dán pravidelný sférický konvexní k-úhelník $a = (A_1, A_2, \ldots, A_k)$, $k \geqq 4$ s vrcholy $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Příslušný rovinný k-úhelník $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ otočme kolem jeho středu o úhel $(-3/2)\,\varphi_k$ v jeho rovině, kde $\varphi_k = 2\pi/k$. Označme A'_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ vrcholy obdrženého k-úhelníka, přičemž A'_i vznikne otočením vrcholu A_i. Oba k-úhelníky jsou zřejmě v takové poloze, že vrcholy jednoho leží vně druhého, $\operatorname{int} \widehat{A_iA_{i+1}} \cap \operatorname{int} \widehat{A'_{i+1}A'_{i+2}} \neq \emptyset \neq \operatorname{int} \widehat{A_iA_{i+1}} \cap \cap \operatorname{int} \widehat{A_{i+2}A_{i+3}}$ a obdobná vlastnost platí pro hranu $\widehat{A'_iA'_{i+1}}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, $i \bmod k$. Buď $b = (B_1, B_2, \ldots, B_k)$ sférický k-úhelník s vrcholy $B_i = -A'_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Síť $\mathfrak{M}$, jejíž plošky jsou k-úhelníky a, b a čtyřúhelníky $a_i = (A_i, A_{i+1}, B_{i+1}, B_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, $i \bmod k$, má vlastnost α. (Přitom nutno brát $\operatorname{int} \widehat{A_iB_i} \cap a = \emptyset$.) (Zřejmě je to síť polyedrická. Nechť x, y jsou libovolné dvě plošky sítě $\mathfrak{M}$. Pro $x = a$, $y = b$ je vlastnost α zřejmá. Stejně i dvojice $x = a$, $y = a_i$, nebo $x = b$, $y = a_i$ mají vlastnost α pro $i = 1, 2, \ldots, k$ (neboť v prvním případě je $\widehat{B_iB_{i+1}} \cap \operatorname{int}(-a) \neq \neq \emptyset$, v druhém $\widehat{A_iA_{i+1}} \cap \operatorname{int}(-b) \neq \emptyset$). Ukážeme ještě, že každá dvojice a_i, a_j pro $i, j = 1, 2, \ldots, k$, $i \neq j$ má vlastnost α. Je $A'_{i+1} \in \operatorname{int} a_{i-1}$, $A'_i \in \operatorname{int} a_{i-2}$, $i \bmod k$, tedy dvojice a_i, a_{i-1}; a_i, a_{i-2} mají vlastnost α. Dále hrany $\widehat{A'_i(-A_i)}$, $\widehat{A_jB_j}$ se protnou ve vnitřních bodech pro každé $j = i + 2, \ldots, k, 1, \ldots, i - 2$. (Půlkružnice $\widehat{A_i(-A_i)}$

obsahující bod A'_i je disjunktní s k-úhelníkovou ploškou b a v plošce a neprotne ani jednu z kružnic, v nichž leží uvedené hrany. Odtud plyne tvrzení.) Tedy a_i, a_j mají vlastnost α.)

Vlastnost α na $(n - 2)$-kouli je možno studovat ještě obecněji: Místo hlavních kružnic vezmeme kružnice topologické takové, že každé dvě se protínají právě ve dvou bodech (ty nazývejme protilehlými póly) a je zachováno pořadí průsečíků, tj. je-li kružnice k proťata kružnicemi k_1, k_2, k_3 v dvojicích bodů A_1, B_1; A_2, B_2; A_3, B_3 a je-li pořadí průsečíků A_1, A_2, A_3 je pořadí zbylých B_1, B_2, B_3, při čemž na každé půlkružnici A_iB_i leží právě dva z ostatních průsečíků. Každá kružnice rozdělí kouli na dvě části, které budeme nazývat polokoulemi. Průnik k, $k \geqq 3$ polokoulí nazveme k-úhelníkovou ploškou. Uvažujme o síti definované analogicky jako síť polyedrická, jen místo hlavních kružnic bereme kružnice topologické. Rovněž vlastnost α zaveďme s touto příslušnou změnou s tím, že ploška $-a$ je protilehlá k a v topologickém smyslu.

Poznámka 2. Topologická síť s vlastností α má trojhranné vrcholy. (Nechť existuje vrchol sítě, který je alespoň čtyřhranný. Pak existují dva z vzniklých dvojúhelníků tvořených kružnicemi jdoucími těmito hranami tak, že leží v jedné uzavřené polokouli. Pak ale ty dvě plošky, které leží v těchto dvojúhelnících, nemají vlastnost α – spor.)

Poznámka 3. Nechť $\mathfrak{M}$ je topologická síť na kouli S s vlastností α, a k-úhelníková ploška sítě $(k \geqq 5)$ s vrcholy $A_1, \ldots, A_k$. Označme B_i, $i = 1, \ldots, k$ koncový bod třetí hrany vycházející z vrcholu A_i. Pak označení lze volit tak, že kružnice A_iB_i protne hranu $\overset{\frown}{A_{i+1}A_{i+2}}$, $i = 1, \ldots, k$, $i \bmod k$, a to ve vnitřním bodě. (Označme X_i, $i = 1, \ldots, k$ druhý průsečík kružnice A_iB_i s hranicí plošky a. Z vlastnosti α vyplývá, že

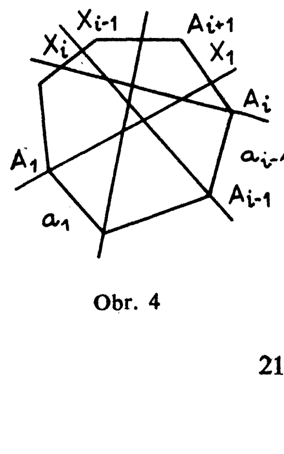
$$\operatorname{int} \overset{\frown}{A_iX_i} \cap \operatorname{int} \overset{\frown}{A_{i+1}X_{i+1}} \neq \emptyset\,, \quad i = 1, \ldots, k, \; i \bmod k \tag{1}$$

Nechť $X_1 \operatorname{non} \in \operatorname{int} \overset{\frown}{A_2A_3}$, $X_1 \operatorname{non} \in \operatorname{int} \overset{\frown}{A_{k-1}A_k}$. Pak existuje i, $3 \leqq i \leqq k - 2$ tak, že $X_1 \in \overset{\frown}{A_iA_{i+1}}$. Nechť nejdříve je $A_i \neq X_1 \neq A_{i+1}$ (obr. 4). Pak je buď $\operatorname{int} \overset{\frown}{A_iX_i} \cap \operatorname{int} \overset{\frown}{A_1X_1} \neq \emptyset$ nebo $\operatorname{int} \overset{\frown}{A_{i+1}X_{i+1}} \cap \operatorname{int} \overset{\frown}{A_1X_1} \neq \emptyset$, neboť v opačném případě by bylo $\operatorname{int} \overset{\frown}{A_iX_i} \cap \operatorname{int} \overset{\frown}{A_{i+1}X_{i+1}} = \emptyset$, což je ve sporu s (1). Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že nastane první případ. Z vlastnosti (1) dále plyne, že

$$\text{pro každé } j = 2, \ldots, i \tag{2}$$

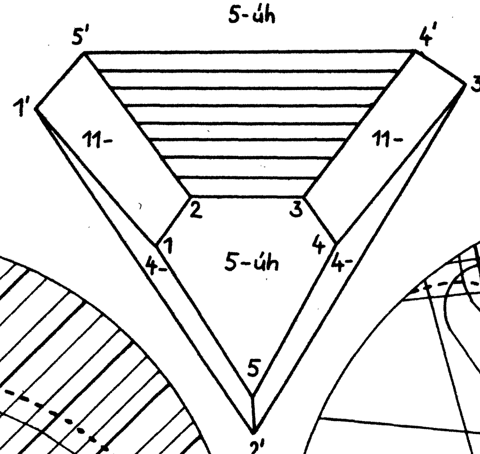
$$\text{platí } \overset{\frown}{A_jX_j} \cap \operatorname{int} \overset{\frown}{A_1X_1} \neq \emptyset$$

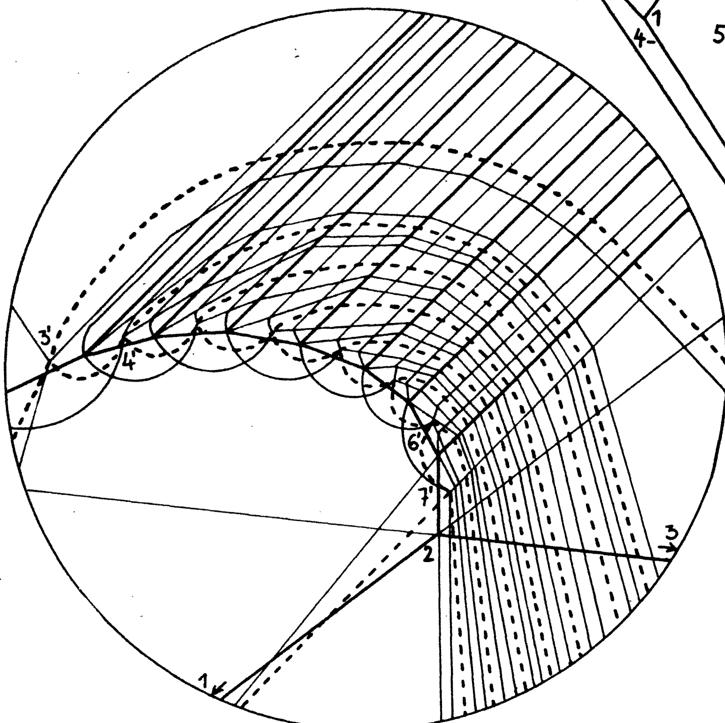
(Nechť to pro některé j neplatí. Pak X_j leží na lomené čáře $A_1A_2 \ldots A_iX_1$ a tedy buď na čáře $A_1A_2 \ldots A_j$ nebo $A_jA_{j+1} \ldots A_iX_1$. V prvém případě pak $\operatorname{int} \overset{\frown}{A_iX_i} \cap$



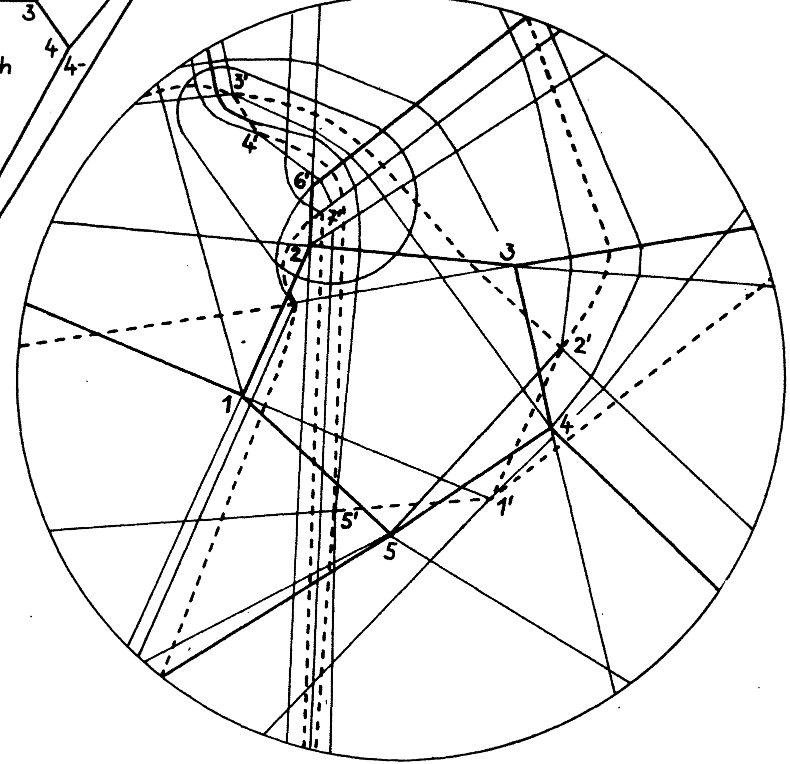
Obr. 4

Obr. 5a





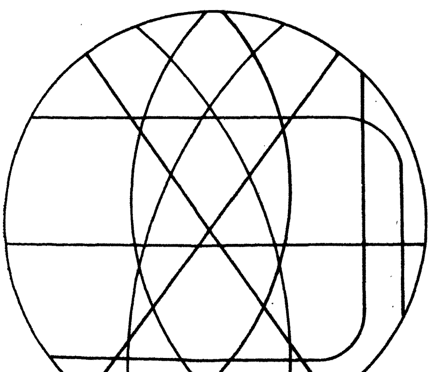
Obr. 5b



Obr. 5c

$\cap \operatorname{int} \wideparen{A_1X_1} = \emptyset$, neboť pořadí průsečíků $X_j, \ldots, X_i$ je stejné jako pořadí bodů $A_j, \ldots, A_i$, což je ve sporu s výše uvedeným předpokladem. V druhém případě by pak z podobného důvodu bylo $\operatorname{int} \wideparen{A_2X_2} \cap \operatorname{int} \wideparen{A_1X_1} = \emptyset$, což je ve sporu s (1).) Vezměme nyní v úvahu plošky a_1, a_{i-1}, kde a_j, $j = 1, \ldots k$ značí plošku, která má s a společnou hranu $\wideparen{A_jA_{j+1}}$. Označme d_1 resp. d_{i-1} 2-úhelník určený hranami $\wideparen{A_1B_1}$, $\wideparen{A_2B_2}$ resp. $\wideparen{A_{i-1}B_{i-1}}$, $\wideparen{A_iB_i}$. Je $\operatorname{int} d_1 \cap \operatorname{int}(-d_{i-1}) \subset a \cup (-a)$. (Z (2) plyne, že body X_j leží na lomené čáře $X_1A_{i+1} \ldots A_kA_1$ a tedy $\operatorname{int} \wideparen{A_1A_2}$ je disjunktní s částí hranice plošky a ležící uvnitř $(-d_{i-1})$. Užitím (1) dále pro $r = 1, 2$, $s = i - 1, i$ platí $\operatorname{int} \wideparen{A_rX_r} \cap \operatorname{int} \wideparen{A_sX_s} \neq \emptyset$. Poněvadž navíc $\operatorname{int} \wideparen{A_1A_2}$ je disjunktní s průnikem hranice plošky a a $\operatorname{int}(-d_{i-1})$, je $\operatorname{int} d_1 \cap \operatorname{int}(-d_{i-1}) \cap \{S - [a \cup (-a)]\} = \emptyset$.) Poněvadž ale $\operatorname{int} a_1 \cap \operatorname{int}(-a_{i-1}) \subset \operatorname{int} d_1 \cap \operatorname{int}(-d_{i-1})$ a $\operatorname{int} a_1 \cap \operatorname{int}(-a_{i-1}) \cap [a \cup (-a)] = \emptyset$, je $\operatorname{int} a_1 \cap \operatorname{int}(-a_{i-1}) = \emptyset$, což je spor s vlastností α. Zůstává řešit případ $X_1 = A_i$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že hrana $\wideparen{A_iB_i}$ leží v uzavřené polokouli určené kružnicí A_1B_1 a bodem A_{i-1} a obdobně jako v předešlém případě se zjistí, že plošky a_1, a_{i-1} nemají vlastnost α. Tedy náš předpoklad byl chybný a bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $X_1 \in \operatorname{int} \wideparen{A_2A_3}$. Pak vzhledem k předešlé úvaze a podle (1) musí být $X_k \in \operatorname{int} \wideparen{A_1A_2}$, obecně $X_i \in \operatorname{int} \wideparen{A_{i+1}A_{i+2}}$, $i \bmod k$.)

Síť s vlastností α konstruovaná v důkaze věty 2 není sítí jedinou toho druhu v topologickém smyslu. Na obr. 5a je znázorněna síť s uvedenou sítí neisomorfní o 14 ploškách (dva 5-úhelníky, dva 11-úhelníky, 10 čtyřúhelníků), která má tu vlastnost, že z ní lze vytvořit síť isomorfní s vlastností α, jak je ukázáno na obr. 5b, c. Na obr. 5b je znázorněna situace pouze na jedné polokouli, při tom část sítě z vyznačené zde oblasti je zakreslena na obr. 5c. Síť původní je vyznačena plně, síť k ní opačná čárkovaně. Tento příklad dá se snadno zobecnit tak, že místo 5-úhelníků resp. 11-úhelníků vezmeme n-úhelníky resp. k-úhelníky, $n, k \geqq 4$.



Obr. 6.

Poznámka 4. Jest otázka zde neřešená, dá-li se síť z předcházejícího příkladu realisovat hlavními kružnicemi na kouli. Platí totiž, že ne každý systém topologických kružnic o hořejších vlastnostech se dá realisovat hlavními kružnicemi na kouli, jak ukazuje následující příklad desíti kružnic na obr. 6 (situace na jedné polokouli). (Nechť tato konfigurace se dá realisovat hlavními kružnicemi na kouli. Vezměme polokouli určenou hlavní kružnicí, pro niž je příslušná topologická kružnice vyznačena jako kružnice. Buď ϱ tečná rovina koule vedená pólemuvažované polokoule. Do této roviny promítněme ze středu koule půlkružnice dané konfigurace. V rovině ϱ bychom tak obdrželi konfiguraci devíti přímek, jejíž realisace není možná (viz [3], str. 78 – 79)).

Věta 3. *Pro každé přirozené $k \geqq 2$ existuje na $(n - 1)$-kouli v E_n $n \geqq 3$ systém k polytopů s vlastností α.*

Důkaz. Konstrukce úplnou indukcí. Pro $n = 3$ takový systém existuje (viz V.2). Buď $n > 3$. Předpokládejme, že máme zkonstruován systém s vlastností α na $(m - 1)$-kouli v E_m pro každé $m < n$ a buď $S_{n-1}(n - 1)$-koule v E_n. Nadrovina ϱ v E_n jdoucí středem O koule S_{n-1} protne kouli S_{n-1} v $(n - 2)$-kouli S_{n-2}. Nechť na S_{n-2} je dán systém $\mathfrak{M}$ s vlastností α o k prvcích. Označme X, X' průsečíky přímky jdoucí středem O kolmo k nadrovině ϱ s koulí S_{n-1}. Vezměme libovolný polytop $P \in \mathfrak{M}$. Ten je průnikem koule S_{n-1} a konečného počtu poloprostorů v ϱ jdoucích středem O. Každá z jejich hraničních nadrovin spolu s bodem X určuje nadrovinu v E_n jdoucí bodem O. Průnik poloprostorů v E_n, obsahujících polytop P, jejichž hraniční nadroviny jsou právě vzniklé nadroviny, vytvářejí na S_{n-1} konvexní sférický polytop. Systém k polytopů takto vzniklých pro každé $P \in \mathfrak{M}$ má vlastnost α.

Klademe-li na systém sférických polytopů další požadavek, a to takový, aby tento systém vznikl průmětem stěn nějakého polytopu K v E_n z jeho vnitřního bodu O (jakožto středu $(n - 1)$-koule S) na S, pak počet prvků takového systému s vlastností α je omezen, jak ukazují následující úvahy. V takovém případě řekneme, že polytop K má vlastnost α vzhledem k bodu O.

Řekneme, že množina konečně mnoha bodů $\{X\}$ v E_n má vlastnost (s) (viz [2]), jestliže pro každé dva různé body $X_i \in \{X\}$, $i = 1, 2$ existují dvě rovnoběžné opěrné nadroviny ϱ_i ke konvexnímu obalu množiny $\{X\}$ takové, že $X_i = \varrho_i \cap \{X\}$.

Věta 4. *Maximální počet $(n - 1)$-stěn konvexního polytopu v E_n s vlastností α vzhledem k vnitřnímu bodu O je roven maximálnímu počtu bodů v E_n s vlastností* (s). *V E_3 je pak toto maximum rovno 5 a má-li polyedr vlastnost α, je to buď čtyřstěn nebo polyedr isomorfní s trojbokým hranolem.*

Dříve, než přejdeme k důkazu věty 4, proveďme následující úvahy. Označme K' polytop polární ke K vzhledem k jednotkové $(n - 1)$-kouli S o středu O, kde O je vnitřní bod polytopu K. Jsou tedy jeho stěny kolmé k přímkám jdoucím bodem O a vrcholy polytopu K a jeho vrcholy leží na přímkách jdoucích bodem O kolmo na stěny polytopu K.

Každé opěrné nadrovině ϱ polytopu K přiřaďme na $(n - 1)$-kouli S bod, jenž je koncovým bodem jednotkového vektoru vycházejícího z bodu O a rovnoběžného s vnější normálou nadroviny ϱ (vnější normálou rozumíme normálu směřující do opačného poloprostoru určeného nadrovinou ϱ než je K). Toto zobrazení f mezi opěrnými nadrovinami polytopu K a body $(n - 1)$-koule S je vzájemně jednoznačné. Zobrazením f je tedy speciálně každé stěně polytopu K přiřazen právě jeden bod na S (ten, který je přiřazen příslušné nadrovině). Buďte a_{n-1}, b_{n-1} dvě stěny, které mají společnou $(n - 2)$-stěnu. Odpovídající body $f(a_{n-1}), f(b_{n-1})$ spojme menším obloukem $\widehat{f(a_{n-1}) f(b_{n-1})}$ hlavní kružnice. Pak opěrné nadroviny procházející společnou $(n - 2)$-stěnou se vzájemně jednoznačně zobrazí na body oblouku $\widehat{f(a_{n-1}) f(b_{n-1})}$. Můžeme tedy uvažovat o zobrazení F mezi l-stěnami, $0 \leqq l \leqq n - 1$ konvexního polytopu a $(n - l - 1)$-stěnami $(n - 1)$-dimensionálních sférických polytopů na S definovaném takto: Každé $(n - 1)$-stěně a_{n-1} polytopu K přiřaďme bod $f(a_{n-1})$. Společné $(n - 2)$-stěně dvou $(n - 1)$-stěn a_{n-1}, b_{n-1} přiřaďme oblouk $\widehat{f(a_{n-1}) f(b_{n-1})}$. Obecně každé $(n - j)$-stěně, $2 \leqq j \leqq n$, polytopu K přiřaďme sférický $(j - 1)$-dimensionální polytop, jehož $(j - 2)$-stěny jsou obrazy všech $(n - j + 1)$-stěn polytopu K, které mají tuto $(n - j)$-stěnu společnou. Vzniklý rozklad na $(n - 1)$-kouli S v konvexní sférické polytopy označme $K(S)$. Rozklad, který vznikne průmětem polytopu K z jeho vnitřního bodu na $(n - 1)$-kouli S označme $K(P)$.

Platí: *Je-li K' polytop polární ke K vzhledem k $(n - 1)$-kouli S, je $K(P) = K'(S)$.* (Viz [1], str. 43, 74.)

D ů k a z v ě t y 4. Nechť K má vlastnost α vzhledem k bodu O a nechť a_{n-1}, b_{n-1} jsou libovolné dva různé $(n - 1)$-dimensionální polytopy rozkladu $K(P)$. Pak $\operatorname{int} a_{n-1} \cap \operatorname{int}(-b_{n-1}) \neq \emptyset \neq \operatorname{int}(-a_{n-1}) \cap \operatorname{int} b_{n-1}$. Zvolme libovolně bod $X \in$ $\in \operatorname{int} a_{n-1} \cap \operatorname{int}(-b_{n-1})$. Pak $-X \in \operatorname{int}(-a_{n-1}) \cap \operatorname{int} b_{n-1}$. Při zobrazení F (aplikovaném na polytop K') polytopům a_{n-1}, b_{n-1} odpovídají dva různé vrcholy $F^{-1}(a_{n-1})$, $F^{-1}(b_{n-1})$ polytopu K' a bodům X, $-X$ dvě navzájem rovnoběžné opěrné nadroviny polytopu K' jdoucí body $F^{-1}(a_{n-1})$, $F^{-1}(b_{n-1})$ a takové, že žádné ze zbylých vrcholů neleží v žádné z nich. Tedy množina vrcholů polytopů K' má vlastnost (s). Snadno se vidí, že platí i obrácené tvrzení: Má-li množina vrcholů konvexního polytopu K' vlastnost (s), má K vlastnost α vzhledem ke středu koule polarity. Odtud plyne první část tvrzení. V E_3 je maximální počet roven 5 (viz [2]). Snadno se zjistí, že čtyřstěn má vlastnost α vzhledem k libovolnému jeho vnitřnímu bodu. Poněvadž jehlan o čtyřúhelníkové základně zřejmě nemá vlastnost α vzhledem k žádnému jeho vnitřnímu bodu (nemá trojhranné vrcholy), jsou veškeré polyedry s 5 stěnami s touto vlastností isomorfní s polyedrem uvedeným v tvrzení. Že existuje polyedr s 5 stěnami s vlastností α, dokazuje příklad polyedru polárního k polyedru, jehož množina vrcholů má vlastnost (s), uvedenému v [2] s vrcholy $A_0 = (1, 0, 0)$, $B_1 =$ $= (-\delta_1, 1, 0)$, $B_2 = (-\delta_2, 0, 1)$, $C_1 = (-\delta_1, -1, 0)$, $C_2 = (-\delta_2, 0, -1)$, kde $\delta_1 \neq \delta_2$, $0 < \delta_1, \delta_2 < 1$.

Literatura

[1] *A. D. Alexandrow:* Konvexe Polyeder. Berlin 1958.
[2] *B. Grünbaum:* Strictly antipodal sets. (Hektografováno)
[3] *G. Ringel:* Über Geraden in allgemeiner Lage. Elemente der Math. *XII* (1957), 75—82.

Adresa autora: Brno, Janáčkovo nám. 2a (Přírodovědecká fakulta University J. E. Purkyně).

Резюме

СИСТЕМЫ СО СВОЙСТВОМ α

НАДЕЖДА ПОЛАКОВА (Naděžda Poláková), Брно

Систему $\mathcal{K}$ $2k$ выпуклых n-мерных областей в E_n будем называть системой со свойством α, когда $\mathcal{K}$ можно разложить на две непересекающиеся упорядоченные подсистемы $\mathcal{K}'$, $\mathcal{K}''$ содержащие k областей, так, что для $i', j' \in \mathcal{K}'$, $i'', j'' \in \mathcal{K}''$ (i-тую область в $\mathcal{K}'$ или $\mathcal{K}''$ будем обозначать i' или i'') $i' \neq j'$, $i'' \neq j''$ выполняется следующее:

$$\text{a) } i' \cap j' = \emptyset, \quad i'' \cap j'' = \emptyset, \quad \text{b) } i' \cap j'' \neq \emptyset, \quad \text{c) } i' \cap i'' = \emptyset.$$

В этой статье изучается максимальность числа k для некоторых типов областей.

Проблема была мне положена В. Полаком.

Summary

SYSTEMS WITH PROPERTY α

NADĚŽDA POLÁKOVÁ, Brno

A system $\mathcal{K}$ of $2k$ n-dimensional convex domains in E_n is said to have the property α if $\mathcal{K}$ is decomposable into two disjoint ordered subsystems $\mathcal{K}'$, $\mathcal{K}''$ of k domains such that for $i', j' \in \mathcal{K}'$, $i'', j'' \in \mathcal{K}''$ (i' or i'' means the i-th domain in $\mathcal{K}'$ or $\mathcal{K}''$ respectively) $i' \neq j'$, $i'' \neq j''$, there holds

$$\text{a) } i' \cap j' = \emptyset, \quad i'' \cap j'' = \emptyset, \quad \text{b) } i' \cap j'' \neq \emptyset, \quad \text{c) } i' \cap i'' = \emptyset.$$

The maximality of the number k for some types of domains is studied.

The problem was given to me by V. Polák.