Časopis pro pěstování matematiky, roč. 91 (1966), Praha

RECENSE

A. Kaufmann, G. Desbazeille: LA MÉTHODE DU CHEMIN CRITIQUE. (Metoda kritické cesty.) Vydalo nakladatelství Dunod, Paříž 1964. Stran 180, cena 24,— F.

Mezi početnými matematickými metodami užívanými při řešení ekonomických problémů se v poslední době těší stále rostoucímu zájmu metoda kritické cesty (CPM), známá též pod několika jinými názvy (CPS, CPA, PERT). Cílem metody kritické cesty je, obecně řečeno, sledování návaznosti a vzájemné závislosti jednotlivých dílčích etap velkých a složitých projektů, stanovení optimálních termínů jejich provádění a kontrola plnění těchto úkolů tak, aby celková doba potřebná pro realisaci celého projektu byla co nejkratší. Metoda kritické cesty je ve světě intensivně rozvíjena, zdokonalována a zobecňována, takže dnes již existuje větší počet různých variant a modifikací: sledují se např. vlivy náhodných chyb při určování doby trvání jednotlivých operací, otázky minimalisace nákladů při daném celkovém termínu realisace, problémy vzniklé omezeními výrobní resp. stavební kapacity, apod.

K velké popularitě metody kritické cesty přispívá bezpochyby jak její elementární charakter (k pochopení základní myšlenky její hlavní varianty postačí znalost několika zcela jednoduchých pojmů z teorie grafů), tak také její značná praktická užitečnost, která byla již mnohokráte prokázána.[1]) Úspěšné pokusy s uplatněním metody kritické cesty byly ostatně provedeny i u nás; vedle těchto dobrých zkušeností je k žádoucí větší popularisaci metody kritické cesty potřebná ovšem i vhodná literatura, ze které je možno se s ní seznámit.

Zde přichází na pomoc právě kniha A. Kaufmanna a G. Desbazeille, kteří si vzali za úkol vyložit principy metody kritické cesty formou vhodnou a přístupnou všem, kdo mohou a chtějí tuto metodu uplatnit. A lze hned říci, že se svého úkolu zhostili s úspěchem; prof. Kaufmann je ostatně znám svým talentem rozšiřovat a zpřístupňovat různé metody operačního výzkumu.

Recensovaná kniha je rozdělena do čtyř kapitol, k nimž jsou připojeny ještě tři dodatky, seznam literatury a slovníček hlavních termínů (s anglickými ekvivalenty).

První kapitola má ráz teoretického úvodu. Autoři v ní na 23 stranách seznamují čtenáře s potřebnými pojmy z teorie grafů, s pojmy uspořádání a s různými algoritmy pro nalezení uspořádání uzlů, resp. hran daného grafu, které splňuje určité podmínky.

Druhá kapitola (55 stran) obsahuje výklad vlastní metody kritické cesty v její základní variantě. Nejprve se tu na konkrétním příkladě stavby vily vysvětlují základní myšlenky metody, grafické znázorňování vazeb mezi etapami, interpretace různých vlastností příslušného grafu, podmínky realisovatelnosti programu atd. Přitom se paralelně sledují oba základní způsoby grafické representace: a) „americký" způsob, při němž uzly grafu odpovídají jednotlivým „stavům" realisace projektu a hrany grafu operacím potřebným k dosažení těchto stavů; b) „francouzský" způsob, při kterém uzly grafu odpovídají dílčím úkolům a hrany znázorňují jejich vzájemnou návaznost. Jak autoři knihy tvrdí, mají oba způsoby své výhody i své nevýhody; hlavní předností druhého způsobu je nesporně jeho větší pružnost: dovoluje totiž provádět menší změny v projektu, aniž by se proto musel rekonstruovat celý graf.[2])

Dále je v této kapitole vysvětlen pojem kritické cesty a ukázán význam limitních časových lhůt.

[1]) Příklad projektu americké rakety Polaris je dnes již klasický. O dalších symptomech užitečnosti metody PERT se zmiňuje mj. E. Ventura v předmluvě, kterou k recensované knize napsal.

[2]) Sestrojení příslušného grafu je u opravdu velkých projektů o mnoha stech i tisících operací vlastně nejdelším a nejobtížnějším úsekem aplikace metody kritické cesty.

Jsou uvedeny různé algoritmy pro nalezení kritické cesty v daném ohodnoceném grafu (s numerickým příkladem menších rozměrů). Aby se čtenář mohl pak opravdu důkladně seznámit se všemi detaily aplikace metody kritické cesty, je v knize reprodukován jeden příklad zpracování projektu ze stavební praxe (stavba průmyslového objektu) a druhý příklad organisace denního cyklu práce, oba s podrobnými údaji i s ukázkou různých komplikací, jaké se ve skutečné praxi vyskytují i u teoreticky zcela „jasných" případů.

V téže kapitole se dále uvažuje i varianta metody kritické cesty, kdy doby trvání jednotlivých operací nejsou předem přesně známy, ale jen — s jistou pravděpodobností — odhadovány: jsou to v podstatě náhodné proměnné s předpokládaným rozložením beta. V závěru kapitoly je — dosti stručně — pojednáno o použití samočinného počítače a o kontrole plnění stanoveného programu.

V kratší třetí kapitole (11 stran) se autoři zmiňují o zobecněních metody PERT. Jde tu hlavně o případ takových projektů, kde jsou náhodné nejen doby trvání operací, ale v jistém smyslu i sama struktura projektu: na výsledku (předem neznámém) určitých rozhodujících operací závisí, zda a které další operace budou vůbec realisovány a v jaké návaznosti.

Konečně čtvrtá kapitola (54 stran) jedná o optimalisaci nákladové funkce. Zde již nejde jen o otázku, zda a za jak dlouho bude projekt realisován, ale také s jakými náklady. Předpokládá se, že realisaci etap je možno za určitou cenu uspíšit: úkolem metody kritické cesty je pak určit, které etapy a jak mají být urychleny, aby celkové zkrácení termínů bylo co nejefektivnější a co možná levné. Hlavním nástrojem je tu Fulkersonův algoritmus. Je opět podán numerický příklad jeho použití; autoři tu neváhali obětovat 25 stran na podrobné uvedení všech fází výpočtu, včetně příslušných grafů a tabulek. Závěr kapitoly je pak věnován otázkám optimalisace programu v tom případě, kdy zdržení projektu se projevuje novými náklady nezahrnutými v původním programu (penále, ušlý zisk, apod.).

Dodatky jsou věnovány některým otázkám pravděpodobnostního aparátu: I. Rozložení beta. II. Výpočet střední hodnoty délky kritické cesty. III. Vliv rozdělení etap na pravděpodobnost dodržení daných termínů.

Seznam literatury obsahuje jen 25 titulů. Není rozhodně vyčerpávající a patrně ani příliš systematický. Čtenář je tu odkazován na seznam americké literatury o metodě PERT otištěný v časopise Operations Research, vol. 10. Grafická úprava knihy včetně obrázků, kterých je v knize opravdu hodně, je velmi dobrá.

Není pochyby o tom, že kniha je schopna vzbudit velký zájem mezi všemi našimi čtenáři, kteří se zabývají — ať již teoreticky či prakticky — aplikacemi matematických metod v ekonomii. Autorům se podařilo vyložit a na příkladech podrobně procvičit základní principy metody kritické cesty v jejích hlavních variantách, a to formou velmi dobře přístupnou. Četba knihy nepředpokládá předběžné speciální matematické znalosti.[3])

Vzhledem k velkému *praktickému* významu metody kritické cesty a její užitečnosti by bylo nanejvýš žádoucí, abychom měli podobné dílo také v českém (anebo slovenském) jazyce. Zdá se, že by překlad knížky A. Kaufmanna a G. Desbazeille byl nejschůdnější cestou, jak rychle a dobře odstranit tuto citelnou mezeru v naší odborné literatuře.

František Zítek, Praha

H. J. Godwin: INEQUALITIES ON DISTRIBUTION FUNCTIONS. (Nerovnosti pro distribuční funkce.) Jako šestnáctý svazek edice „Griffin's Statistical Monographs and Courses" vydalo nakladatelství C. Griffin & Co., Londýn 1964; stran 96, cena 24 s.

V této poměrně velmi úzce specialisované monografii přináší autor přehled výsledků známých pro řešení následujícího problému: Nechť je dána náhodná proměnná X (jednorozměrná nebo vícerozměrná) a množina T v oboru hodnot proměnné X; hledáme horní, resp. dolní mez $U(T)$, resp. $L(T)$ pro pravděpodobnost $P(T) = \mathbf{P}\{X \in T\}$, za předpokladu, že máme určité informace

[3]) K dobrému pochopení varianty PERT je ovšem třeba znát elementy počtu pravděpodobnosti.

o zákonu rozložení proměnné X. Tyto informace mohou být dány „numericky" (např. ve formě hodnot některých momentů náhodné proměnné X nebo očekávané hodnoty nějaké jiné statistiky), anebo „geometricky" (kdy např. víme, že rozložení proměnné X má jediný modus apod).

Knížka obsahuje šest kapitol: I. Úvod. II. Jednorozměrná rozložení: numerická data. III. Jednorozměrná rozložení: geometrická data. IV. Vícerozměrná rozložení. V. Součty (náhodných) proměnných. VI. Aplikace; dále cvičení a seznam literatury. V kapitole II. a III. jsou postupně studovány jednotlivé případy podle druhu a množství informace (řád známých momentů) a podle tvaru množiny T, v kapitole IV. se uvažují jen informace poskytované znalostí momentů nejvýše druhého řádu. V kapitole V. se sleduje především případ součtů *nezávislých* proměnných (ne nutně stejně rozložených).

Knížka zaujme především čtenáře z řad matematických statistiků, kteří zde naleznou — přehledně uspořádány — výsledky, které dosud bylo nutno vyhledávat roztroušené po časopisech. Nelze ovšem zaručit, že tento přehled skutečně zcela vyčerpává všechny dnes známé případy. Přitom jest jen litovati, že zůstala zcela opomenuta možnost využití informace dané určitými vlastnostmi příslušné charakteristické, resp. vytvořující funkce, ač je to problém velmi zajímavý a známé výsledky tu nejsou zanedbatelné.

Vnější vzhled a grafická úprava knížky odpovídá vysokému standardu této edice.

František Zítek, Praha

N. T. J. Bailey: THE ELEMENTS OF STOCHASTIC PROCESSES — WITH APPLICATIONS TO THE NATURAL SCIENCES. (Základy teorie stochastických procesů s aplikacemi na přírodní vědy). Vydalo nakladatelství J. Wiley & Sons, New York—London—Sydney, 1964; stran 260, cena 7·95$.

Literatura o stochastických procesech je dnes již velmi rozsáhlá; tato oblast teorie pravděpodobnosti byla prozkoumána z nejrůznějších hledisek a k nejrůznějším účelům. Vedle ryze teoretických pojednání určených matematikům jsou tu k disposici i prakticky zaměřené publikace, vedle obecných přehledů speciální monografie i populární brožury. To však naprosto neznamená, že již bylo napsáno vše, co napsati vůbec lze. I o všeobecně známých věcech je možno psát nově a zajímavě.

Důkazem toho je právě Baileyova kniha. Autor se v ní pokusil podat na pouhých 250 stránkách přehled hlavních typů stochastických procesů s vysvětlením základních myšlenek jejich teorie. Přitom jde vesměs o věci dobře známé: účelem knihy nebylo přinésti nové originální matematické výsledky. Kniha vznikla na základě autorových přednášek pro biostatistiky a je opět určena především biologům a vůbec přírodovědcům, kteří mohou a chtějí využít aparátu teorie pravděpodobnosti při vytváření matematických modelů biologických a jiných pochodů. Těmto hlediskům byl pochopitelně přizpůsoben jak výběr látky, tak také způsob podání i předpokládaná úroveň matematických znalostí.

Představu o obsahu knihy si lze učiniti již z názvů jednotlivých kapitol: 1. Úvod. 2. Vytvořující funkce. 3. Rekurentní jevy. 4. Modely náhodné procházky. 5. Markovovy řetězce. 6. Diskrétní rozvětvovací procesy. 7. Markovovy procesy se spojitým časem. 8. Homogenní procesy rození a úmrtí. 9. Některé nehomogenní procesy. 10. Vícerozměrné procesy. 11. Procesy hromadné obsluhy. 12. Epidemiové procesy. 13. Procesy „boje o život". 14. Difusní procesy. 15. Aproximace stochastických procesů. 16. Některé nemarkovovské procesy. Na konci kapitol jsou uváděna cvičení, řešení některých cvičení jsou připojena na konci knihy. Stručný seznam literatury si nečiní nároky na úplnost.

Jak je vidět, jde v knize především o jednodušší případy stochastických procesů markovovského typu se spočetným systémem diskrétních stavů, které jsou skutečně pro biologické aplikace nejdůležitější. Jsou tu uvedeny ovšem jen základní výsledky; víc ostatně nelze v knížce tohoto rozsahu očekávat. *Studium* knihy nepředpokládá nijak vysokou matematickou erudici: zcela postačí znalost *základů* matematické analysy a teorie matic, řešení *jednoduchých* diferenciálních rovnic a *elementy* z teorie funkcí komplexní proměnné; k porozumění hlavním myšlenkám (bez *plného* pochopení příslušného pravděpodobnostního aparátu) stačí dokonce ještě méně.

Kniha poskytuje opravdu dobrý a dobře přístupný úvod do teorie stochastických procesů pro biology (a přírodovědce vůbec); mohou ji ovšem s prospěchem studovat i odborníci z jiných oborů vědy a techniky. Nebude ostatně nezajímavá ani pro matematiky, může totiž tvořit vhodnou protiváhu k čistě teoretickým úvahám. Bylo by jedině správné, kdyby si každý matematik uvědomoval jak praktickou užitečnost jím studované teorie, tak také reálnou základnu, ze které tato teorie vyrůstala a které neustále vděčí za další podněty svého rozvoje.

V kruzích našich přírodovědců a lékařů se v posledních letech již bezpečně rozšířily znalosti a s nimi i kladné ocenění metod matematické statistiky, které jsou dnes ve výzkumu biologickém i jiném běžně používány. Bylo by snad tedy na čase pokusit se, aby se podobně rozšířily i znalosti teorie stochastických procesů, které lze rovněž velmi dobře využít. To je úkol poněkud náročnější a otázka dobré literatury tu má prvořadou důležitost. Bailey ukázal, že takovou literaturu lze napsat. Stálo by proto za úvahu, zda by pořízení *českého překladu* Baileyovy knihy nebylo vhodným způsobem, jak se s tímto úkolem alespoň částečně vypořádat.

František Zítek, Praha

Alois Švec: PROJECTIVE DIFFERENTIAL GEOMETRY OF LINE CONGRUENCES (Projektivní diferenciální geometrie přímkových kongruencí), Nakladatelství Československé akademie věd, Praha 1965, stran 208, cena Kčs 47,— váz.

Švecova kniha obsahuje jistý výběr výsledků autorových i jiných, hlavně československých matematiků, publikovaných — až na nepatrné výjimky — v době poválečné. (Bibliografický seznam na str. 203—205 uvádí 56 prací, z nichž 52 pochází od 9ti domácích autorů, zbývající napsali rumunský matematik F. Markus a italští matematici B. Segre a A. Terracini). Švecův spis důstojně uzavírá řadu našich děl o diferenciální geometrii z minulých let od B. Hostinského, V. Hlavatého a Ed. Čecha, na jehož výsledky navazuje a podstatně je zobecňuje.

Až na několik málo výjimek kniha důsledně užívá Cartanových metod pohyblivého repéru a systému v involuci. Na rozdíl od děl Finikovových se v ní tyto metody nevykládají a předpokládá se, že je čtenář dobře ovládá.

Užívání Cartanových metod představuje jedno z ohraničení obsahu knihy. Dalším je vědomé omezení obsahu na otázky transformace kongruencí, zejména na jejich projektivní deformaci, jakožto problém ústřední. Tato hlediska umožnila autorovi poměrně velkou látku vyložit v díle nepříliš rozsáhlém a monolitického charakteru. Vydání v anglickém jazyce je velmi vhodné zvláště z toho důvodu, že anglosaská matematická literatura nemá žádného díla o lokální diferenciální geometrii kongruencí s podobným zaměřením.

Podrobnější rozbor ukazuje, že na obsahu spisu se nejvíce podílejí práce autorovy a práce Eduarda Čecha. Význačné jsou i příspěvky Bohumila Cenkla a členů brněnského semináře diferenciální geometrie, především Vladimíra Horáka a Karla Svobody.

Přistoupím nyní k vylíčení obsahu knihy, která má 3 kapitoly, rozdělené na celkem 22 paragrafů.

Kapitola I. úplně řeší otázku projektivní deformace přímkových kongruencí a ploch s konjugovanou sítí projektivních prostorů P_n s libovolnou dimensí $n \geqq 3$. Obsahuje 9 paragrafů. V prvním je kongruence L přímek v P_n definována diferenciálním systémem $\mathrm{d}A_i = \sum_{j=1}^{n+1} \omega_i^j A_j$ pro diferenciály $\mathrm{d}A_i$ vrcholů A_i, $(i = 1, \ldots, n+1)$ pohyblivého repéru, v němž hrana $p = (A_1, A_2)$ je vytvořující přímkou $p \in L$. Po zavedení Čechova pojmu charakter „dim τ" kongruence L (jakožto dimense jejího tečného prostoru τ v přímce $p(u, v)$) se autor omezuje na neparabolický (dvouohniskový) případ charakterisovaný hodnotou dim $\tau = 3$. Přitom se předpokládá, že fokální plochy jsou reálné nedegenerované plochy prostoru P_n. Za těchto předpokladů je provedena specializace repéru tak, že A_1, A_2 jsou ohniska a (A_1, A_3), (A_2, A_4) jsou Laplaceovy transformace přímky p. Dále je určena bodová invariantní kvadratická diferenciální forma (bodová forma), jejímž anulováním vzniká diferenciální rovnice obou vrstev rozvinutelných přímkových osnov, obsažených v L.

V § 2 je definováno množství nových pojmů. Je to především pojem bodové korespondence C^b mezi dvěma kongruencemi L, L' jakožto bodové rozšíření korespondence $C: L \rightarrow L'$ mezi jejich přímkami, tj. korespondence, v níž $Cp = p'$. Eduard Čech na tomto rozšíření vybudoval bohatou teorii, navazující na pojem analytického styku křivek a na význam rovnosti bodových forem obou kongruencí. Korespondence C^b je bodovou deformací právě tehdy, je-li C korespondence rozvinutelná (tj. taková, že rozvinutelným osnovám v L korespondují rozvinutelné osnovy v L') a jestliže se bodové formy obou kongruencí rovnají. Přitom se studují i indukované transformace fokálních ploch a současné transformace dualizací obou kongruencí.

V dalších §§ 3—7 jsou převzaty výsledky autorových prací s menšími doplňky podle V. Kohouta, F. Markuse a A. Terraciniho. Především je definována projektivní deformace kongruence L prostoru P_n užitím $2(n - 1)$-dimensionální Grassmannovy variety prostoru $g(P_n)$ dimense $\frac{1}{2}n(n + 1) - 1$ (pro $n = 3$ se jedná o příslušný Kleinův prostor dimense 5). Podmínka pro deformaci řádu r se tak převádí na podmínku styku řádu r obrazů v Grassmannově prostoru. Případ $r = 1$ je triviální, nastává jakmile korespondence $C: L \rightarrow L'$ je rozvinutelná. Naproti tomu případ $r = 2$ je značně obtížný, jsou však nalezeny nutné i postačující podmínky. Projektivní lineární element a jiné důležité invarianty jsou nalezeny zvlášť pro kongruence prostorů dimense sudé a liché; současně je rozřešena otázka existence a obecnosti těchto kongruencí při daném lineárním elementu. § 6 a § 7 tvoří výjimku v tom smyslu, že se v nich místo Cartanovy metody užívá klasické metody parciálních rovnic způsobem známým z Tzitzéicových Sítí. Dochází se tak k plochám R prostoru P_{2m+1} jakožto jediným plochám s konjugovanou sítí, které připouštějí projektivní deformaci řádu $m + 1$. Současně je rozřešena otázka deformací ploch s konjugovanou sítí, jejíž Laplaceovy transformace degenerují.

§ 8 podává výsledky brněnského profesora Karla Svobody o rozvrstvitelných cyklech kongruencí v P_{2m+1}, jejichž definice byla v odst. 36 formulována Al. Švecem. Je vysloven jejich existenční teorém: Existují a závisejí na $4m + 2$ funkcích jednoho argumentu. Všechny kongruence cyklu i plochy rozvrstvující jsou R. Laplaceova transformace rozvrstvitelného cyklu je opět rozvrstvitelný cyklus. Zakončením kapitoly I je § 9 — doplněk o projektivních deformacích parabolické kongruence L prostoru P_n. Je určena podmínka pro to, aby L náležela podprostoru $P_4 \subset P_n$; není-li tomu tak, pak korespondence $C: L \rightarrow L'$ je projektivní deformací 2. řádu právě tehdy, jestliže indukovaná korespondence fokálních ploch $\sigma \rightarrow \sigma'$ obou parabolických kongruencí je asymptotická. Náleží-li L prostoru P_4 a L' prostoru P', pak existují projektivní deformace $C: L \rightarrow L'$ a závisejí na 3 funkcích jednoho argumentu. Tyto výsledky o parabolických kongruencích pocházejí od Bohumila Cenkla.

Jak je z uvedeného zřejmé, kapitola I skutečně podává úplnou teorii přímkových kongruencí v P_n; výsledky S. P. Finikova se jeví jako její speciální případy. Je tak dovršen dloho trvající vývoj, počínající — odhlédneme-li od starších nebo jinak zaměřených prací G. Sanniy, R. Weitzenböcka, E. Bompianiho, G. Fubiniho a jiných matematiků — pracemi P. Mentrého z let dvacátých. Eduard Čech vysoce oceňoval Švecova zobecnění svých výsledků v P_3 na teorii kongruencí v P_n.

Přistupme ke kapitole II. V jejím názvu „Přímkové kongruence s projektivní konexí" uvedený nový pojem autor definoval v § 10, odst. 45 a v § 11 rozvinul jeho rozsáhlé studium inspirované výsledky Eduarda Čecha v teorii kongruencí přímek v P_3. Bylo ovšem nutno vytvořit nejdříve minimální základy teorie ploch s projektivní konexí, tj. v autorově symbolice variet $\mathscr{P}^2_{0,3}$, neboť v obecném případě i na přímce kongruence s konexí existuje dvojice ohnisek, která vytvořují dvě fokální plochy (s konexí) kongruence, tj. právě dvě Königovy variety typu $\mathscr{P}^2_{0,3}$.

Teorie těchto variet je rozvedena do větších podrobností v § 15, zatím co v § 10 je vyložena jen v míře postačující pro uvedený účel. Celkem teorie ploch $\mathscr{P}^2_{0,3}$ s konexí ve Švecově knize vychází z jeho vlastních prací a z výsledků Bohumila Cenkla; bylo též přihlédnuto k některým výsledkům brněnského kolektivu. Až na existenční otázky byla nalezena řešení všech hlavních problémů. Předpoklad nulové torse podstatně studium zjednodušuje.

§§ 10—14 obsahují především stručný úvod do teorie obecných Königových prostorů $\mathscr{P}^r_{p,n}$ a jejich vnoření do jiného prostoru Königova; bere se přitom v úvahu i dualizovaná varieta. Jsou nalezeny výrazy pro ohniska přímky kongruence s konexí, vztažené na soustavy rozvinutelných přímkových osnov, jsou vyjádřeny asymptotické transformace ploch fokálních, jejich K — linearisující transformace a podmínky pro to, aby C byla projektivní deformací nebo polodeformací 1. nebo 2. řádu. Poté jsou soustavně studovány kongruence přímek s projektivní konexí pomocí soustavy specializovaných základních rovnic pro ∇A_i; jsou určeny přípustné změny, zachovávající specializovaný tvar soustavy. Konečným výsledkem tohoto studia je určení soustavy základních invariantů a souboru invariantních diferenciálních forem kongruence s konexí a její dualizace; obdobné výsledky pro kongruence v P_3 jsou podrobně uvedeny dále v kapitole III.

Významné obohacení teorie deformace kongruencí s konexí vzniká rozšířením studia na indukované deformace fokálních ploch; dochází se tak k deformacím slabě singulárním, singulárním a silně singulárním 1. nebo 2. druhu.

V § 13 „Kongruence v přímkovém prostoru s projektivní konexí" jsou studovány soustavy L přímek, závislé na 2 parametrech, jejichž přímky jsou vybrány ze soustavy ∞^4 přímek, tvořících centra lokálních prostorů Königovy variety $\mathscr{P}^4_{1,3}$. Pro tyto kongruence L jsou určeny skalární invarianty I, I_1, I_2; je pro ně vysloven teorém existenční a určena obecnost (6 funkcí jednoho argumentu) za jistých velmi obecných předpokladů. V posledním odstavci studovaná slabá projektivní deformace těchto kongruencí má hlubší význam — později je o ní dokázáno, že je zobecněním projektivní deformace kongruencí projektivního prostoru P_3.

§ 14 kapitoly II. obsahuje teorii kongruencí přímek v eukleidovském prostoru E_n o n dimensích. Je to zobecnění výsledků v E_3, uvedených v prvních kapitolách knihy S. P. Finikova, Teorija kongruencij z r. 1956; Al. Švec zde důvtipně aplikoval pojem kongruence s eukleidovskou konexí tak, že analytický aparát S. P. Finikova zůstává formálně v platnosti, pouze jeho interpretace je změněna. Kongruenci L prostoru E_n je associována kongruence (L) s eukleidovskou konexí tak, že každá přímka $p \in L$ současně je centrem lokálního prostoru $E_3(u, v)$, který je geometricky totožný s eukleidovským prostorem, tečným k L v přímce $p(u, v)$. Přitom soumezný lokální prostor $E_3(u + \mathrm{d}u, v + \mathrm{d}v)$ je dán obvyklým systémem Pfaffových rovnic (avšak bez podmínek integrability), který vychází aplikací klasické metody Levi-Civitá ortogonální projekcí do $E_3(u, v)$. Ze základních rovnic kongruence (L) pak vyplývají všechny další důsledky: (L) má obecně dvě fokální plochy (F_1) a (F_2), které jsou Königovými varietami s eukleidovskou konexí a s nulovou torsí. Přímky kongruence je uvádějí do bodové korespondence $(F_1) \to (F_2)$, jejímiž speciálními vlastnostmi lze definovat speciální kongruence, zobecňující kongruence W, Γ, B, kongruence pseudosférické a j. Teorie associované kongruence (L) s eukleidovskou konexí je totožná s teorií původní kongruence L v E_n. V sedmi odstavcích § 14 jsou tyto pozoruhodné autorovy studie problematiky kongruencí přímek v E_n předloženy v značně obecnějším tvaru, než zde uvádím pro stručnost a snadnější pochopení. Studium originálu poskytuje daleko bohatší pohled a podstatně větší možnosti formulace dalších problémů.

Celkově kapitola II. poskytuje souvislý obraz výsledků dosažených výhradně československými matematiky v teorii variet s konexí s důrazem na kongruence přímek. Na rozdíl od kapitoly I. se zde nejedná o zobecňování výsledků Eduarda Čecha, i když mezi teorií kongruencí přímek v P_3 a teorií kongruencí s konexí existují jisté analogie. Kapitola II. je především výsledkem iniciativních myšlenek a práce autorovy, obsahujíc definice a teorémy teorie variet s konexí povahy zcela základní. Pro tuto teorii Alois Švec je jedním z nejvýznamnějších zakladatelů.

Zbývá podat zprávu o kapitole III., nazvané „Přímkové kongruence v trojrozměrném projektivním prostoru". Obsahuje poměrně nejznámější látku s výsledky Eduarda Čecha hlavně z období 1952—1960. V knize se k této látce však nepřistupuje dosud obvyklým způsobem, tj. bezprostředně, nýbrž jako k speciálnímu případu kongruencí přímek v P_n (jejichž teorie byla podána v kap. I.) pro $n \geqq 3$. Touto cestou — za daných podmínek nejkratší — se snadno dochází k diferenciálním formám Eduarda Čecha, označeným φ, φ^*, F_1, F_2, G_1, G_2 (nazývaným forma bodová, rovinová, fokální 1. druhu a 2. druhu, asymptotická 1. a 2. druhu), k lineárnímu projektivnímu elementu Φ kongruence a k jejímu Wälschovu invariantu $I = \varphi/\varphi^*$. Jsou-li L, L' dvě kongruence projektivního prostoru P_3 v rozvinutelné korespondenci $C : L \to L'$, při čemž $du\, dv = 0$ je společná rovnice jejich rozvinutelných osnov, pak rovnice $\varphi = \varphi'$, $\varphi^* = \varphi^{*\prime}$, $F_1 = F_1'$, $G_1 = G_1'$, $F_2 = F_2'$, $G_2 = G_2'$ platí právě tehdy, je-li C projektivní deformace 2. řádu. Specialisace pojmů projektivní deformace singulární (slabě, silně singulární) z P_n na P_3 vede k některým jednoduchým výsledkům, např.: Je-li rozvinutelná korespondence $C : L \to L'$ kongruencí přímek v P_3 singulární deformací, pak L, L' jsou kongruence W.

Další otázky (existence, obecnost) o kongruencích v P_3 jsou dále řešeny a uvedeny v souvislost s jinými novými pojmy (kanonický rozklad kongruence, plně asymptotická korespondence, polosingulární deformace). Následuje studium projektivní deformace kongruencí W podle Eduarda Čecha a studium soustavy jejich oskulačních lineárních komplexů podle Vladimíra Horáka (Brno). Sekundární obraz této soustavy komplexů v Kleinově P_5 je plocha (Ω) s konjugovanou sítí, což V. Horákovi umožnilo odkrýt mnohé velmi zajímavé souvislosti např. mezi křivkou plochy (Ω) a kanonickým rozkladem kongruence. Jsou-li L, L' v projektivní deformaci $C : L \to L'$ a jsou-li (Ω), (Ω') Kleinovy obrazy jejich soustav oskulačních lineárních komplexů, buď K oskulační kolineace deformace C v přímce p, takže $Kp = Cp$. Pak dvojice konjugovaných tečen plochy (Ω) v Kleinově obrazu přímky $p \in L$ se kolineací v P_5, indukovanou kolineací K v P_3, transformuje v dvojici konjugovaných tečen plochy (Ω').

V §§ 20, 21 se jedná o deformaci parabolických kongruencí (bez řídící křivky resp. s řídící křivkou) podle prací Eduarda Čecha, doplněných autorem. V § 22, který uzavírá III. kapitolu, je řešen problém určit všechny korespondence $C : L \to L'$ mezi dvěma kongruencemi té vlastnosti, že existuje bodové rozšíření C^b korespondence C, které je plně asymptotické. Na užitém postupu lze pokládat za zvláštnost, že konstrukce hledaných asymptotických korespondencí se děje pomocí diferenciálně-geometrického studia korespondencí mezi dvěma projektivními prostory P_3 a P_3' s dimensí 3. Užitím K— linearisující transformace Eduarda Čecha se v posledním odstavci dokazuje hlavní teorém: Korespondence s totálně linearisujícími přímkami jsou identické s plně asymptotickými korespondencemi dvou kongruencí.

Celkově kapitola III. reprodukuje látku z prací Eduarda Čecha o kongruencích v P_3, o kongruencích parabolických a vybrané úvahy z jeho prací o korespondencích mezi dvěma projektivními prostory. Pozoruhodný je i příspěvek Vladimíra Horáka, z jehož studií, vypracovaných s nesmírnou pečlivostí (jak konstatoval Vincensini), mohly být převzaty jen nejranější výsledky, i když zatím další byly publikovány a jiné jsou v tisku.

Pokud jde o závěrečné zhodnocení knihy Aloise Švece je nutno především konstatovat, že její vydání v anglickém jazyce velice přispívá k udržení dobrého jména československé matematiky jakožto pokrokové vědy vysoké úrovně. Jasně prokazuje podstatný podíl československé vědecké práce na vybudování projektivní teorie přímkových variet a variet prostorů s konexí.

Knihu Aloise Švece jistě vřele uvítá a ocení každý matematik a doporučí ji jako vzácný odkaz práce jedné generace k dalšímu rozvíjení.

Jiří Klapka, Brno

Alois Urban: DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE I., SNTL Praha 1965 SVTL (řada teoretické literatury), stran 368, obrázků 476, vydání I., cena vázaného výtisku 29,— Kčs.

Kniha je schválena MŠK jako I. díl celostátní vysokoškolské učebnice deskriptivní geometrie. Je určena studentům fakult strojního inženýrství a fakult elektrotechnických vysokých škol technických. Obsahuje zobrazovací metody a před jejich vlastním výkladem uvádí autor v přehledu potřebné základní věty a konstrukce z planimetrie a prostorové geometrie, jakožto doplňky ke středoškolské látce.

Kniha je tematicky rozdělena na 14 kapitol, z nichž každá obsahuje celou řadu odstavců. Vlastní výklad je doprovázen velmi vhodně ilustrujícími řešenými úlohami, přičemž student může sledovat autorovo řešení na příslušném obrázku. Totéž lze říci o řešených příkladech připojených vždy na konci každé kapitoly (s výjimkou kapitoly úvodní). Každá kapitola s výjimkou první a poslední je dále ukončena mnoha cvičeními, určenými studentovi k samostatnému vyřešení. K některým je dán stručný pokyn.

Nyní k vlastnímu obsahu knihy. *V 1. úvodní kapitole* podává autor velmi výstižně význam deskriptivní geometrie a pak metody a obsah deskriptivní geometrie. Seznámení se s tím, je pro studenta začátečníka velmi užitečné. Je nejvýše prospěšné, když je studentovi v budoucnu jiné profese předem solidně známo, proč studuje tu nebo onu disciplinu, která sama o sobě nebude přímo náplní jeho vlastního povolání po vystudování. Obsah prvních dvou odstavců této úvodní kapitoly by měl však být znám i všem těm, kteří na vysokých školách technických rozhodují o učebních plánech a bohužel často z neznalosti věci omezují výuku deskriptivní geometrie na jakési živoření pochopitelně na škodu celkového vzdělání budoucího inženýra. V posledním odstavci je uveden stručný historický přehled (s uvedením význačných knih o deskriptivní geometrii) v rozsahu, který nutně patří k všeobecnému vzdělání vysokoškolského studenta.

Ve 2. kapitole o planimetrii (jsou to doplňky ke středoškolské látce) se zabývá autor množinou všech bodů dané vlastnosti (tzv. dřívějším „geometrickým místem bodů"), mocností bodu ke kružnici a na základě toho úlohami o konstrukcích kružnice při daných podmínkách a nakonec základními geometrickými příbuznostmi v rovině. Kapitola je ukonečna řešenými příklady a pak 15 cvičeními pro studujícího.

Kapitola 3. je věnována kuželosečkám. Pojednává se tu o základních metrických (tzv. ohniskových) vlastnostech elipsy, hyperboly a paraboly. Kapitola je uzavřena řešenými příklady a 21 cvičeními pro studujícího s předcházejícím vysvětlením různých označení.

V kapitole 4 uvádí autor *základní pojmy a úlohy prostorové geometrie.* Zavádí příslušné axiomy se stručným vysvětlením jejich významu, dále základní věty stereometrie, základní věty o rovnoběžnosti přímek a rovin a v důsledku toho velmi stručně (pro potřeby techniků), ale za to promyšleně a velmi výstižně význam tzv. nevlastních útvarů v geometrii. V dalším textu se projednávají metrické vztahy (zabývající se pojmem úhlu, kolmosti a vzdálenosti), zavádí se pravoúhlá souřadnicová soustava, uvádějí se základní geometrické příbuznosti v prostoru a vysvětluje se pojem a základní vlastnosti tzv. elementárních ploch a těles. Kapitola je opět uzavřena řešenými příklady a třiceti cvičeními pro studujícího.

V 5. kapitole o základních vlastnostech promítání pojednává autor stručně, ale výstižně o pojmu zobrazení vůbec a jeho významu, dále o nejjednodušším a pro technickou praxi zatím nejdůležitějším způsobu zobrazení, promítání. Další část kapitoly je podle příslušných odstavců věnována základním pojmům a vlastnostem promítání středového, rovnoběžného a pravoúhlého. Při této příležitosti jsou vyloženy a na doprovázejících řešených úlohách názorně probrány — tak jako i v jiných ostatních kapitolách — základní vlastnosti a význam středové kolineace a osové afinity mezi dvěma různými rovinami, středové kolineace a osové afinity v rovině, příbuznosti, které získáme promítnutím předchozích dvou příbuzností mezi dvěma rovinami do další roviny a konečně v hlavních obrysech význam a podstatné vlastnosti středové kolineace a afinity v prostoru. Kapitola je ukončena řešenými příklady, podstatné důležitosti pro aplikace na rovinné řezy (hranoly, válci, jehlany a kužely) a pro konstrukce kuželoseček na základě jejich kolineárního a afinního vztahu ke kružnici a 14 cvičeními, určenými studujícímu.

Počínaje 6. kapitolou dál, probírá autor postupně jednotlivé druhy elementárního promítání. Sama *6. kapitola* je věnována *kótovanému promítání.* Po uvedení základních pojmů probírá se zobrazení bodu přímky a roviny, sklápění roviny, otáčení roviny, řeší se úlohy polohy a úlohy metrické. Závěr tvoří řešené příklady a 20 cvičení určených studentům k vyřešení.

V *7 kapitole* se probírá *pravoúhlé promítání na dvě k sobě kolmé průmětny*, tzv. *Mongeovo promítání.* Po uvedení základních pojmů, následuje princip zobrazení bodu, přímky a roviny, řešení základních úloh polohy a úloh metrických, dále pak úlohy řešené otáčením, princip transformace průměten s aplikacemi, zobrazení mnohostěnů, konstrukce jejich rovinných řezů a jejich sítí, průsečík přímky s mnohostěny a konečně průniky mnohostěnů. Kapitola končí vybranými řešenými příklady a 38 svičeními pro studenty.

V *8. kapitole* autor probírá *rovnoběžný průmět kružnice* tj. vlastnosti elipsy jako afinního útvaru ke kružnici. Po vysvětlujícím úvodě následuje výklad o afinitě mezi kružnicí a elipsou a o rovinném řezu na rotačním válci, dále pak řešení úloh o elipse za použití afinity, zobrazení válce, kužele a koule v Mongeově promítání s konstrukcemi rovinných řezů na válcích a kouli. Závěr výkladu této kapitoly je věnován úvahám o rovnoběžném průmětu paraboly a hyperboly a dalším konstrukcím těchto kuželoseček z toho plynoucích. Řešenými příklady a 28 cvičeními je tato kapitola uzavřena.

Další zobrazovací způsob, *promítání kosoúhlé*, tvoří obsah *9. kapitoly*. Po úvodu, obsahujícím vysvětlení základních pojmů následuje odstavec o technickém kosoúhlém promítání, pak odstavec o kosoúhlém promítání při němž se používá přiřazeného promítání Mongeova, dále pak způsoby zobrazení bodu přímky a roviny a základní úlohy polohy, jež se probírají v každém zobrazovacím způsobu. Poslední odstavec vlastního výkladu obsahuje zobrazení ploch a těles. V řešených příkladech v závěru kapitoly probírá autor hlavně konstrukce průniků těles a rovinné řezy plochami. Na konec je připojeno 21 cvičení pro čtenáře.

V *10. kapitole* je studována *pravoúhlá axonometrie* a na závěr jsou uvedeny základy *kosoúhlé axonometrie*. Po úvodních slovech následuje zavedení a vysvětlení základních pojmů a odvození hlavních vlastností tohoto zobrazovacího způsobu. V dalších odstavcích autor postupně probírá zobrazování těles (užitím souřadnic a tzv. zářezovou metodou), poměry zkrácení, zobrazení bodu, přímky a roviny, metrické úlohy napřed ve speciálních rovinách, pak v rovinách obecně položených, rovinné řezy na plochách a tělesech a jak již bylo řečeno, v posledním odstavci jsou stručně vyloženy základy klinogonální axonometrie. Na závěr jsou uvedeny řešené příklady a 26 cvičení určených studentům.

11. kapitola je věnována výkladu *středového promítání*. Je tu vyložen princip tohoto promítání, způsob jak se zobrazuje bod, přímka, rovina, konstrukce skutečné velikosti úsečky, základní úlohy polohy i metrické, následuje zobrazení rovinných útvarů, výklad středového promítání s pomocnou průmětnou a technického středového promítání a kapitolu uzavírají řešené příklady a 14 příkladů za cvičení.

Ve *12. kapitole* vysvětluje autor základy posledního způsobu zobrazovacího, uvedeného v učebnici, *lineární perspektivy*. Po odstavci, obsahujícím zavedení základních pojmů, následuje odstavec o konstrukcích perspektiv, odstavec o průsečné metodě a konečně odstavec s řešenými příklady a na závěr 10 cvičení pro studenty.

Kapitola 13. obsahuje výklad o *středovém průmětu kružnice* tj. o kuželosečkách jako kolineárním útvaru ke kružnici. V prvním odstavci této kapitoly jsou vyloženy rovinné řezy rotační kuželovou plochou a v závěru odstavce nerotační kvadratickou kuželovou plochou. V dalším odstavci jsou předvedeny konstrukce kuželoseček užitím středové kolineace. V následujícím odstavci se probírají konstrukce rovinných řezů kruhovou kuželovou plochou v rovnoběžném promítání. Kapitola je opět uzavřena řešenými příklady a 25 cvičeními.

Poslední, *14. kapitola* knihy je věnována stručnému přehledu *zobrazovacích metod*. Obsahuje náčrt obecné teorie lineárních zobrazení, základ teorie dvojobrazových zobrazení, přehled užívaných dvojobrazových zobrazení a princip dvojstopního zobrazení. Závěr kapitoly je tvořen ukázkou řešených příkladů.

Lze říci, že v celkovém rozvržení projednávané látky v knize je náplň jednotlivých kapitol co do vzájemného sledu i co do celkové koncepce a celkového cílu poslání volena s nejvyšší promyšleností. V učebnici probírá autor deskriptivní geometrii od úplného začátku. Je tu proto sebráno poměrně hodně materiálu ovšem nezbytně nutného, jedná-li se o vysokoškolskou učebnici. Výklad v celé knize je veden stručně, ale velmi výstižně a hlavně přehledně. Projednávaná látka je sympaticky rozdělena do mnoha kratších celků a plynulý text je velmi vhodně členěn spoustou velmi názorných a výstižných obrázků, doprovázejících a usnadňujících příslušný výklad na správně volených místech. Tím je docíleno, že obsah vykládané látky se velmi pěkně a pohodlně studuje, což je zejména pro začátečníka, nebo skoro začátečníka a to hlavně právě v oboru deskriptivní geometrie velmi důležité a užitečné. Celé zpracování a provedení svědčí o převeliké autorově pečlivosti a hlavně promyšlenosti, s jakou se vypořádává s četnými výukovými problémy, spočívajícími v obtížnostech solidního a současně přístupného výkladu náročnějších partií, jichž je v deskriptivní geometrii celá řada. O autorově pedagogických kvalitách mimo jiné svědčí hlavně to, že mnoho látky v učebnici je probíráno i s odvozeními v řešených úlohách. Tuto koncepci jistě uvítají nejen všichni ti, kteří budou podle této učebnice učit ale hlavně studenti, kterým tento způsob výkladu bude jistě velmi příjemný. Závěrem lze říci, že se naším studentům, zejména na technikách, dostalo velmi pěkné a solidní učebnice. Jistě se setká s úspěchem, odpovídajícímu dlouholetému namáhání a přemýšlení jejího autora.

Bořivoj Kepr, Praha

Eduard Winter: DIE HISTORISCHE BEDEUTUNG DER FRÜHBEGRIFFE B. BOLZANO'S MIT EINEM ANHANG BOLZANO'S BEGRIFFE 1821 (Historický význam raných pojmů B. Bolzana s dodatkem Bolzanovy pojmy z roku 1821). Sitz. ber. d. deutschen Akad. d. Wiss. zu Berlin, Klasse f. Philos., Geschichte, Staats-, Rechts-, u. Wirtschaftwiss., Jahrg. 1964, Nr. 1. Akad. Verlag, Berlin 1964.

Obsah: I. Historický význam raných pojmů B. Bolzana. II. Dodatek. III. Bolzanovy pojmy z r. 1821. IV. Poznámky.

Část I. (str. 3—21). Roku 1937 učinil E. Winter náhodou důležitý knižní nález. Byl mu nabídnut pražským antikvariátem rukopis ve vazbě odpovídající době. Obsahoval Bolzanovy pojmy sepsané v tvaru knihy. Tato sbírka Bolzanových pojmů je psána stejnoměrným písmem cvičeného písaře, které má vzhled tisku, a jak je výslovně podotčeno, *byla ukončena r. 1821.* Na 385 stránkách s rejstříkem jsou uvedeny v abecedním pořádku Bolzanovy pojmy, pokud byly sběratelům a opisovači známy. Na základě korespondence mezi Bolzanem a profesorem morálky na litoměřickém kněžském semináři F. WERNEREM (pokud se zachovala), je E. Winter veden k tomu, že redaktorem této sbírky je sám F. Werner.

Předlohy pro Bolzanovy pojmy z r. 1821 dlužno považovat za základní prameny. Mnoho z těchto předloh, které znal Werner, se ztratilo. Strach před pronásledováním, jemuž se vystavoval ten, u něhož by byly Bolzanovy spisy nalezeny, měl za následek, že byly ničeny. Rukopisy Bolzanem revidované, které byly podkladem pro Bolzanovy pojmy z r. 1821, byly předbřeznovou policií konfiskovány. Tím nabývá Winterův spis zvláštní význam jako pramen, takže pro bádání o Bolzanovi je velmi důležitý. Rané pojmy Bolzanovy poskytují rychlé a bezpečné uvedení do myšlenkového světa Bolzanova.

Bolzana dlužno považovat za mistra ve tvoření pojmů. On sám si toho byl vědom, jak vyplývá z jeho dopisu, který zaslal svému příteli a žáku FESLOVI. Winterův spis je důležitou předběžnou prací pro vypracování úplného slovníku Bolzanových pojmů, ke kterému je dlužno v budoucnosti přikročit.

V *části II.* (str. 22—25) jsou uvedeny Bolzanovy spisy, z nichž bylo čerpáno. Jsou tu zároveň zkratky jejich titulů, jimiž bylo na ně odkazováno v další části III.

Tato *III. část* (str. 26—101) obsahuje pak celý přetisk Bolzanových pojmů z rukopisu objeveného Winterem.

Objasním na příkladu jak Winter ve svém spise postupuje. V části II (str. 23) je uvedeno:

Elementární geometrie — Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie, Prag 1804. Přetisk je obsažen ve spise: J. Vojtěch, Geometrické práce (Spisy B. Bolzana vyd. Král. č. spol. nauk, sv. 5), Praha 1948, str. 5—50 (je tam vyznačena paginace původního vydání). Poznámky vyd. str. 186—197.

V části II (str. 22):

Příspěvky — Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik. Erste Lieferung, Prag 1810. Nové vydání: Philosophie der Mathematik oder Beiträge... ve sbírce: Ferd. Schöninghs Samml. philos. Lesestoffe, Bd. 9, Paderborn 1926.

V části III (str. 47):

Veličina je věc, pokud o ní uvažujeme jako o počtu (mnohosti) věcí, které jsou rovny jednotce. — — *Úhel není veličina*, neboť si můžeme myslit dvě úsečky se *společným koncem* (tedy úhel), aniž bychom musili mysliti na plochu nebo na jiné úsečky mezi nimi vedené (částečné úhly) nebo na pohyb, pomocí kterého jedna z těchto úseček přejde do polohy druhé úsečky. Považujeme-li úhly za veličiny, všímáme si vlastně plochy ležící mezi rameny úhlu.

K tomu podotýkám, že na str. 5 Elem. geom. Bolzano opět zdůrazňuje, že nebude nikdy úhly považovat za veličiny. Zavrhuji, praví, všechny důkazy u Euklida, kde se o úhlech takto uvažuje. Nicméně nepovede to ke změnám v celé algebraické části geometrie, poněvadž zde, jak známo, máme před sebou kruhové oblouky, nikoliv však úhly.

Tamtéž (část III, str. 47) je podána výstižnější definice:

Veličina je celek, pokud se skládá z více rovných dílů, nebo obecněji — něco, co lze určit čísly.

Část IV. obsahuje Poznámky k matematickým a hlavně logickým pojmům Bolzanovým, které napsal známý švédský badatel o Bolzanovi Jan Berg, autor jednoho ze základních spisů o Bolzanovi: Bolzano's Logic, Stockholm—Göteborg—Upsala, 1962. (Srv. moji recenzi této knihy v Čas. pěst. mat. *89* (1964), str. 364—5). Bergovy poznámky splňují pro matematické a logické pojmy program, který Winter formuloval na konci části I (str. 21).

Karel Rychlík, Praha

Karel Havlíček: DIFERENCIÁLNÍ POČET PRO ZAČÁTEČNÍKY. Polytechnická knižnice sv. 19. Praha 1965, str. 196, obr. 58, Kčs 10,—.

Druhé nezměněné vydání populární příručky, jejíž recense byla otištěna v našem časopise roč. *88* (1963) str. 376.