Nguyen Dong Anh

Исследование влияния различных типов периодического и случайного возбуждения на систему Ван-дер-поля

Archivum Mathematicum, Vol. 23 (1987), No. 1, 29--34

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/107275

ARCHIVUM MATHEMATICUM (BRNO)
Vol. 23, No. 1 (1987), 29–34

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ ПЕРИОДИЧЕСКОГО И СЛУЧАЙНОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ НА СИСТЕМУ ВАН-ДЕР-ПОЛЯ*

НГУЕН ДОНГ АНЬ

(Поступило в редакцию 2. 9. 1985)

Резюме. Изучается влияние различных типов периодического и случайного воздействия на колебания в системе Ван-дер-Поля: случайного и периодического внешнего воздействия при периодически изменяющейся собственной частоте, случайного и пеиродического параметрического воздействия, экспоненциально-корреляционного центрированного стационарного случайного процесса. Дан анализ полученных результатов.

1. Рассмотрим колебания механической системы с одной степенью свободы, уравнение движения которой имеет вид

$$\ddot{x} + \nu^2 x = \varepsilon f(t, x, \dot{x}) + \sqrt{\varepsilon} g(t, x, \dot{x})\, \dot{\xi}(t), \tag{1.1}$$

$\dot{\xi}(t)$ – „белый шум" с единичной интенсивностью, ε – положительный малый параметр, $g(t, x, \dot{x})$, $f(t, x, \dot{x})$ – дифференциальные функции, причем последняя периодическая по t. Решение уравнения (1.1) ищется в виде [1, 2]

$$x = a\cos\varphi, \qquad \dot{x} = -a\nu\sin\varphi, \qquad \varphi = \nu t + \Theta. \tag{1.2}$$

Усредненное уравнение Колмогорова–Фоккера–Планка (КФП), составленное для стационарной плотности вероятностей амплитуды и фазы $W(a, \Theta)$ будет иметь вид [2, 3]

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a}(K_1 W) + \frac{\partial}{\partial\Theta}(K_2 W) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial a^2}(K_{11}W) + \\ + \frac{\partial^2}{\partial a\,\partial\Theta}(K_{12}W) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\Theta^2}(K_{22}W),\end{aligned} \tag{1.3}$$

где

$$K_1(a, \Theta) = \mu_t\left\{-\frac{1}{\nu} f(t, x, \dot{x})\sin\varphi + \frac{g^2(t, x, \dot{x})\cos^2\varphi}{2\nu^2 a}\right\},$$

* Предложено на конференции EQUADIFF 6, Брно, 26—30 августа 1985 г.

$$K_2(a, \Theta) = \mu_t \left\{ -\frac{1}{a\nu} f(t, x, \dot{x}) \cos\varphi - \frac{g^2(t, x, \dot{x}) \cos\varphi \sin\varphi}{a^2\nu^2} \right\}, \tag{1.4}$$

$$K_{11}(a, \Theta) = \mu_t \left\{ \frac{1}{\nu^2} g^2(t, x, \dot{x}) \sin^2\varphi \right\}, \qquad K_{22}(a, \Theta) = \mu_t \left\{ \frac{g^2(t, x, \dot{x}) \cos^2\varphi}{a^2\nu^2} \right\},$$

$$K_{12}(a, \Theta) = \mu_t \left\{ \frac{1}{a\nu^2} g^2(t, x, \dot{x}) \sin\varphi \cos\varphi \right\}, \qquad \mu_t(.) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T (.)\, dt.$$

Пусть функция $g(t, x, \dot{x})$ такая, что

$$K_{12}(a, \Theta) = 0, \tag{1.5}$$

то путем аналогичным [6] можно показать, что решение уравнения КФП (1.3) будет (C — постоянная нормировки)

$$W(a, \Theta) = C \exp \left\{ 2 \int \left[\frac{K_1 - \frac{1}{2} \frac{\partial K_{11}}{\partial a}}{K_{11}} \right] da + \left[\frac{K_2 - \frac{1}{2} \frac{\partial K_{22}}{\partial \Theta}}{K_{22}} \right] d\Theta \right\}, \tag{1.6}$$

если выполняется условие интегрируемости

$$\frac{\partial}{\partial \Theta} \left\{ \frac{K_1}{K_{11}} - \frac{1}{2K_{11}} \frac{\partial K_{11}}{\partial a} \right\} = \frac{\partial}{\partial a} \left\{ \frac{K_2}{K_{22}} - \frac{1}{2K_{22}} \frac{\partial K_{22}}{\partial \Theta} \right\}. \tag{1.7}$$

После получения решения (1.6) необходимо проверить, обладает ли оно всеми свойствами плотности вероятностей.

2. Система Ван-дер-Поля со случайным и периодическим внешним возбуждением при периодически изменяющейся собственной частоте.

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\alpha\dot{x} + (\nu^2 + \varepsilon\lambda \cos 2\nu t)\, x = \varepsilon(1 - \gamma x^2)\, \dot{x} + \\ + \varepsilon\varrho \cos \nu t + \sqrt{\varepsilon}\sigma\xi(t), \tag{2.1}$$

$\alpha, \lambda, \gamma, \varrho, \sigma = \text{const}$; $\alpha, \gamma > 0$. В отсутствие периодического внешнего возбуждения ($\varrho = 0$), уравнение (2.1) рассмотрено в [5], а в отсутствие периодического параметрического возбуждения ($\lambda = 0$) — в [9]. Нетрудно проверить, что для уравнения (2.1) условие интергируемости (1.7) будет выполняться, следовательно, из (1.6) получим плотность вероятностей амплитуды и фазы решения системы (2.1)

$$W(a, \Theta) = Ca \exp \left\{ -\frac{2\varrho\nu a}{\sigma^2} \sin\Theta + \frac{2\nu^2}{\sigma^2} \left(\frac{1}{2} - \alpha + \frac{\lambda}{4\nu} \sin 2\Theta \right) a^2 - \frac{\gamma\nu^2}{8\sigma^2} a^4 \right\}. \tag{2.2}$$

Из (2.2) видно, что при произвольных значениях линейного трения α и глубины модуляции λ плотность (2.2) всегда имеет место. Наиболее вероятностное значение амплитуды, определенной плотностью вероятностей (2.2) в отсутствие внешней периодической силы ($\varrho = 0$) будет равно

(2.3) $$\alpha_\lambda = \left[-\frac{\lambda}{\nu\gamma} + \frac{4}{\gamma}\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) + \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\nu\gamma} - \frac{4}{\gamma}\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\right)^2 + \frac{2\sigma^2}{\gamma\nu^2}}\right]^{1/2}$$

а в отсутствие периодического параметрического возбуждения будет определяться уравнением

(2.4) $$\pm\frac{2\varrho}{\nu}a = \frac{\sigma^2}{\nu^2} + 4\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)a^2 - \frac{\gamma}{2}a^4.$$

Из (2.2)–(2.4) следует, что при уменьшении собственной частоты ν значения плотности вероятностей и амплитуды будут увеличиваться и введением линейного трения не способствует погасить случайные колебания.

3. Система Ван-дер-Поля со случайным и периодическим параметрическим возбуждением. Рассмотрим следующее уравнение

(3.1) $$\ddot{x} + 2\varepsilon\alpha\dot{x} + \left[\nu^2 + \sqrt{\varepsilon}x\xi(t)\right]x = \varepsilon\left[(1 - \gamma x^2)\dot{x} + \varrho x^2\cos\nu t\right].$$

В отсутствие периодического параметрического возбуждения ($\varrho = 0$) уравнение (3.1) рассмотрено в [2]. С применением (1.4) уравнение (3.1) удовлетворяет условию интегрируемости (1.7). Таким образом, согласно (1.6) плотность вероятностей $W(a, \Theta)$, соответствующая уравнению (3.1), будет равна

(3.2) $$W(a, \Theta) = Ca^m \exp\left\{-\frac{2\varrho\nu a}{\sigma^2}\sin\Theta - \frac{\gamma\nu^2}{\sigma^2}a^2\right\}, \qquad m = \frac{8\nu^2}{\sigma^2}(1 - 2\alpha) + 1.$$

Из (3.2) следует, что при

(3.3) $$\alpha > \frac{1}{2} + \frac{\sigma^2}{16\nu^2}.$$

Функция (3.2) имеет в точке $a = 0$ неинтегрируемую особенность и представляет собой дельта-функцию. Физический смысл полученного результата: при выполнении условия (3.3) линейная система ($\gamma = 0$, $\varrho = 0$), соответствующая системе (3.1), стохастически устойчива [4] и эта устойчивость является сильной в том смысле, что даже в присутствии периодического параметрического возбуждения и отрицательного трения ($\varrho \neq 0$, $\gamma \neq 0$) колебаний с плотностью вероятностей (3.2) не будет. Следовательно, начиная со значения $\alpha = \frac{1}{2} + \sigma^2/16\nu^2$ линейного трения, можно погасить случайные колебания, и такое граничное значение не зависит от величины периодического параметрического возбуждения.

В то же время, как показано в п. 2, наличие линейного трения не может погасить случайные колебания в системе Ван-дер-Поля со случайным и периодическим внешним возбуждением. При

(3.4) $$\alpha < \frac{1}{2} + \frac{\sigma^2}{16\nu^2},$$

из (3.2) находим наиболее вероятностное значение амплитуды

$$(3.5) \qquad a = \frac{\varrho}{2\nu\gamma} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{\nu^2\gamma^2} + \frac{2}{\gamma}\left(\frac{\sigma^2}{\nu^2} + 8(1-2\alpha)\right)}.$$

Формула (3.5) показывает, что при $\sigma \to 0$, $\varrho \to 0$ случайные колебания с амплитудой (3.5) будет переходить в известное автоколебание с амплитудой, равной $2\sqrt{(1-2\alpha)/\gamma}$, а также, что при уменьшении собственной частоты ν, значение амплитуды (3.5) будет увеличиваться.

4. Рассмотрим систему Ван-дер-Поля при действии периодической силы и экспоненциально-коррелированного центрированного стационарного процесса $q(t)$

$$(4.1) \qquad \ddot{x} + 2\varepsilon\alpha\dot{x} + (\nu^2 + \varepsilon\lambda\cos 2\nu t)\,x = \varepsilon[(1-\gamma x^2)\,\dot{x} + \varrho\cos\nu t] + \sqrt{\varepsilon}q(t).$$

Случайный процесс $q(f)$ имеет спектральную плотность и корреляционную функцию

$$(4.2) \qquad S_q(\omega) = \frac{\sigma_0^2}{II}\frac{\eta}{\eta^2+\omega^2}, \qquad K_q(\tau) = \sigma_0^2\,e^{-\eta|\tau|}, \qquad \eta > 0.$$

Если время корреляции процесса $q(t)$ $\tau_{\text{кор}} = \eta^{-1}$ достаточно мало, т. е. если $\eta \gg \nu$, го обычно предполагают рассматривать $q(t)$ как „белый шум“ [10]. В данной работе время корреляции предполагается произвольным. Как известно [4, 5], процесс $q(t)$ можно рассматривать как результат прохождения „белого шума“ $\xi(t)$ через линейный фильтр

$$(4.3) \qquad L_1 q(t) \equiv \dot{q}(t) + \eta q(t) = \sqrt{2\eta}\sigma_0\xi(t).$$

Исключая $q(t)$ из системы (4.2), (4.3), получаем следующее уравнение для $x(t)$:

$$(4.4) \qquad \dddot{x} + \eta\ddot{x} + \nu^2\dot{x} + \eta\nu^2 x = \varepsilon f_1(t, x, \dot{x}, \ddot{x}),$$

где

$$f_1(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) = L_1[-2\alpha\dot{x} - \lambda\cos 2\nu t x + (1-\gamma x^2)\,\dot{x} + \varrho\cos\nu t].$$

Детерминированные колебания в системах третьего порядка (4.4) рассмотрены в [7], а случайные — в [8]. Как показано в [8], решение уравнения (4.4) можно найти в виде

$$(4.5) \qquad x(t) = a\cos\varphi, \quad \dot{x} = -a\nu\sin\varphi, \quad \ddot{x} = -a\nu^2\cos\varphi, \quad \varphi = \nu t + \Theta,$$

где $a(t)$, $\Theta(t)$ — марковские диффузионные случайные процессы. Соответствующее усредненное уравнение (КФП) (1.3) для стационарной плотности вероятностей амплитуды и фазы (4.5) имеет следующие коэффициенты сноса и диффузии [8]:

(4.6) $$K_1(a, \Theta) = \frac{\sigma_0^2 \eta a^{-1}}{2\nu^2(\nu^2 + \eta^2)} - \frac{\varrho \sin \Theta}{2\nu} + \left(\frac{1}{2} - \alpha + \frac{\lambda}{4\nu} \sin 2\Theta\right) a - \frac{\gamma a^3}{8},$$

$$K_2(a, \Theta) = -\frac{\varrho \cos \Theta}{2\nu} a^{-1} + \frac{\lambda}{4\nu} \cos 2\Theta,$$

$$K_{11}(a, \Theta) = \frac{\sigma_0^2 \eta}{\nu^2(\nu^2+\eta^2)}, \qquad K_{12}(a, \Theta) = 0, \qquad K_{22}(a, \Theta) = \frac{\sigma_0^2 \eta}{a^2\nu^2(\nu^2+\eta^2)}.$$

Для коэффициентов (4.6) условие интегрируемости (1.7) выполняется, следовательно, согласно (1.6), (4.6) получаем

(4.7) $$W(a, \Theta) = Ca \exp\left\{-\frac{\varrho\nu(\nu^2 + \eta^2) a}{\sigma_0^2 \eta} \sin \Theta + \frac{\nu^2(\nu^2 + \eta^2)}{\sigma_0^2 \eta}\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) a^2 - \frac{\nu^2(\nu^2 + \eta^2)\gamma}{16\sigma_0^2 \eta} a^4\right\}.$$

Сравнивая (4.7) с (2.2) видим, что они тождественны, если

(4.8) $$\sigma = \sigma_0 \sqrt{\frac{2\eta}{\eta^2 + \nu^2}} = \sqrt{2\Pi S_q(\nu)}.$$

Таким образом, в общем виде (без предположения о малости времени корреляции процесса $q(t)$) известный факт: при внешнем действии экспоненциально-корреляционного центрированного стационарного процесса $q(t)$ неавтономная система Ван-дер-Поля (1.7) будет реагировать как на „белый шум“ с интенсивностью, равной $\sqrt{2\Pi S_q(\nu)}$, где $S_q(\nu)$ – значение спектральной плотности процесса $q(t)$. Следовательно, с учетом, вышеизложенного при изучении влияния случайного процесса $q(t)$ на систему Ван-дер-Поля можно воспользоваться полученными в п. 2 результатами.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*. — М.: Наука, 1974, № 501 с.

[2] Ю. А. Митропольский, В. Г. Коломиец, — В кн.: *Приближенные методы исследования нелинейных систем*, Киев: 1976 — с. 102—147.

[3] Р. З. Хасьминский, *Теория вероятностей и ее грименение*, 1963, т. 8, № I, с. 3—25.

[4] В. В. Болотин, *Случайные колебания упругих систем*. — М.: Наука, 1979. — 336 с.

[5] М. Ф. Диментберг, *Нелинейные стохастические задачи механических колебаний*. — М.: Наука, 1980, 368 с.

[6] Нгуен Донг Ань. — *ПМ*, 1954, т. 20, № 3, с. 87—93.

[7] Nguyen Van Dao. *Non-linear oscillations of high order systems*. — Hanoi, 1979, 64 c.

[8] Нгуен Донг Ань. Сб. „Математическая физика“, Киев: 1983, в. 34, с. 86—89.

[9] Нгуен Донг Ань, Кьеу Тхе Дык, Укр. мат. журн., 1982, т. 34, № 6, с. 779—783.
[10] Р. Л. Стратонович, *Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике.* — М.: Советское радио, 1961, 558 с.

Нгуен Донг Ань
Ханой
Вьетнам
Ломоносова 57
Киев
УССР