Archivum Mathematicum

Richard Mijoule

La théorie des fonctions indexées en récursivité

Archivum Mathematicum, Vol. 23 (1987), No. 4, 191--206

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/107297

Terms of use:

© Masaryk University, 1987

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

ARCHIVUM MATHEMATICUM (BRNO)
Vol. 23, No. 4 (1987), 191–206

LA THÉORIE DES FONCTIONS INDEXÉES EN RÉCURSIVITÉ

RICHARD MIJOULE

(Received October 4, 1985)

Abstract. On présente dans ce travail une axiomatisation de la récursivité en utilisant la notion de catégorie indexée. Le lemme de Yoneda est à la base de cette axiomatisation, car il permet d'assurer l'existence de semi-fonctions récursives universelles.

Mots clés. Catégories, récursivité.

MS Classification. 03 D 75.

INTRODUCTION

Depuis plusieurs années s'est développée une théorie de la récursivité, exposée en particulier dans (3), (4) et (5). A la base de cette axiomatisation se trouvent les fonctions universelles, la propriété dite du $S-m-n$ et le point fixe.

Dans le texte qui suit, on étudie de manière algébrique cette théorie de la récursivité en utilisant les fonctions indéxées. Cette dernière notion s'est développée avec la théorie des topos et plus généralement avec les catégories indéxées (7). On est parvenu dans ce travail à formaliser de manière algébrique et très générale les trois concepts fondamentaux de la récursivité: fonctions universelles, propriété du $S-m-n$ et point fixe.

On retrouve ainsi les propriétés essentielles de la récursivité, en particulier le théorème de récursion, la définition par cas et la récurrence simple. Certaines propriétés sur la normalité sont abordées.

PRÉLIMINAIRES

D'une manière générale, une fonction indexée est une famille de fonctions $(f_i)_I$ d'une famille d'ensembles $(A_i)_I$ vers une famille d'ensembles $(B_i)_I$, où pour chaque $i \in I$, f_i est une fonction de A_i dans B_i. A l'aide de cette définition, on peut évidemment bâtir d'autres concepts: composition de fonctions indexées, ensemble des fonctions indexées de $(A_i)_I$ vers $(B_i)_I$, ... Au lieu de décrire en termes ensemblistes ces diverses notions, qui deviendraient assez compliquées en notation, il suffit de se servir de la théorie des catégories indexées (7).

Avant de donner quelques définitions indispensables sur cette théorie, on peut indiquer les motivations qui nous amènent aux fonctions récursives.

Soit $f: N^p \to N$ une semi-fonction récursive. Si e désigne un indexe pour f, on a $\varphi(e, x) = f(x)$ pour $x \in N^p$, où φ est une fonction universelle à $p + 1$ places. Il est alors possible de voir φ comme une fonction indexée par N de $(N^p)_N$ vers $(N)_N$. Nous reviendrons plus en détail sur cet exemple dans la suite du texte. Si E est une catégorie à limites finies, une catégorie E-indexée $\mathbf{A}$ est la donnée, pour chaque objet I de E, d'une catégorie $\mathbf{A}^I$, et pour tout morphisme $J \xrightarrow{\alpha} I$ de E, d'un foncteur $\alpha^* : \mathbf{A}^I \to \mathbf{A}^J$, appelé substitution le long de α. Ces données doivent être fonctorielles, i.e. vérifier les égalités suivantes:

$$(1_I)^* = 1_{\mathbf{A}^I}, \qquad (\beta \,.\, \alpha)^* = \alpha^* \,.\, \beta^*.$$

En particulier, E devient elle-même une catégorie E-indexée $\mathbf{E}$, en posant $\mathbf{E}^I = E/I$ et α^* étant le changement de base le long de α. Pour tout objet K de E, on a une catégorie E-indexée discrète $[K]$, où $[K]^I = \mathrm{Hom}_E(I, K)$ et où les substitutions le long de α sont les compositions avec α.

Un foncteur E-indexé de $\mathbf{A}$ vers $\mathbf{B}$ est la donnée, pour chaque objet I de E, d'un foncteur F^I de $\mathbf{A}^I$ vers $\mathbf{B}^I$, ces foncteurs F^I devant commuter avec les substitutions.

Si 1 est objet final d'une catégorie E, pour tout objet I de cette catégorie on désigne par I l'unique flèche de I vers 1. Si $\mathbf{A}$ est une catégorie E-indexée, on obtient en particulier le foncteur substitution I^* de $\mathbf{A}^1$ vers $\mathbf{A}^I$.

Soient f et g deux flèches de même source D et de buts respectifs A et B dans une catégorie où le produit AB est défini. On désigne par (f, g) la flèche de D vers $A \times B$ qui s'en déduit universellement.

FONCTIONS CALCULABLES ET SEMI-CALCULABLES

Pour la suite du texte, on se fixe une catégorie E à limites finies, munie d'un objet ω sans aucune structure pour l'instant, et d'une flèche $\omega \xrightarrow{\eta} \tilde{\omega}$ qui classifie les flèches partielles de codomaine ω. Soit S une sous-catégorie de E à produits finis. On suppose que $\omega \xrightarrow{\eta} \tilde{\omega}$ est élément de S.

Soit A un objet de S. Pour chaque objet I de S, on note $S(A, \tilde{\omega})^I$ la catégorie discrète ayant pour objets les flèches de I^*A vers $I^*\tilde{\omega}$ dans S/I, où I^* est le foncteur de substitution de $S = S/1$ dans S/I associé à la flèche $I: I \to 1$ dans S. Si $J \xrightarrow{\alpha} I$ est dans S, le foncteur α^* se restreint en un foncteur de $S(A, \tilde{\omega})^I$ dans $S(A, \tilde{\omega})^J$, que l'on note encore α^*. On obtient de cette manière une catégorie S-indexée $S(A, \tilde{\omega})$.

Les éléments de $S(A, \tilde{\omega})^I$ sont donc les triangles commutatifs où p et q sont respectivement les projections de $I \times A$ vers I et $I \times \tilde{\omega}$ vers I. Or, se donner de tels triangles dans S est équivalent à se donner des flèches de S, de $I \times A$ vers $\tilde{\omega}$, et donc à se donner des flèches partielles de $I \times A$ vers ω. On peut donc voir les éléments de $S(A, \tilde{\omega})^I$ comme des flèches partielles dans S de $I \times A$ vers ω.

$$\begin{tikzcd} I \times A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & I \times \tilde{\omega} \arrow[dl] \\ & I & \end{tikzcd}$$

Avec ces données, on fait les hypothèses suivantes: pour tout objet A de S, $A \neq 1$, on se donne un foncteur S-indexé $U_A : [\omega] \to S(A, \tilde{\omega})$ et un foncteur S-indexé $S_A : S(A, \tilde{\omega}) \to [\omega]$ tels que le composé $U_A \,.\, S_A$ soit le foncteur identité sur $S(A, \tilde{\omega})$. La donnée du foncteur U_A est équivalente, par Yoneda, à la donnée d'un élément X_A de $S(A, \tilde{\omega})^\omega$, appelé élément générique. Il possède la propriété suivante: pour tout objet I de S et toute flèche $I \xrightarrow{h} \omega$ dans S, on a $U_A^I(h) = h^*(X_A)$

$$\begin{tikzcd} {[\omega]^\omega} \arrow[r, "U_A^\omega"] \arrow[d, "h^*"'] & S(A, \tilde{\omega})^\omega \arrow[d, "h^*"] \\ {[\omega]^I} \arrow[r, "U_A^I"] & S(A, \tilde{\omega})^I \end{tikzcd}$$

Soit X_A cet élément générique de $S(A, \tilde{\omega})^\omega$, où p_1 désigne la première projection de $\omega \times \tilde{\omega}$ vers ω. Posons alors $\varphi^A : \omega \times A \xrightarrow{g} \omega \times \tilde{\omega} \xrightarrow{p_2} \tilde{\omega}$, où p_2 désigne la seconde projection de $\omega \times \tilde{\omega}$ vers $\tilde{\omega}$.

La donnée de S_A permet alors d'avoir

Proposition 1. *Pour tout élément* $I \times A \xrightarrow{f} \tilde{\omega}$ *dans* S, *il existe* $I \xrightarrow{h} \omega$ *dans* S *tel que* $\varphi^A . (h, 1_A) = f$. *C'est-à-dire que le diagramme ci-dessous est commutatif*

Prenons par exemple $E =$ Ens la catégorie des ensembles, S la catégorie des fonctions récursives partielles de N^p dans N. Chaque objet A de S est donc ici de la forme N^p pour $p \in N$. Il est à noter que dans ce cas précis $\omega = N$ et $\tilde{\omega} = N \cup \{u\}$, où u est un élément indéterminé ajouté à N. De sorte que la donnée d'une fonction partielle de N^p dans N est équivalente à la donnée d'une fonction totale de N^p dans $N \cup \{u\}$.

$$\begin{tikzcd} \omega \times A \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "P_2"'] & & \omega \times \tilde{\omega} \arrow[dl, "P_1"] \\ & \omega & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \omega \times A \arrow[r, "\phi^A"] & \tilde{\omega} \\ I \times A \arrow[u, "(h, 1_A)"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Un élément de $S(N^p, N \cup \{u\})^{N^q}$ est un triangle commutatif et par conséquent, f est une fonction indexée $(f_k)_{N^q}$, où $f_k : N^p \to N \cup \{u\}$ est définie par:

$$f_k(x) = p_1(f(k, x)) \qquad \text{pour } x \in N^p.$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N}^q \times \mathbb{N}^p \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_1"'] & & \mathbb{N}^q \times (\mathbb{N} \cup \{u\}) \arrow[dl, "p_1"] \\ & \mathbb{N}^q & \end{tikzcd}$$

La fonction $\varphi^{N^p} : N \times N^p \to N \cup \{u\}$ vérifiant les propriétés énoncées dans la proposition 1 est donc une fonction récursive partielle universelle qui énumère les fonctions récursives partielles à p places (8).

Revenons à présent au cas général.

Définition 1. *On appelle fonction S-semi-calculable tout élément de S de but $\tilde{\omega}$, et fonction S-calculable tout élément de S de but ω.*

Par convention, pour un élément $1 \xrightarrow{e} \omega$ de S, on posera $e \in \omega$. Pour deux fonctions $A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} \tilde{\omega}$ de S, si $f = g$ on écrira souvent $f(x) = g(x)$ pour $x \in A$. Cette convention d'écriture permet de bien voir le lien avec la théorie des fonctions récursives.

Théorème 2. *Pour tout objet A de S, φ^A est une fonction S-semicalculable universelle qui énumère les fonctions S-semi-calculables de A dans $\tilde{\omega}$.*

Preuve. Si l'on applique la proposition 1 pour $I = \omega$, on montre l'universalité de φ^A. Si l'on applique la proposition 1 pour $I = 1$, on montre que φ^A énumère les fonctions S-semi-calculables de A dans $\tilde{\omega}$.

En utilisant ce résultat, si $e \in \omega$, on notera parfois φ_e^A ou $\{e\}^A$ la fonction S-semi-calculable de A dans $\tilde{\omega}$ égale à $\varphi^A . (e, 1_A)$.

Lemme. *Soit $h : \omega \to \tilde{\omega}$ une fonction S-semi-calculable. Pour chaque objet A de S, il existe un élément $e \in \omega$ tel que*

$$\varphi^A(\varphi^\omega(e, x), y) = \varphi^A(h(x), y) \qquad \textit{pour } x \in \omega \textit{ et } y \in A.$$

Preuve. Si h est S-semi-calculable, par composition on déduit que $\varphi^A . (h, 1_A)$ est S-semi-calculable de $\omega \times A$ dans $\tilde{\omega}$. Comme φ^A est universelle, il existe $\Theta : \omega \to \omega$ S-calculable telle que $\varphi^A(\Theta(x), y) = \varphi^A(h(x), y)$, pour $x \in \omega$ et $y \in A$.

Comme φ^ω énumère les fonctions S-semi-calculables de ω dans $\tilde{\omega}$, il existe $e \in \omega$ tel que $\varphi^\omega(e, x) = \Theta(x)$ pour $x \in \omega$. On obtient donc le résultat.

On remarque que l'on a en particulier, pour $y \in A$,

$$\varphi^A(\varphi^\omega(e, e), y) = \varphi^A(h(e), y).$$

Avec un bon choix de h on a alors

Théorème 3 (de récursion). *Soit $f : \omega \times A \to \tilde{\omega}$ une fonction S-semi-calculable. Il existe $e \in \omega$ tel que $\{e\}^A(y) = f(e, y)$ pour $y \in A$.*

Preuve. Par l'universalité de φ^A, il existe $h : \omega \to \omega$ S-calculable telle que $\varphi^A(h(x), y) = f(x, y)$ pour $x \in \omega$ et $y \in A$. Soit g le composé suivant:

$$\omega \xrightarrow{\ \Delta\omega\ } \omega \times \omega \xrightarrow{\ \phi^\omega\ } \tilde{\omega} \xrightarrow{\ \tilde{h}\ } \tilde{\omega}$$

g est S-semi-calculable et d'après la remarque du lemme, il existe $n \in \omega$ tel que $\varphi^A(\varphi^\omega(n, n), y) = \varphi^A(g(n), y)$ pour $y \in A$.

On obtient alors $\varphi^A(\varphi^\omega(n, n), y) = \varphi^A(h(\varphi^\omega(n, n)), y)$.

Il suffit donc de poser $e = \varphi^\omega(n, n)$.

On a vu plus haut que nos hypothèses de départ s'appliquent bien à l'étude des fonctions récursives partielles. On obtient de cette manière une formulation abstraite de la récursivité. En effet, si l'on prend toujours $E = \text{Ens}$, mais maintenant S la catégorie des types au dessus de N, la calculabilité au sens de Kleene (2) vérifie également les hypothèses du départ.

De manière plus générale, on retrouve également les définitions données par Friedman dans (4).

Définition 2. *Soient $A, A_1, \ldots, A_n$ des objets de S. Soit G' une application de l'ensemble produit des fonctions S-semi-calculables de A_i dans $\tilde{\omega}$ vers l'ensemble des fonctions S-semi-calculables de A dans $\tilde{\omega}$. On dit que G' est représentable s'il existe une fonction S-calculable $f: \omega^n \to \omega$ telle que*

$$G'(\{e_1\}^{A_1}, \ldots, \{e_n\}^{A_n}) = \{f(e_1, \ldots, e_n)\}^A \qquad \textit{pour tout } e_1, \ldots, e_n \textit{ dans } \omega.$$

Cette notion, classique en récursivité, va être très simplifiée grâce aux catégories indexées. C'est là que l'on commence à voir l'intérêt des définitions exposées plus haut.

Théorème 4. *Si G est un foncteur S-indexé de $S(A_1, \tilde{\omega}) \times \ldots \times S(A_n, \tilde{\omega})$ vers $S(A, \tilde{\omega})$, alors G^1 est représentable.*

Preuve. On remarque tout d'abord que $[\omega^n] = [\omega]^n$. D'autre part, si G' est représentable par f, le diagramme ci-dessous est commutatif

$$\begin{tikzcd}
{[\omega^n]^1 \cong [[\omega]^n]^1} \arrow[r, "H_1"'] \arrow[d, "{[f]^1}"'] & S(A_1, \tilde{\omega})^1 \times \ldots \times S(A_n, \tilde{\omega})^1 \arrow[d, "G'"] \\
{[\omega]^1} \arrow[r, "U_A^1"'] & S(A, \tilde{\omega})^1
\end{tikzcd}$$

où H est le foncteur S-indexé $U_{A_1} \times \ldots \times U_{A_n}$ et $[f]$ est le foncteur S-indexé composition le long de f.

Reprenons alors les hypothèses du théorème, et soit G un foncteur S-indexé.

Soit F le foncteur S-indexé de $[\omega^n]$ dans $[\omega]$ défini par

$$F = S_A \,.\, G \,.\, H.$$

Il existe donc $f : \omega^n \to \omega$ dans S tel que $[f] = F$. Il suffit de prendre $f = F^{\omega^n}(1_{\omega^n})$.
On a donc en $1 [f]^1 = S_A^1 \,.\, G^1 \,.\, H^1$.
D'où $U_A^1 \,.\, [f]^1 = U_A^1 \,.\, S_A^1 \,.\, G^1 \,.\, H^1 = G^1 \,.\, H^1$.
Donc G^1 est représentable par f.

Corollaire. *Si G est un foncteur S-indexé de $S(A, \tilde{\omega})$ dans $S(A, \tilde{\omega})$, il existe une fonction S-semi-calculable f de A vers $\tilde{\omega}$ telle que $G^1(f) = f$.*

Preuve. D'après le théorème ci-dessus, G^1 est représentable par $g : \omega \to \omega$. Donc $G^1(\{e\}^A) = \{g(e)\}^A$ pour $e \in \omega$. D'après le théorème 3, il existe $e' \in \omega$ tel que $\{g(e')\}^A = \{e'\}^A$. Il suffit donc de prendre $f = \{e'\}^A$.
On retrouve donc ici le théorème du point fixe.

SOUS-OBJETS CALCULABLES ET SEMI-CALCULABLES

Soit A un objet de S et A' un sous-objet de A. A' est objet de E mais non nécessairement de S.

Définition 3. *On dit que A' est un sous-objet S-semi-calculable de A s'il existe une fonction S-semi-calculable $f : A \to \tilde{\omega}$ telle que le carré ci-dessous soit un produit fibré*

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r] \arrow[d, tail] & \omega \arrow[d, tail, "\eta"] \\
A \arrow[r, "f"] & \tilde{\omega}
\end{tikzcd}$$

Dans ce cas on pose $A' = \mathrm{dom}\, f$.

Proposition 5. *Les objets semi-calculables sont stables par changement de base dans S.*
Preuve. Il suffit simplement de considérer les diagrammes ci-dessous formés de produits fibrés
Soit P^A le domaine de φ^A. Dans (6) on démontre le résultat suivant:

Théorème 6. P^A est un sous-objet S-semi-calculable universel de $\omega \times A$ qui énumère les sous-objets S-semi-calculables de A.
On se donne à présent un élément particulier de ω que l'on notera o.

Définition 4. *On dit que A' est un sous-objet S-calculable de A s'il existe une fonction S-calculable $f : A \to \omega$ telle que le carré ci-dessous soit un produit fibré*

$$\begin{tikzcd}
A'' \arrow[r] \arrow[d, tail] & A' \arrow[r] \arrow[d, tail] & \omega \arrow[d, tail, "\eta"] \\
B \arrow[r, "h"] & A \arrow[r, "f"] & \tilde{\omega}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r] \arrow[d, tail] & 1 \arrow[d, "0"] \\
A \arrow[r, "f"] & \omega
\end{tikzcd}$$

Proposition 7. *Les objets S-calculables sont stables par changement de base dans S.*

Preuve. Il suffit de considérer les diagrammes ci-dessous formés de produits fibrés

$$\begin{tikzcd}
A'' \arrow[r] \arrow[d, tail] & A' \arrow[r] \arrow[d, tail] & 1 \arrow[d, "0"] \\
B \arrow[r, "h"] & A \arrow[r, "f"] & \omega
\end{tikzcd}$$

STRUCTURES RÉCURSIVES

Il n'a été donné, pour l'instant, aucune condition sur ω. On va dans ce paragraphe étendre les résultats déjà obtenus en enrichissant la structure sur ω.

Considérons le foncteur E-indexé diagonal $\Delta : \mathbf{E} \to \mathbf{E} \times \mathbf{E}$. Soit $(1, \omega)$ objet de $(\mathbf{E} \times \mathbf{E})^1$. On suppose désormais que Δ admet un adjoint à gauche en $(1, \omega)$ et que la valeur de cet adjoint en $(1, \omega)$ est ω (cf. (7)). On en déduit donc l'existence, dans E, de deux flèches notées o et s de 1 vers ω et ω vers ω respectivement. On impose alors que o et s soient dans S, et que la condition d'adjonction se restreigne à S par: pour tout objet I de S et tout objet α de S/I, on a la bijection suivante

$$\frac{I^*\omega \to \alpha \text{ dans } S/I}{I^*(1, \omega) \to \Delta^I\alpha \text{ dans } S/I \times S/I}.$$

En particulier, le diagramme ci-dessous est une somme dans S stable par produits finis

$$\begin{tikzcd} & \omega & \\ 1 \arrow[ur, "0"] & & \omega \arrow[ul, "s"'] \end{tikzcd}$$

Définition 5. *On appelle structure récursive tout quintuplet (E, S, ω, U_A, S_A) où U_A et S_A sont définis comme dans le premier paragraphe pour chaque objet $A \neq 1$ de S.*

On verra plus loin qu'il y a stabilité de ces structures par localisation en ω.

Proposition 8. *Il existe une fonction S-calculable $\alpha : \omega \times \omega \times \omega \to \omega$ telle que*

$$\alpha(a, x, y) = \begin{cases} x & si \quad a = 0, \\ y & si \quad a \neq 0. \end{cases}$$

Preuve. On utilise l'universalité de la somme avec les projections $p_2 : \omega \times \omega \to \omega$ et $p_3 : \omega \times \omega \times \omega \to \omega$. On retrouve ainsi toutes les notions usuelles de récursivité. La fonction α trouvée ici est l'une des données de base dans (4).

Proposition 9. *Il existe un foncteur S-indexé C_A de $S(A, \tilde{\omega}) \times S(A, \tilde{\omega})$ dans $S(\omega \times A, \tilde{\omega})$ tel que en 1 on ait: si $h : A \to \tilde{\omega}$ et $g : A \to \tilde{\omega}$ sont S-semi-calculables, et si $f = C_A^1(h, g)$ alors*

$$f(a, y) = \begin{cases} h(y) & si \quad a = 0, \\ g(y) & si \quad a \neq 0, \end{cases} \qquad \text{où } a \in \omega \text{ et } y \in A.$$

Preuve. Pour tout I objet de S, soient h_1 et h_2 des fonctions S-semi-calculables de $I\times A$ dans $\tilde{\omega}$. On en déduit donc deux fonction S-calculables Θ_1 et Θ_2 de I dans ω, telles que $U_A^I(\Theta_1) = h_1$ et $U_A^I(\Theta_2) = h_2$.

Soit Θ_2' le composé de $1_\omega\times\Theta_2$ et de p_2; c'est une flèche de S de $\omega\times I$ vers ω.

Comme $\omega\times I = (1 \amalg \omega)\times I \approx I \amalg (\omega\times I)$, on en déduit une fonction S-calculable $\Theta : \omega\times I \to \omega$.

Posons alors $C_A^I(h_1, h_2) = U_A^{\omega\times I}(\Theta)$.

On obtient de cette manière un foncteur de $S(A, \tilde{\omega})^I\times S(A, \tilde{\omega})^I$ dans $S(\omega\times A, \tilde{\omega})^I$ pour tout objet I de S. Montrons que ces foncteurs commutent avec les substitutions. Pour celà, on décompose C_A^I en foncteurs qui eux commutent aux substitutions.

Si l'on reprend la construction faite ci-dessus, on s'aperçoit que C_A^I est le composé des foncteurs suivants: on prend en premier $S_A^I\times S_A^I$ de $S(A, \tilde{\omega})^I\times S(A, \tilde{\omega})^I$ dans $[\omega]^I\times[\omega]^I$ puis $[\omega]\times\omega^*$ de $[\omega]^I\times[\omega]^I$ vers $[\omega]^I\times([\omega]^\omega)^I$ où $[\omega]^\omega$ est la catégorie S-indexée par $([\omega]^\omega)^I = [\omega]^{\omega\times I}$.

Puis on va de $([\omega]^\omega)^I$ dans $(S(A, \tilde{\omega})^\omega)^I$ par le foncteur $(S_A^\omega)^I$. En remarquant que $(S(A, \tilde{\omega})^\omega)^I = S(\omega\times A, \tilde{\omega})^I$, on obtient ainsi notre foncteur S-indexé C_A.

On en déduit alors la récurrence sur ω. On obtient en particulier que $[\omega]$ vérifie les propriétés d'un NNO dans un topos. Plus précisément on a:

Théorème 10. *Soit $\Phi : S(A, \tilde{\omega}) \to S(A, \tilde{\omega})$ un foncteur S-indexé et $g : [1] \to$ $\to S(A, \tilde{\omega})$ S-indexé. Il existe un foncteur S-indexé $\psi : [\omega] \to S(A, \tilde{\omega})$ tel que les diagrammes cidessous commutent*

$$\begin{tikzcd}
 & {[\omega]} \arrow[r, "{[s]}"] \arrow[d, "\psi"] & {[\omega]} \arrow[d, "\psi"] \\
{[1]} \arrow[ur, "{[0]}"] \arrow[r, "g"'] & S(A, \tilde{\omega}) \arrow[r, "\Phi"] & S(A, \tilde{\omega})
\end{tikzcd}$$

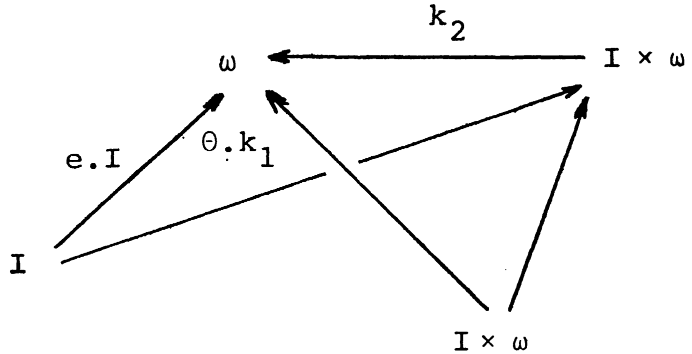
Preuve. Notons encore g la fonction S-semi-calculable de A dans $\tilde{\omega}$ associée au foncteur g; on a en fait $g = g^1(1_1)$.

Comme Φ est S-indexé, Φ^1 est représentable, d'après le théorème 4, par une fonction S-calculable $\Theta : \omega \to \omega$.

On construit un foncteur S-indexé H de $S(\omega\times A, \tilde{\omega})$ dans $S(\omega\times A, \tilde{\omega})$ de la manière suivante: pour I objet de S, soit k un élément de $S(\omega\times A, \tilde{\omega})^I$. Par l'universalité de φ^A, on obtient $k_1 : I\times\omega \to \omega$ S-calculable.

Comme $g : A \to \tilde{\omega}$ est S-semi-calculable, g a un indexe e.

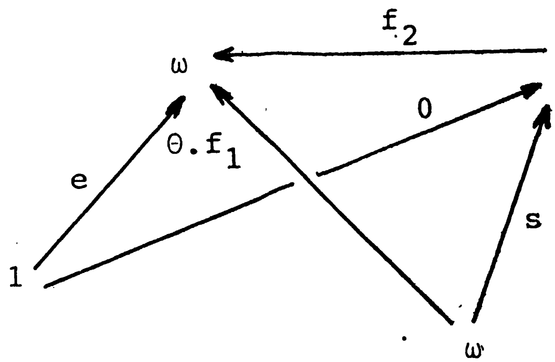
En considérant $I \xrightarrow{I} 1 \xrightarrow{e} \omega$ et $I \times \omega \xrightarrow{k_1} \omega \xrightarrow{\Theta} \omega$ on obtient une fonction S-calculable $k_2 : I \times \omega \to \omega$ telle que les diagrammes ci-dessous commutent



Posons finalement $H^I(k) = \varphi^A . (k_2, 1_A)$.

Il est clair que l'on définit ainsi un foncteur S-indexé H de $S(\omega \times A, \tilde{\omega})$ dans $S(\omega \times A, \tilde{\omega})$. Par le théorème du point fixe, il existe f S-semi-calculable de $\omega \times A$ dans $\tilde{\omega}$ telle que $H^1(f) = f$. Donc $f \in S(A, \tilde{\omega})^{\omega}$ et par Yoneda, on en déduit l'existence d'un foncteur S-indexé $\psi : [\omega] \to S(A, \tilde{\omega})$.

Montrons à présent que les diagrammes commutent: posons $f_1 = S_A(f)$ et considérons les diagrammes ci-dessous:



comme $\omega = 1 \coprod \omega$, on a $f_2 . o = e$ et $f_2 \cdot s = \Theta . f_1$.

On a donc $H^1(f) = \varphi^A(f_2, 1_A) = f$.

De $f_2 . o = e$, on déduit que $\varphi^A(e, 1_A) = \varphi^A(f_2 . o,\ 1_A) = \varphi^A(f_2, 1_A) \cdot (o, 1_A)$ d'où $g = f . (o, 1_A) = o^*(f)$: où $o^*\ S(A, \tilde{\omega})^{\omega} \to S(A, \tilde{\omega})^1$

Comme $\psi . [o] = o^* f$, on en déduit que $\psi . [o] = g$.

On remarque à présent que $\psi \,.\, [s] = s^*f$, où $s^* : S(A, \tilde{\omega})^\omega \to S(A, \tilde{\omega})^\omega$. D'autre part,

$$\begin{aligned}\Phi \,.\, \psi = \Phi^\omega(f) &= U_A^\omega \,.\, [\Theta]^\omega \,.\, S_A^\omega(f) \\ &= U_A^\omega \,.\, [\Theta]^\omega (f_1) \\ &= U_A^\omega(\Theta \,.\, f_1) \\ &= U_A^\omega(f_2 \,.\, s) \\ &= U_A^\omega(f_2) \,.\, (s, 1_A) \\ &= s^*(f)\end{aligned}$$

Finalement $\Phi \,.\, \psi = \psi \,.\, [s]$.

On remarque que l'on obtient ainsi la définition par récurrence. Si $g : A \to \tilde{\omega}$ est S-semi-calculable et si $h : \omega \times A \to \tilde{\omega}$ est S-semi-calculable, alors la fonction f définie par:

$$f(n, y) = \begin{cases} g(y) & \text{si} \quad n = 0, \\ h(n, f(n-1, y)) & \text{si} \quad n \neq 0, \end{cases} \qquad \text{pour } n \in \omega \text{ et } y \in A$$

est S-semi-calculable de $\omega \times A \to \tilde{\omega}$. En effet, posons $\Theta = S_A(h)$, puis $\Phi : S(A, \tilde{\omega}) \xrightarrow{S_A} [\omega] \xrightarrow{[\Theta]} [\omega] \xrightarrow{U_A} S(A, \tilde{\omega})$ Φ est un foncteur S-indexé, et en utilisant le théorème ci-dessus, on obtient la fonction f cherchée.

En particulier, prenons $g = 1_\omega : \omega \to \omega$ et

$$h : \omega \times \omega \xrightarrow{1_\omega \times s} \omega \times \omega \xrightarrow{p_2} \omega, \qquad \text{on obtient ainsi } + : \omega \times \omega \to \omega$$

vérifiant les conditions usuelles.

On peut remarquer l'analogie entre le diagramme du théorème 10 et celui décrit dans (9) p. 326. Les motivations sont différentes ainsi que les démonstrations. Dans (9) Rosebrugh part d'une catégorie S-indexée quelconque A et utilise dans ses démonstrations le fait que S soit un topos et que ω soit un NNO dans S. Ici, la catégorie $S(A, \tilde{\omega})$ est plus particulière, mais S n'a que des produits finis et ω n'est même pas un NNO dans S. Le théorème 3 (de récursion) est à la base de la démonstration du théorème 10.

PROPRIÉTÉS DE STABILITÉ DES OBJETS S-CALCULABLES ET S-SEMI-CALCULABLES

Pour chaque objet A de S, on construit une catégorie S-indexée $\mathbf{S}(A, \tilde{\omega})$, en considérant pour $\mathbf{S}(A, \tilde{\omega})^I$ l'ensemble ordonné des fonctions S-semi-calculables de $I \times A$ vers $\tilde{\omega}$. L'ensemble des objets de $\mathbf{S}(A, \tilde{\omega})^I$ est donc $S(A, \tilde{\omega})^I$.

Pour toute flèche $\alpha : J \to I$ de S, α^* de $S(A, \tilde{\omega})^I$ dans $S(A, \tilde{\omega})^J$ s'étend en un foncteur, noté encore α^*, de $\mathbf{S}(A, \tilde{\omega})^I$ dans $\mathbf{S}(A, \tilde{\omega})^J$. Les propriétés obtenues jusqu'à présent pour $S(A, \tilde{\omega})$ s'étendent évidemment à $\mathbf{S}(A, \tilde{\omega})$.

D'autre part, si K est un objet de S, on pose $\Delta_K = (1_K, 1_K)$ la flèche diagonale de K. Si K est un sous-objet S-calculable de $K\times K$, on note ∇_K la fonction S-calculable de $K\times K$ vers ω telle que le carré ci-dessous soit un produit fibré

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r] \arrow[d, "\Delta_K"'] & 1 \arrow[d, "0"] \\
K \times K \arrow[r, "\nabla_K"] & \omega
\end{tikzcd}$$

Dans le cas où $K = \omega$, on ne mettra pas d'indice à Δ et ∇.

On suppose désormais que ω est un sous-objet S-calculable de $\omega \times \omega$.

Lemme 1. *Soient $f, g : A \rightrightarrows K$ des flèches de S. Si ∇_K existe, alors le noyau de f et g est un sous-objet S-calculable de A.*

Preuve. Considérons le diagramme ci-dessous
oú i est le produit fibré de (f,g) et Δ_K dans E.

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i"'] & K \arrow[r] \arrow[d, "\Delta_K"] & 1 \arrow[d, "0"] \\
A \arrow[ur, shift left, "f"] \arrow[ur, shift right, "g"'] \arrow[r, "{(f,g)}"'] & K \times K \arrow[r, "\nabla_K"'] & \omega
\end{tikzcd}$$

Notons p_1 et p_2 les deux projections de $K\times K$ dans K.

De $p_1 . \Delta_K . h = p_1 . (f,g)$ et de $p_2 . \Delta_K . h = p_2 . (f,g) . i$, on déduit que $f . i =$ $= g . i$. Il est alors facile de vérifier que i est le noyau de f et g.

Avec les produits fibrés ainsi obtenus, on obtient que le noyau de f et g est un sous-objet S-calculable de A.

Lemme 2. *Soient f_1 et f_2 deux fonctions S-semi-calculables de A dans $\tilde{\omega}$, et notons* $A_1 = \operatorname{dom} f_1$, $A_2 = \operatorname{dom} f_2$. *Alors $A_1 \cap A_2$ est le produit fibré de (η, η) et $(\Delta_{\tilde{\omega}} \cdot f_1, \Delta_{\tilde{\omega}} \cdot f_2)$.*

Preuve. Tous les carrés ci-dessous sont des produits fibrés

$$\begin{tikzcd}
 & A_1 \arrow[r] \arrow[dd] & \omega \arrow[r, "\Delta"] \arrow[dd, "\eta"] & \omega \times \omega \arrow[dd, "(\eta,\eta)"] \\
A_2 \arrow[urr] \arrow[dr] & & & \\
 & A \arrow[r, shift left, "f_1"] \arrow[r, shift right, "f_2"'] & \tilde{\omega} \arrow[r, "\Delta_{\tilde{\omega}}"] & \tilde{\omega} \times \tilde{\omega}
\end{tikzcd}$$

Théorème 11. *Si A_1 et A_2 sont des sous-objets S-semi-calculables de A alors $A_1 \cap A_2$ est un sous-objet S-semi-calculable de A.*

Preuve. En utilisant le lemme 2, on s'aperçoit que $A_1 \cap A_2$ est le domaine de $+ \cdot (f_1, f_2)$.

En remarquant que le carré ci-dessous est un produit fibré,

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] \arrow[d, "(0,0)"'] & 1 \arrow[d, "0"] \\
\omega \times \omega \arrow[r, "+"'] & \omega
\end{tikzcd}$$

on en déduit

Corollaire. *Les sous-objets S-calculables de A sont stables par intersection finie.*

On peut reformaliser le théorème 11 en disant que le foncteur S-indexé diagonal $\Delta : \mathbf{S}(A, \tilde{\omega}) \to \mathbf{S}(A, \tilde{\omega}) \times \mathbf{S}(A, \tilde{\omega})$ admet un adjoint à droite noté $\cap$.

Soit B un objet de S. On définit une catégorie E-indexée **Sub** (B) en considérant pour **Sub** $(B)^I$ l'ensemble ordonné des sous-objets de I^*B dans E/I. Si l'on suppose que Sub (B) est petite, on note sub (B) l'objet de ses objets et $\epsilon_B \rightarrow \text{sub}(B)\times B$ l'élément générique. On en déduit alors une bijection entre les morphismes de E de I vers sub (B) et les sous-objets de $I\times B$, telle que le carré ci-dessous soit un produit fibré

$$\begin{tikzcd}
\epsilon_B \arrow[r, tail] & \mathrm{sub}(B)\times B \\
B' \arrow[r, tail] \arrow[u] & I\times B \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Définition 6. *Soit B objet de S. On dira que B est S-fini si*

(i) sub (B) *est un objet de S*

(ii) ϵ_B *est un sous-objet S-calculable de sub* $(B)\times B$

(iii) *si B' est un sous-objet S-semi-calculable de $I\times B$, alors l'unique f de I dans sub (B) est élément de S.*

(iv) *l'égalité sur sub (B) est S-calculable. On notera dans ce cas E_B la fonction S-calculable de sub $(B)\times$sub (B) dans ω telle que le carré ci-dessous soit un produit fibré*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{sub}(B) \arrow[r] \arrow[d, "\Delta_{\mathrm{sub}(B)}"'] & 1 \arrow[d, "0"] \\
\mathrm{sub}(B)\times \mathrm{sub}(B) \arrow[r, "E_B"] & \omega
\end{tikzcd}$$

On remarque que cette définition coïncide avec celle donnée dans (3).

Proposition 12. *Soient A et I des objets de S, et supposons que I est S-fini. Alors* $\mathrm{S}(A, \tilde{\omega})$ *est à I-produit; c'est-à-dire que le foncteur S-indexé diagonal* $\Delta_I : \mathrm{S}(A, \tilde{\omega}) \rightarrow$ $\rightarrow \mathrm{S}(A, \tilde{\omega})^I$ *possède un adjoint à droite* Π_I.

Preuve. Soit $f: I\times A \to \tilde{\omega}$ une fonction S-semi-calculable de domaine $B \to I\times A$. B étant S-semi-calculable, il existe $h: A \to \mathrm{sub}(I)$ élément de S tel que le carré ci-dessous soit un produit fibré

$$\begin{tikzcd}
\epsilon_I \arrow[r, tail] & I \times \mathrm{sub}(I) \\
B \arrow[u] \arrow[r, tail] & I \times A \arrow[u, "(1_I, h)"']
\end{tikzcd}$$

Notons $\bar{I}: 1 \to \mathrm{sub}(I)$ l'élément de S associé à 1_I.

D'après le lemme 1 du théorème 11, le noyau de h et g, où $g: A \to 1 \xrightarrow{\bar{I}} \mathrm{sub}(I)$, est un sous-objet S-semi-calculable de A. Notons k la fonction S-semi-calculable dont le domaine est ce noyau. Il est alors facile de vérifier que $k = \prod_I f$.

On retrouve ici le résultat classique avec la normalité: si $P(x, y)$ est semi-calculable alors $\forall x P(x, y)$ est semi-calculable.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. P. Azra et B. Jaulin, *Récursivité,* Collection Programmation, Gauthier–Villars (1973).

[2] S. Kleene, *Recursivee functionals and quantifiers of finite types I,* Trans. Amer. Math. Soc. 91 (1959), 1–52.

[3] J. Fenstad, *General recursion theory,* Perspectives in mathematical logic, Springer-Verlag (1980).

[4] H. Friedman, *Axiomatic recursive function theory,* Logic colloquium '69, North-Holland (1971), 113–137.

[5] A. Kechris and Y. Moschovakis, *Recursion in higher types,* Handbook of mathematical logic, North-Holland (1977), 681–737.

[6] R. Mijoule, *L'universalité des semi-fonctions récursives universelles,* Diagrammes Vol. 12 (1984).

[7] R. Paré et D. Schumacher, *Abstract families and the adjoint functor theorems,* Lectures notes in mathematics 661 (1978).

[8] H. Rogers Jr, *Theory of recursive functions and effective computability,* New York, MacGraw–Hill (1967).

[9] R. Rosebrugh, *On defining objects by recursion in a topos,* Journal of pure and applied algebra 20 (1981), 325–335.

R. Mijoule
Institut d'Informatique d'Entreprise
18, allée Jean Rostand, BP 77
91 002 Evry Cedex
France