A. R. Magomedov

Теоремы о существовании и единственности решений дифференциальных уравнений с максимумами, содержащих функциональный параметр

Archivum Mathematicum, Vol. 28 (1992), No. 3-4, 139--154

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/107445

ARCHIVUM MATHEMATICUM (BRNO)
Tomus 28 (1992), 139 – 154

ТЕОРЕМЫ О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАКСИМУМАМИ, СОДЕРЖАЩИХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ПАРАМЕТР

А. Р. Магомедов

Резюме. В данной статье доказывается теорема существования и единственности для системы уравнений с максимумами, включаюшей функциональный параметр, рассматриваются вопросы непрерывной зависимости решения от изменения начальной функции и от функционального параметра. При этом будет изучаться существенно более сложный случай, когда запаздывание дополнительно зависит от искомой функции.

1. Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t), \max_{\tau\in[t-h(t,x(t)),t]} x(\tau), u(t)), \tag{1}$$

где $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$ - вектор состояния, $u = (u_1, \dots, u_s) \in U$ функциональный параметр, X, U - ограниченные замкнутые множества в E^n и E^s соответственно, а запаздывание $h = h(t, x(t))$ зависит от t и от самой функции $x(t)$. Решение (1) ищется на некотором отрезке $T = [t_0, t_1]$.

Начальное условие для (1) следующее:

$$x(t) = \varphi(t), t \in E_{t_0}, \tag{2}$$

где $\varphi(t)$ - заданная начальная функция и E_{t_0} - начальное множество:

$$E_{t_0} = [\inf(t - h(t, x(t)), t_0], t \in T, x \in X \tag{3}$$

При исследовании уравнения (1) с начальным условием (2) мы рассмотрим вопрос об условиях (достаточных), при которых существует решение $x(t)$ уравнения (1) определённое на T и принадлежащее заданному

1991 *Mathematics Subject Classification*: 34K15.
Key words and phrases: дифференциялъные уравнения с максимумами, начальная функция, запаздывание, единственность решения.
Received February 10, 1987.

множеству X, если $u(t) \in U$. Для упрощения записи используем в дальнейшем обозначения:

$$x_\tau(t) = \max_{\tau\in[t-h(t,x(t)),t]} x(\tau), x_{m\tau}(t) = \max_{\tau\in[t-h(t,x_m(t)),t]} x(\tau),$$
$$h_m = h(t, x_m(t)), m = 0, 1, 2, \ldots$$

а символом $|||\cdot|||$ обозначена так называемая равномерная норма векторной функции, равная $\sup||\cdot||$.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть*

1) *Функция $F(t, x, x_\tau, u)$ определена и непрерывна по своим аргументам на $R_1 = T \times X \times X \times U$, причём в R_1 удовлетворяется условие Липшица*

$$||F(t, x, x_\tau, u) - F(t, x', x'_\tau, u)|| \le L_1(||x - x'|| + ||x_\tau - x'_\tau||; \tag{4}$$

2) *на $R_2 = T\times X$ запаздывание $h(t, x(t))$ непрерывно и удовлетворяется неравенство $0 \le h(t, x(t)) < t$ и удовлетворяется условие Липшица с постоянной L_2:*

$$|h(t, x(t)) - h(t, x'(t))| \le L_2||x - x'||; \tag{5}$$

3) *в R_1 функция $F(t, x, x_\tau, u)$ ограничена:*

$$|||F(t, x, x_\tau, u)||| \le L_3; \tag{6}$$

4) *начальная функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию Липшица постоянной L_3:*

$$||\varphi(t_2) - \varphi(t_1)|| \le L_3|t_2 - t_1|, t_1, t_2 \in E_{t_0}. \tag{7}$$

Тогда при любом заданном кусочно-непрерывном функциональном параметре $u(t) \in U$ и на некотором отрезке $[t_0, t^*], t^* < t_1$ существует единственное решение $x(t) \in X$ системы (1) с начальным условием (2).

Доказательство. Будем строить решение уравнения (1) при начальном условии (2) с помощью последовательных приближений:

$$\begin{cases} x_0(t) = \varphi(t), \quad t \in E_{t_0}, \quad x_0(t) = \varphi(t_0), \quad t \ge t_0, \\ x_{m+1}(t) = \varphi(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^t F(s, x_m(s), x_{m\tau}(s), u(s))ds, \quad t \ge t_0, \\ x_{m+1}(t) = \varphi(t), \quad t \in E_{t_0}, m = 0, 1, 2, \ldots. \end{cases} \tag{8}$$

Уточним замкнутую область X для $x(t)$ и t^*, указанные в условии теорем.

Будем считать, что $x(t) \in X$, если $x(t)$ удовлетворяет неравенству

$$(9) \qquad ||x(t) - \varphi(t_0)|| \leq r,$$

где r - некоторое число, выбранное так, что в области (9) удовлетворяются условия теоремы и

$$(10) \qquad \sup_t ||\varphi(t) - \varphi(t_0)|| \leq r, \quad t \in E_{t_0},$$

$$(11) \qquad t^* = \min(t_1, t_0 + \frac{r}{L}),$$

где $L = \max(L_1, L_2, L_3)$. Числа L_1, L_2, L_3 в условии теоремы зависят вообще от r.

Покажем сначала, что все приближения $x_m(t)$ остаютсця в области X при $t \in [t_0, t^*]$. Действительно, для $x_0(t)$ это справедливо сразу в силу неравенства (10). Рассмотрим для любого приближения $x_{m+1}(t)$ разность $x_{m+1}(t) - \varphi(t_0)$:

$$(12) \qquad x_{m+1}(t) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^{t} F(s, x_m(s), x_{mr}(s), u(s))ds,$$

считая, что $x_m(t) \in X, x_{m\tau}(t) \in X, u(t) \in U, t \in [t_0, t^*]$.

В силу (6) получим

$$(13) \quad ||x_{m+1}(t) - \varphi(t_0)|| \leq \int_{t_0}^{t} |||F(s, x_m(s), x_{mr}(s), u(s))|||ds \leq L_3(t^* - t_0) \leq r$$

откуда согласно (9).

Оценим далее разности $x_{m+1}(t) - x_m(t), \quad m = 0, 1, 2, \ldots$.
При $m = 0$ имеем

$$(14) \qquad x_1(t) - x_0(t) = \begin{cases} x_1(t) - \varphi(t_0), & t \geq t_0 \\ 0, & t \in E_{t_0}, \end{cases}$$

откуда

$$(15) \qquad ||x_1(t) - x_0(t)|| \leq L_3(t - t_0), \quad t \in [t_0, t^*],$$

что получается так, же, как и (13). При $m = 1$ имеем

$$x_2(t) - x_1(t) = \int_{t_0}^{t} [F(s, x_1(s), x_{1\tau}(s), u(s)) - F(s, x_0(s), x_{0\tau}(s), u(s))]ds.$$

В силу (4)

$$(16) \qquad ||x_2(t) - x_1(t)|| \leq L_1 \int_{t_0}^{t} (||x_1(s) - x_0(s)|| + ||x_{1\tau}(s) - x_{0\tau}(s)||)ds$$

Для $||x_1(t)-x_0(t)||$ имеем оценку (15). Чтобы оценить $x_{1\tau}(t)-x_{0\tau}(t)$ напишем эту разность в виде

$$x_{1\tau}(t)-x_{0\tau}(t)=\max_{\tau\in[t-h_1,t]}x_1(\tau)-\max_{\tau\in[t-h_0,t]}x_0(\tau)=$$
$$=[\max_{\tau\in[t-h_1,t]}x_1(\tau)-\max_{\tau\in[t-h_1,t]}x_0(\tau)]+[\max_{\tau\in[t-h_1,t]}x_0(\tau)-\max_{\tau\in[t-h_0,t]}x_0(\tau)].$$

К первой разности в этом равенстве разность максимумов функций $x_{1\tau}(t), x_{0\tau}$ на одном и том же отрезке $[t-h_1,t]$ применим неравенство (17) из [9].

Мы получим с учётом (15)

$$\begin{aligned}||\max_{\tau\in[t-h_1,t]}x_1(\tau)-\max_{\tau\in[t-h_1,t]}x_0(\tau)||\le||\max_{\tau\in[t-h_1,t]}|x_1(\tau)-x_0(\tau)|||\le\\ \le|||x_1(t)-x_0(t)|||\le L_3(t-t_0).\end{aligned}\tag{17}$$

Для второй разности получим согласно (7)

$$||\max_{\tau\in[t-h_1,t]}x_0(\tau)-\max_{\tau\in[t-h_0,t]}x_0(\tau)||\le||\varphi(t-h_1)-\varphi(t-h_0)||, t-h_1, t-h_0\in E_{t_0}.$$

Согласно (5), получим

$$||\varphi(t-h_1)-\varphi(t-h_0)||\le L_3|h_1-h_0|\le L_3L_2||x_1(t)-x_0(t)||\le L_2L_3^2(t-t_0)\tag{18}$$

Следовательно,

$$||x_{1\tau}(t)-x_{0\tau}(t)||\le L_3(1+L_2L_3)(t-t_0).\tag{19}$$

Тогда (16) перепишется в виде

$$||x_2(t)-x_1(t)||\le L_1L_3(2+L_2L_3)\frac{(t-t_0)^2}{2!}.\tag{20}$$

При $m=2$ получим

$$||x_3(t)-x_2(t)||\le L_1\int_{t_0}^{t}(||x_2(s)-x_1(s)||+||x_{2\tau}(s)-x_{1\tau}(s)||)ds\tag{21}$$

Чтобы сравнить $x_{2\tau}(t)-x_{1\tau}(t)$ на одинаковом интервале изменения t, запишем

$$\begin{aligned}x_{2\tau}(t)-x_{1\tau}(t)=\\ =[\max_{\tau\in[t-h_2,t]}x_2(\tau)-\max_{\tau\in[t-h_1,t]}x_n(\tau)]+[\max_{\tau\in[t-h_1,t]}x_1(\tau)-\max_{\tau\in[t-h_1,t]}x_1(\tau)].\end{aligned}\tag{22}$$

С учётом (17) получим

$$\begin{aligned}||\max_{\tau\in[t-h_2,t]}x_2(\tau)-\max_{\tau\in[t-h_2,t]}x_1(\tau)||\le||\max_{\tau\in[t-h_2,t]}|x_2(\tau)-x_1(\tau)|||\le\\ \le|||x_2(t)-x_1(t)|||\le L_1L_3(2+L_2L_3)\frac{(t-t_0)^2}{2!}, t>t_0.\end{aligned}\tag{23}$$

Для оценки второй разности в первой части (22) учтём, что при $t \geq t_0$

$$\dot{x}_1(t) = F(t, x_0(t), x_{0\tau}(t), u(t)) \tag{24}$$

согласно (6)

$$|||\dot{x}_1(t)||| \leq L_3, \quad t > t_0. \tag{25}$$

При $t \in E_{t_0}$ скорость роста по норме начальной функции определяется условием Липшица (7) с постоянной L_3. Отсюда следует, что при $t > t_0$

$$|| \max_{\tau \in [t-h_2, t]} x_1(\tau) - \max_{\tau \in [t-h_1, t]} x_1(\tau)|| \leq L_3 |h_2 - h_1|, \tag{26}$$

где t изменяется в наибольшем из отрезков $[t-h_1, t], [t-h_2, t]$.

Согласно (5)

$$|h(t, x_2(t)) - h(t, x_1(t))| \leq L_2 ||x_2(t) - x_1(t)||. \tag{27}$$

В силу (20)

$$|h(t, x_2(t)) - h(t, x_1(t))| \leq L_1 L_2 L_3 \, (2 + L_2 L_3) \frac{(t-t_0)^2}{2!}$$

и так как в (26) $\tau \leq t$, то (26) перепишем в виде

$$\begin{aligned} &|| \max_{\tau \in [t-h_2, t]} x_1(\tau) - \max_{\tau \in [t-h_1, t]} x_1(\tau)|| \leq \\ &\leq L_1 L_2 L_3^2 (2 + L_2 L_3) \frac{(t-t_0)^2}{2!}. \end{aligned} \tag{28}$$

Таким образом, согласно (23), (28)

$$||x_{2\tau}(t) - x_{1\tau}(t)|| \leq (1 + L_2 L_3) L_1 L_3^2 (2 + L_2 L_3) \frac{(t-t_0)^2}{2!} \tag{29}$$

и с учётом (20) неравенство (21) перепишем в виде

$$||x_3(t) - x_2(t)|| \leq L_1^2 L_3 (2 + L_2 L_3)^2 \frac{(t-t_0)^3}{3!}. \tag{30}$$

При $m = 3$ получим

$$||x_4(t) - x_3(t)|| \leq L_1^3 L_3 (2 + L_2 L_3)^3 \frac{(t-t_0)^4}{4!}. \tag{31}$$

Дальнейшие оценки (при $m = 4, 5, \ldots$) аналогичны. На каждом шаге добавляется множитель $L_1(2 + L_2 L_3)$ и интегрируется по t, т.е.

$$||x_5(t) - x_4(t)|| \leq L_1^4 L_3 (2 + L_2 L_3)^4 \frac{(t-t_0)^5}{5!} \tag{32}$$

и т.д. Из этих оценок видно, что последовательность $\{x_m(t)\}$ сходится и при том равномерно по t на интервале $[t_0, t^*]$. В силу равномерной сходимости эта последовательность сходится на $[t_0, t^*]$ к решению $x(t)$ исходного уравнения (1) с начальным условием (2). При этом это решение находится в области (9).

Покажем теперь единственность этого решения. Пусть уравнение (1) имеет на отрезке $[t_0, t^*]$ также другое решение $\bar{x}(t)$ и при том же начальном условии, причём

$$||\bar{x}(t) - \varphi(t_0)|| \leq r, t \in [t_0, t^*]. \tag{33}$$

Сопоставим $\bar{x}(t)$ и приближения $x_0(t), x_1(t), \ldots$.
Мы получим при $t \geq t_0$

$$\bar{x}(t) - x_0(t) = \int_{t_0}^{t} F(s, \bar{x}(s), \bar{x}_\tau(s), u(s))ds \tag{34}$$

и согласно (5) при $t > t_0$

$$||\bar{x}(t) - x_0(t)|| \leq L_3(t - t_0).$$

Рассмотрим дальше

$$\bar{x}(t) - x_1(t) = \int_{t_0}^{t} [F(s, \bar{x}(s), \bar{x}_\tau(s), u(s)) - F(s, x_0(s), x_{0\tau}(s), u(s))]ds. \tag{35}$$

Согласно (4)

$$||\bar{x}(t) - x_1(t)|| \leq L_1 \int_{t_0}^{t} (||\bar{x}(s) - x_0(s)|| + ||\bar{x}_\tau(s) - x_{0\tau}(s)||)ds. \tag{36}$$

Точно так же, как при выводе оценки для $||x_2(t) - x_1(t)||$, получим

$$\begin{cases} ||\bar{x}_\tau(t) - x_{0\tau}(t)|| \leq L_3(1 + L_2L_3)(t - t_0), \\ ||\bar{x}(t) - x_1(t)|| \leq L_1L_3(2 + L_2L_3)\dfrac{(t - t_0)^2}{2!} \end{cases} \tag{37}$$

Дальше для $\bar{x}(t) - x_2(t)$ получим, как при выводе оценки для

$$||\bar{x}(t) - x_2(t)|| \leq L_1 \int_{t_0}^{t} (||\bar{x}(s) - x_1(s)|| + ||\bar{x}_\tau(s) - x_{1t}(s)||)ds \tag{38}$$

$$\begin{cases} ||\bar{x}_\tau(t) - x_{1\tau}(t)|| \leq (1 + L_2L_3)L_2L_3(2 + L_2L_3)\frac{(t-t_0)^2}{2!}, t > t_0, \\ ||\bar{x}(t) - x_2(t)|| \leq L_1^2L_3(2 + L_2L_3)^2\frac{(t-t_0)^3}{3!} \end{cases} \tag{39}$$

Аналогично получим

$$|\bar{x}(t) - x_3(t)|| \le L_1^3(2 + L_2L_3)^3 L_3 \frac{(t-t_0)^4}{4!}, \tag{40}$$

и т.д. Из этих оценок видно, что

$$||\bar{x}(t) - x_m(t)|| \to 0 \text{ при } m \to \infty \tag{41}$$

равномерно по t на отрезке $[t_0, t^*]$. Отсюда следует, что решение уравнения (1), к которому стремится последовательность является на отрезке $[t_0, t^*]$ единственным удовлетворяющим начальному условию (2). Тем самым теорема 1 польностью доказана. □

2. Непрерывность решения по начальной функции. Рассмотрим теперь вопрос о непрерывности решения исходного уравнения (1) по начальной функции.

Пусть имеется на отрезке $[t_0, t^*]$ два решения $x(t)$ и $\tilde{x}(t)$ уравнения (1), порождённых одним и тем же функциональным параметром $u(t)$, но соответствующих различным начальным функциям $\varphi(t), \tilde{\varphi}(t)$.

Определение 1. *Решение $x(t)$ назовём непрерывным по начальной функции, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\Delta > 0$, что из неравенства*

$$||\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)|| < \Delta, \quad t \in E_{t_0} \tag{42}$$

следует неравенство

$$|||x(t) - \tilde{x}(t)||| < \varepsilon, \quad t \in [t_0, t^*], \tag{43}$$

где $x(t), \tilde{x}(t)$ - два решения уравнения (1), соответствующие одному и тому же функциональному параметру и двум начальным функциям $\varphi(t), \tilde{\varphi}(t)$.

Справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть функция $F(t, x, x_\tau, u)$ и запаздывание $h(t, x(t))$ в правой части уравнения (1) удовлетворяет в области R_1 условиями $I^0, 2^0, 3^0$ теоремы 1. Пусть начальные функции принадлежат классу Липшицевых функции с постоянной L_3* из условия 3^0 *теоремы 1.*

Тогда решение уравнения (1) при заданной функции, которое существует и единственное по теореме 1 на отрезке $[t_0, ty^*]$, непрерывно по начальной функции на этом отрезке.

Доказательство. Пусть $x(t)$ i $\tilde{x}(t)$ - два решения уравнения (1) на отрезке $[t_0, t^*]$, принадлежащее области X, одним и тем же функциональным параметром $u(t)$, но соответствующие двум различным начальным функциям $\varphi(t), \tilde{\varphi}(t)$. По условию теоремы 1

$$\begin{cases} ||\varphi(t_2) - \varphi(t_1)|| \le L_3|t_2 - t_1|, \\ ||\tilde{\varphi}(t_2) - \tilde{\varphi}(t_1)|| \le L_3|t_2 - t_1|, t_1, t_2 \in E_{t_0}, \end{cases} \tag{44}$$

где L_3 - постоянная в условии 3^0 теоремы 1. Пусть

$$|||\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)||| < \Delta, \quad t \in E_{t_0}. \tag{45}$$

Согласно теореме 1 решения $x(t)$ и $\tilde{x}(t)$ можно найти с помощью сходящихся последовательных приближений: $x_k(t), \tilde{x}_k(t), k = 0, 1, 2, \ldots$. Будем сравнивать эти приближения. Мы имеем

$$\begin{cases} \tilde{x}_0(t) = \tilde{\varphi}(t), t \in E_{t_0} \\ x_0(t) = \varphi(t), t \in E_{t_0} \end{cases} \quad \begin{cases} \tilde{x}_0(t) = \tilde{\varphi}(t_0), t > t_0 \\ x_0(t) = \varphi(t_0), t > t_0 \end{cases} \tag{46}$$

$$\begin{cases} ||\tilde{x}_0(t) - x_0(t)|| = ||\tilde{\varphi}(t_0) - \varphi(t_0)|| \leq \Delta, \quad t > t_0, \\ ||\tilde{x}_0(t) - x_0(t)|| = ||\tilde{\varphi}(t) - \varphi(t)|| \leq \Delta, \quad t \in E_{t_0}. \end{cases} \tag{47}$$

Для $\tilde{x}_1(t), x_1(t)$ имеем выражения

$$\begin{cases} \tilde{x}_1(t) = \tilde{\varphi}(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} F(s, \tilde{x}_0(s), \tilde{x}_{0\tau}(s), u(s))ds, \quad t > t_0, \\ \tilde{x}_1(t) = \tilde{\varphi}(t), \quad t \in E_{t_0} \\ x_1(t) = \varphi(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} F(s, x_0(s), x_{0\tau}(s), u(s))ds, \quad t \geq t_0, \\ x_1(t) = \varphi(t), \quad t \in E_{t_0}, \end{cases} \tag{48}$$

где

$$\begin{cases} \tilde{x}_{0\tau}(t) = \max\limits_{\tau \in [t-h_0, t]} \tilde{x}_0(\tau), \quad x_{0,\tau}(t) = \max\limits_{\tau \in [t-h_0, t]} x_0(\tau), \\ \tilde{h}_0 = h(t, \tilde{x}_0(t)), \quad h_0 = h(t, x_0(t)). \end{cases} \tag{49}$$

Для разности $\tilde{x}_1(t) - x_1(t)$ имеем при $t \geq t_0$

$$\begin{gathered} \tilde{x}_1(t) - x_1(t) = \tilde{\varphi}(t_0) - \varphi(t_0) + \\ + \int_{t_0}^{t} [F(s, \tilde{x}_0(s), \tilde{x}_{0\tau}(s), u(s)) - F(s, x_0(s), x_{0\tau}(s), u(s))]ds, \end{gathered} \tag{50}$$

а согласно (4)

$$\begin{gathered} ||\tilde{x}_1(t) - x_1(t)|| \leq ||\tilde{\varphi}(t_0) - \varphi(t_0)|| + \\ + L_1 \int_{t_0}^{t} (||\tilde{x}_0(s) - x_0(s)|| + ||\tilde{x}_{0\tau}(s) - x_{0\tau}(s)||)ds. \end{gathered} \tag{51}$$

Оценим разности $\tilde{x}_{0\tau}(t) - x_{0\tau}(t)$. Если t таково, что $t - h_0 \geq t_0, t - h_0 \geq t_0$, то в (49) $t \geq t_0$, $\tilde{x}_0(t) = \tilde{\varphi}(t_0), x_0(t) = \varphi(t_0)$ и $||\tilde{x}_{0\tau}(t) - x_{0\tau}|| \leq ||\tilde{\varphi}(t_0) - \varphi(t_0)|| \leq \Delta$. Если же t такое, что например $t - h_0 < t_0, t - h_0 = t_0$, то

$$||\tilde{x}_{0\tau}(t) - x_{0\tau}(t)|| = ||\max_{\tau \in [t-h_0, t]} \tilde{\varphi}(\tau) - \max_{\tau \in [t-h_0, t]} \varphi(\tau)||$$

мы должны сравнивать $\tilde{\varphi}(t)$ и $\varphi(t)$ в разных точках. Оценка (45) сразу ничего не даст.

Перепишем разность $\tilde{x}_{0\tau}(t) - x_{0\tau}(t)$ в следующем виде

$$\tilde{x}_{0\tau}(t) - x_{0\tau}(t) = \max_{\tau\in[t-h_0,t]} \tilde{x}_0(\tau) - \max_{\tau\in[t-h_0,t]} x_0(\tau)]+ \\ +[\max_{\tau\in[t-h_0,t]} x_0(\tau) - \max_{\tau\in[t-h_0,t]} x_0(\tau)], t \geq t_0 \tag{52}$$

так что

$$||\tilde{x}_{0\tau}(t) - x_{0\tau}(t)|| \leq ||\max_{\tau\in[t-\tilde{h}_0,t]} \tilde{x}_0(\tau) - \max_{\tau\in[t-\tilde{h}_0,t]} x_0(\tau)||+ \\ +||\max_{\tau\in[t-\tilde{h}_0,t]} x_0(\tau) - \max_{\tau\in[t-h_0,t]} x_0(\tau)||. \tag{53}$$

Здесь мы сравниваем функции $\tilde{x}_0(t), x_0(t)$ на одном и том же отрезке $[t - \tilde{h}_0, t]$ и одну функцию $x_0(t)$ на разных отрезках. Для первой применим неравенство из [9]

$$||\max_{\tau\in[t-\tilde{h}_0,t]} \tilde{x}_0(\tau) - \max_{\tau\in[t-\tilde{h}_0,t]} x_0(\tau)|| \leq ||\max_{\tau\in[t-\tilde{h}_0,t]} |\tilde{x}_0(\tau) - x_0(\tau)|||.$$

Максимум разности $|\tilde{x}_0(t) - x_0(t)|$ достигается в некоторый момент, причём $t \leq t_0$ или $t \geq t_0$ в зависимости от t.

Но при любых таких t справедливо (47), так что при всех $t \geq t_0$

$$||\max_{\tau\in[t-\tilde{h}_0,t]} \tilde{x}_0(\tau) - \max_{\tau\in[t-h_0,t]} x_0(\tau)|| \leq \Delta, t \geq t_0. \tag{54}$$

Разность

$$\max_{\tau\in[t-\tilde{h}_0,t]} x_0(\tau) - \max_{\tau\in[t-h_0,t]} x_0(\tau)$$

равна нулю, если

$$t - \tilde{h}_0 \geq t_0, t - h_0 \geq t_0.$$

Если же $t - \tilde{h}_0 \leq t_0, t - h_0 \leq t_0$ и например $t - \tilde{h}_0 < t - h_0$, то эта разность определяется изменением начальной функции на интервале $[t - \tilde{h}_0, t - h_0]$.

Согласно (44)

$$||\varphi(t - \tilde{h}_0) - \varphi(t - h_0)|| \leq L_3|\tilde{h}_0 - h_0|.$$

При этом

$$|\tilde{h}_0 - h_0| = |h(t, \tilde{x}_0(t)) - h(t, x_0(t))| \leq L_3(||\tilde{x}_0(t) - x_0(t)||) \leq L_2\Delta, t \geq t_0.$$

Следовательно, всегда при любых $t \geq t_0$ имеем

$$||\max_{\tau\in[t-\tilde{h}_0,t]} x_0(\tau) - \max_{\tau\in[t-h_0,t]} x_0(\tau)|| \leq L_2L_3\Delta. \tag{55}$$

Полагая, что $L_2L_3 > 1$ (этому условию всегда можно удовлетворить соотвецтвующим набором L_2, L_3). В силу (58) и (55) получим

$$\|\tilde{x}_{0\tau}(t) - x_{0\tau}(t)\| \leq \Delta(1 + L_2L_3), t \geq t_0. \tag{56}$$

Тогда в соответствии с (56), (47) получим

$$\|\tilde{x}_1(t) - x_1(t)\| \leq \Delta[1 + L_1(2 + L_2L_3)(t - t_0)]. \tag{57}$$

Если $t < t_0$, то

$$\|\tilde{x}_1(t) - x_1(t)\| = \|\tilde{\varphi}(t) - \varphi(t)\| \leq \Delta. \tag{58}$$

Рассмотрим разность $\tilde{x}_2(t) - x_2(t)$, которая выражается аналогично (50)

$$\begin{gathered}\tilde{x}_2(t) - x_2(t) = \tilde{\varphi}(t_0) - \varphi(t_0) + \\ + \int_{t_0}^{t} [F(s, \tilde{x}_1(s), \tilde{x}_{1\tau}(s), u(s)) - F(s, x_1(s), x_{1\tau}(s), u(s))] ds\end{gathered} \tag{59}$$

из соответствия с (3)

$$\begin{gathered}\|\tilde{x}_2(t) - x_2(t)\| \leq \|\tilde{\varphi}(t_0) - \varphi(t_0)\| + \\ + L_1 \int_{t_0}^{t} (\|\tilde{x}_1(s) - x_1(s)\| + \|\tilde{x}_{1\tau}(s) - x_{1\tau}(s)\|) ds.\end{gathered} \tag{60}$$

Распишем оценку нормы $\|\tilde{x}_{1\tau}(t) - x_{1\tau}(t)\|$ по аналогии с (53)

$$\begin{gathered}\|\tilde{x}_{1\tau}(t) - x_{1\tau}(t)\| \leq \|\max_{\tau \in [t - \tilde{h}_1, t]} \tilde{x}_1(\tau) - \max_{\tau \in [t - \tilde{h}_1, t]} x_1(\tau)\| + \\ + \|\max_{\tau \in [t - \tilde{h}_1, t]} x_1(\tau) - \max_{\tau \in [t - h_1, t]} x_1(\tau)\|, \quad \tilde{h}_1 = h(t, \tilde{x}_1(t)),\ h_1 = h(t, x_1(t)).\end{gathered} \tag{61}$$

Тогда согласно [9] получим

$$\begin{gathered}\|\max_{\tau \in [t - \tilde{h}_1, t]} \tilde{x}_1(\tau) - \max_{\tau \in [t - \tilde{h}_1, t]} x_1(\tau)\| \leq \\ \leq \|\max_{\tau \in [t - \tilde{h}_1, t]} |\tilde{x}_1(\tau) - x_1(\tau)|\| \leq \max_{\tau \in [t - \tilde{h}_1, t]} \|\tilde{x}_1(\tau) - x_1(\tau)\|.\end{gathered}$$

Если t такое, что $t - \tilde{h}_1 > t_0$, то для $\|\tilde{x}_1(t) - x_1(t)\|$ справедливо (57), а если t такое, что $t - \tilde{h}_1 < t_0$, то справедливо (58). Отсюда следует, что при любых $t \geq t_0$ имеем

$$\|\max_{\tau \in [t - \tilde{h}_1, t]} \tilde{x}_1(\tau) - \max_{\tau \in [t - h_1, t]} x(\tau)\| \leq \Delta[1 + L_1(2 + L_2L_3)(t - t_0)]. \tag{62}$$

Далее имеем

$$
\begin{aligned}
&||\max_{\tau\in[t-\tilde{h}_1,t]} x_1(\tau) - \max_{\tau\in[t-h_1,t]} x_1(\tau)|| \leq \\
&\leq L_3|\tilde{h}_1 - h_1| \leq L_2L_3(||\tilde{x}_1(t) - x_1(t)||), t \geq t_0.
\end{aligned} \tag{63}
$$

Таким образом, из (61), (62), (63) имеем

$$
||\tilde{x}_{1\tau}(t) - x_{1\tau}(t)|| \leq \Delta[1 + L_1(2 + L_2L_3)(t - t_0)](1 + L_2L_3), t \geq t_0. \tag{64}
$$

Тогда с учётом (57), (60), (64) получим

$$
\begin{aligned}
&||\tilde{x}_2(t) - x_2(t)|| \leq \Delta + L_1\Delta \int_{t_0}^{t} (2 + L_2L_3)[1 + (2 + L_2L_3)(s - t_0)]ds = \\
&= \Delta\{1 + L_1(2 + L_2L_3)(t - t_0) - L_1^2(2 + L_2L_3)^2 \frac{(t - t_0)^2}{2!}\}.
\end{aligned} \tag{65}
$$

При $t \in E_{t_0}$ имеем

$$
||\tilde{x}_2(t) - x_2(t)|| \leq \Delta.
$$

Аналогичным путём получим

$$
||\tilde{x}_3(t) - x_3(t)|| \leq \Delta\{1 + q(t - t_0) + q^2 \frac{(t - t_0)^2}{2!} + q^3 \frac{(t - t_0)^3}{3!}\}, t \geq t_0, \tag{66}
$$

где $q = L_1(2 + L_2L_3)$, т.д. При любых m получим

$$
||\tilde{x}_m(t) - x_m(t)|| \leq \Delta\{1 + q(t - t_0) + \cdots + q^m \frac{(t - t_0)^m}{m!}\} < \Delta l^{q(t-t_0)}, t \geq t_0
$$

Отсюда следует, что в пределе при $m \to \infty$ имеет место следующее неравенство для разности решений

$$
||\tilde{x}(t) - x(t)|| \leq \Delta l^{q(t-t_0)}, t \geq t_0, \tag{67}
$$

а на отрезке $[t_0, t^*]$

$$
||\tilde{x}(t) - x(t)|| \leq \Delta l^{q(t-t_0)}
$$

или

$$
||\tilde{x}(t) - x(t)|| \leq \Delta l^{q\frac{r}{L}}, \tag{68}
$$

где r, L - числа из формулы (11). Из (68) вытекает непрерывность решения $x(t)$ по начальной функции, так как при заданном $\varepsilon > 0$ получим неравенство (43), если

$$
||\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)|| \leq \varepsilon l^{-q\frac{r}{L}}.
$$

Таким образом теорема доказана. □

3. Непрерывность решения по отношению к функциональному параметру. Для функционального параметра $u(t)$, принадлежащего классу кусочно- -непрерывных функций введём следующую равномерную норму

$$|||u||| = \int_{t_0}^{t} ||u(s)||ds.$$

Пусть имеется согласно теореме 1 на отрезке $[t_0, t^*]$ два решения $x(t)$ и $\tilde{x}(t)$ уравнения (1), соответствующих одной и той же начальной функции, но порождённых разными функциональными параметрами $u(t), \tilde{u}(t)$.

Определение 2. *Будем говорить, что решение задачи (1), (2) непрерывно зависит от функционального параметра $u(t)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\Delta > 0$ такое, что из*

$$\int_{t_0}^{t} ||u(s) - \tilde{u}(s)||ds < \Delta \tag{69}$$

следует неравенство

$$|||x(t) - \tilde{x}(t)||| < \varepsilon, t \in [t_0, t^*]. \tag{70}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть удовлетворяется условия теорем 1 и 2 и пусть функция $F(t, x, x_\tau, u)$ также Липшицева с постоянной L_1 по u в области R_1 теоремы 1, т.е.*

$$||F(t, \tilde{x}, \tilde{x}_\tau, \tilde{u}) - F(t, x, x_\tau, u)|| \le L_1(||\tilde{x} - x|| + ||\tilde{x}_\tau - x_\tau|| + ||\tilde{u} - u||). \tag{71}$$

Тогда существует единственное решение $x(t)$ уравнения (1), на отрезке $[t_0, t^*]$ при заданной начальной функции, непрерывно по отношению к $u(t)$.

Доказательство. Пусть $x(t), \tilde{x}(t)$ - два решения уравнения (1), соответствующие одной начальной функции $\varphi(t)$ и различным $u(t), \tilde{u}(t)$ определённые на отрезке $[t_0, t^*]$. Будем строить эти решения с помощью последовательных приближений

$$\begin{cases} x_0(t) = \tilde{x}_0(t) = \varphi(t), & t \ge t_0, \\ x_0(t) = \tilde{x}_0(t) = \varphi(t), & t \in E_{t_0}, \end{cases} \tag{72}$$

$$\begin{cases} x_{k+1}(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} F(s, x_k(s), \max\limits_{\tau \in [s - h_k, s]} x_k(\tau), u(s))ds, \\ \tilde{x}_{k+1}(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} F(s, \tilde{x}_k(s), \max\limits_{\tau \in [s - \tilde{h}_k, s]} \tilde{x}_k(\tau), \tilde{u}(s))ds, \end{cases} \tag{73}$$

$$x_{k+1}(t) \equiv \tilde{x}_{k+1}(t) \equiv \varphi(t), \quad t \in E_{t_0}, x = 0, 1, 2, \ldots. \tag{74}$$

Сравниваем эти приближения, считая, что

$$\int_{t_0}^{t^*} ||u(t) - \tilde{u}(t)||ds \leq \Delta. \tag{75}$$

Мы имеем

$$\begin{cases} \tilde{x}_0(t) - x_0(t) \equiv 0, \quad t \geq t_0, \\ \tilde{x}_{k+1}(t) - x_{k+1}(t) \equiv 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \\ \tilde{x}_1(t) - x_1(t) = \int_{t_0}^{t} [F(s, \tilde{x}_0(s), \tilde{x}_{0\tau}(s), \tilde{u}(s)) - F(s, x_0(s), x_{0\tau}(s), u(s))]ds \end{cases} \tag{76}$$

и в силу (71)

$$\begin{gathered} ||\tilde{x}_1(t) - x_1(t)|| \leq L_1 \int_{t_0}^{t} (||\tilde{x}_0(s) - x_0(s)|| + \\ + ||\tilde{x}_{0\tau}(s) - x_{0\tau}(s)|| + ||\tilde{u}(s) - u(s)||)ds, \end{gathered} \tag{77}$$

где $\tilde{h}_0 = h(t, \tilde{x}_0(t)), h_0 = h(t, x_0(t))$, причём $\tilde{h}_0 = h_0$, так как $\tilde{x}_0(t) = x_0(t)$ при $t \geq t_0$.

В силу (75), (76) имеем

$$||\tilde{x}_0(t) - x_0(t)|| = 0, \quad \int_{t_0}^{t^*} ||\tilde{u}(t) - u(t)||dt \leq \Delta, \quad t \in [t_0, t^*]. \tag{78}$$

Далее имеем согласно [9], поскольку

$$|| \max_{\tau \in [t - \tilde{h}_0, t]} \tilde{x}_0(\tau) - \max_{\tau \in [t - \tilde{h}_0, t]} x_0(\tau)|| \leq \max_{\tau \in [t - \tilde{h}_0, t]} ||\tilde{x}_0(\tau) - x_0(\tau)|| = 0,$$

так как $\tilde{x}_0(t) - x_0(t) = 0$ при любом t. Таким образом, из (77) получим с учётом (75)

$$||\tilde{x}_1(t) - x_1(t)|| \leq L_1 \Delta (t - t_0), \quad t \in [t_0, t^*]. \tag{79}$$

Для $\tilde{x}_2(t) - x_2(t), t \geq t_0$ имеем выражение

$$\tilde{x}_2(t) - x_2(t) = \int_{t_0}^{t} [F(s, \tilde{x}_1(s), \tilde{x}_{1\tau}(s), \tilde{u}(s)) - F(s, x_1(s), x_{1\tau}(s), u(s))]ds, \tag{80}$$

где $\tilde{h}_1 = h(t, \tilde{x}_1(t)), h_1 = h(t, x_1(t))$ откуда с учётом (71) имеем при $t \geq t_0$

$$\begin{gathered} ||\tilde{x}_2(t) - x_2(t)|| \leq \\ \leq L_1 \int_{t_0}^{t} (||\tilde{x}_1(s) - x_1(s)|| + ||\tilde{x}_{1\tau}(s) - x_{1\tau}(s)|| + ||\tilde{u}(s) - u(s)||)ds. \end{gathered} \tag{81}$$

Для первой и третьей разности под интегралом имеем (79) и (75) соответственно. Вторую разность оценим так же как и в случае доказательства теоремы 1. Запишем

$$\begin{aligned}(82)\qquad &\tilde{x}_{1\tau}(t) - x_{1\tau}(t) = \max_{\tau\in[t-\tilde{h}_1,t]} \tilde{x}_1(\tau) - \max_{\tau\in[t-h_1,t]} x_1(\tau) = \\ &= [\max_{\tau\in[t-\tilde{h}_1,t]} \tilde{x}_1(\tau) - \max_{\tau\in[t-\tilde{h}_1,t]} x_1(\tau)] + [\max_{\tau\in[t-\tilde{h}_1,t]} x_1(\tau) - \max_{\tau\in[t-h_1,t]} x_1(\tau)].\end{aligned}$$

Для первой разности в (81) имеем согласно [7]

$$||\max_{\tau\in[t-\tilde{h}_1,t]} \tilde{x}_1(\tau) - \max_{\tau\in[t-\tilde{h}_1,t]} x_1(\tau)|| \le \max_{\tau\in[t-\tilde{h}_1,t]} ||\tilde{x}_1(\tau) - x_1(\tau)||.$$

Следовательно, при любых $t \ge t_0$ (тогда максимум данной нормы справа достигается или при некотором $\tau_* > t_0$ (или при $\tau_* \in E_{t_0}$) имеем согласно (79)

$$(83)\qquad \begin{cases} \max\limits_{\tau\in[t-\tilde{h}_1,t]} ||\tilde{x}_1(\tau) - x_1(\tau)|| < L_1\Delta(\tau_* - t_0), & \text{если } \tau_* > t_0, \\ \max\limits_{\tau\in[t-\tilde{h}_1,t]} ||\tilde{x}_1(\tau) - x_1(\tau)|| = 0, & \text{если } \tau_* \in E_{t_0}. \end{cases}$$

Так как $\tau_* \le t$, то при любом $t \in [t_0, t^*]$

$$(84)\qquad \max_{\tau\in[t-\tilde{h}_1,t]} ||\tilde{x}_1(\tau) - x_1(\tau)|| \le L_1\Delta(t - t_0).$$

Для второй разности в (82) имеем

$$(85)\qquad ||\max_{\tau\in[t-\tilde{h}_1,t]} x_1(\tau) - \max_{\tau\in[t-h_1,t]} x_1(\tau)|| \le |||\dot{x}_1(t)||| \cdot |\tilde{h}_1 - h_1|, t \ge t_0,$$

если $t - \tilde{h}_1 \ge t_0, t - h_0 \ge t_0$, так что $x_1(t)$ выражается согласно (74), или в силу (44).

$$(86)\qquad ||\max_{\tau\in[t-h_1,t]} x_1(\tau) - \max_{\tau\in[t-h_1,t]} x_1(\tau)|| \le \max(|||\dot{x}_1(t)|||, L_3) \cdot |\tilde{h}_1 - h_1|,$$

если $t - \tilde{h}_1 < t_0$ или $t - h_0 < t_0$. Так как $|||\dot{x}_1(t)||| \le L_3$ в силу (6), то из (74), (84) и с учётом (5) получим при любом $t \ge t_0$,

$$\begin{aligned}(87)\qquad &||\max_{\tau\in[t-\tilde{h}_1,t]} x_1(\tau) - \max_{\tau\in[t-h_1,t]} x_1(\tau)|| \le L_3|\tilde{h}_1 - h_1| = \\ &= L_3|h(t, \tilde{x}_1(t)) - h(t, x_1(t))| \le L_2L_3||\tilde{x}_1(t) - x_1(t)|| \le L_1L_2L_3\Delta(t - t_0).\end{aligned}$$

Таким образом, получим при $t \ge t_0$

$$(88)\qquad ||\max_{\tau\in[t-\tilde{h}_1,t]} \tilde{x}_1(\tau) - \max_{\tau\in[t-h_1,t]} x_1(\tau)|| \le L_1(1 + L_2L_3)\Delta(t - t_0).$$

Тогда из (82) получим при $t \geq t_0$

$$(89) \qquad ||\tilde{x}_2(t) - x_2(t)|| \leq \Delta[L_1(t-t_0) + L_1^2(2 + L_2L_3)\frac{(t-t_0)^2}{2!}].$$

Для $\tilde{x}_3(t) - x_3(t), t \geq t_0$ имеем выражение, получающееся из (81) после замены в правой части всюду индекса 1 на 2, откуда

$$(90) \qquad \begin{gathered} ||\tilde{x}_3(t) - x_3(t)|| \leq L_1 \int_{t_0}^{t} (||\tilde{x}_2(s) - x_2(s)|| + \\ + || \max_{\tau \in [t-\tilde{h}_2, t]} x_2(\tau) - \max_{\tau \in [t-h_2, t]} x_1(\tau)|| + ||\tilde{u}(s) - u(s)||)ds, \\ \tilde{h}_2 = h(t, \tilde{x}_2(t)), \quad h_2 = h(t, x_2(t)). \end{gathered}$$

Для первой и третьей разности под интегралом имеем оценки (89), (75) соответственно. Вторую разность оценим так же, как и в случае (82).

Запишем

$$(91) \qquad \begin{gathered} \max_{\tau \in [t-\tilde{h}_2, t]} \tilde{x}_2(\tau) - \max_{\tau \in [t-h_2, t]} x_2(\tau) = [\max_{\tau \in [t-\tilde{h}_2, t]} \tilde{x}_2(\tau) - \max_{\tau \in [t-\tilde{h}_2, t]} x_2(\tau)] + \\ [\max_{\tau \in [t-\tilde{h}_2, t]} x_2(\tau) - \max_{\tau \in [t-h_2 t]} x_2(\tau)], \end{gathered}$$

откуда получим, как и выше

$$\begin{gathered} || \max_{\tau \in [t-\tilde{h}_2, t]} \tilde{x}_2(\tau) - \max_{\tau \in [t-\tilde{h}_2, t]} x_2(\tau)|| \leq \Delta(1 + L_2L_3)[L_1(t-t_0) + \\ + L_1^2(2 + L_2L_3)\frac{(t-t_0)^2}{2!}]. \end{gathered}$$

Согласно (89) получим далее при $t \geq t_0$

$$(92) \qquad \begin{gathered} ||\tilde{x}_3(t) - x_3(t)|| \leq \\ \leq \Delta[L_1(t-t_0) + L_1^2(2 + L_2L_3)\frac{(t-t_0)^2}{2!} + L_1^3(2 + L_2L_3)\frac{(t-t_0)^3}{3!}]. \end{gathered}$$

Точно также получим при любом $m \geq 4$ для $t \geq t_0$

$$||\tilde{x}_m(t) - x_m(t)|| \leq \Delta L_1[(t-t_0) + q\frac{(t-t_0)^2}{2!} + q^2\frac{(t-t_0)^3}{3!} + \cdots + q^{m-1}\frac{(t-t_0)^m}{m!}],$$

где $q = L_1(2 + L_2L_3)$ или

$$(93) \qquad ||\tilde{x}_m(t) - x_m(t)|| \leq \frac{\Delta L_1}{q}(l^{q(t-t_0)} - 1).$$

В пределе при $m \to \infty$ получим неравенство для разности решений $\tilde{x}(t) - x(t)$ при $t \geq t_0$

$$(94) \qquad ||\tilde{x}(t) - x(t)|| \leq \Delta\frac{L_1}{q}(l^{q(t-t_0)} - 1).$$

На отрезке $[t_0, t^*]$

$$||\tilde{x}(t) - x(t)|| \leq \frac{\Delta}{2 + L_2 L_3}(l^{q(t^* - t_0)} - 1) = \frac{\Delta}{2 + L_2 L_3} \tag{95}$$

где r, L - числа из формул (11). Отсюда вытекает, что при заданном $\varepsilon > 0$ получим неравенство

$$||\tilde{x}(t) - x(t)|| < \varepsilon, \quad t \in [t_0, t^*],$$

если

$$|||\tilde{u}(t) - u(t)||| \leq \frac{2 + L_2 L_3}{l^{q\frac{r}{L}} - 1} \cdot \varepsilon,$$

что и показывает непрерывность решения $x(t)$ уравнения (1) по отношению к $u(t)$.

Таким образом теорема полностью доказана.

Литература

[1] Азбелеев, Н.В., Рахматулина, Л.Ф., *Задача Коши для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом*, ДУ **8 No 9** (1972), 1542-1552.

[2] Зверкин, А.И., Каменский, Г.А., Норкин, С.Б., Эльсгольц, Л.Э., *Дифференциальные уравнения с отклоняющимсця аргументом*, УМН **17,** вып. 2(104) (1962), 77-164.

[3] Зверкин, А.И., Каменский, Г.А., Норкин, С.Б., Эльсгольц, Л.Э., *Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом*, П., Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом (1963), 3-49, Университет Дружбы Народов им. Лумумбы, Москва.

[4] Коддингтон, Э.Д., Левинсон, Н.Л.,Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, М, 1958.

[5] Лика, Д.А., Рябов, Ю.А., Методы интеграций и мажорирующие уравнения Ляпунова в теории нелинейных колебаний, Штиинца, Кишенёв, 1974.

[6] Магомедов, А.Р., *О некоторых вопросах дифференциальных уравнений с максимумами*, Серия физ.-тех. и мат. наук **1** (1977), 104-109, АН Азерб. ССР.

[7] Магомедов, А.Р., Рябов, Ю.А., *Дифференциальные уравнения с максимумами,* **75** (1983), 1-32, АН Азерб. ССР Институт физики.

[8] Эльсгольц, Л.Э., Норкин, С.Б., *Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом*, Москва “Наука”, 1971.

[9] Магомедов, А.Р., Набиев, Н.Г., Теоремы о нелокальной разрешимости начальной задачи для систем дифференциальных уравнений с максимумами, ДАН Азерб. ССР, т.ШЛ, Но 5, 1984, pp. 14-19.

А. Р. Магомедов
370054, Баку - 54
пос. Кирова, переулок Мотина, д. 1а
Азербайджан