Boško S. Jovanovič

Аппроксимация обобщенных решений с помощью конечных разностей

Archivum Mathematicum, Vol. 23 (1987), No. 1, 9--14

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/107272

ARCHIVUM MATHEMATICUM (BRNO)
Vol. 23, No. 1 (1987), 9–14

АППРОКСИМАЦИЯ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ*

БОШКО С. ЙОВАНОВИЧ

(Поступило в редакцию 11. 11. 1985)

Абстракт. В работе исследуется сходимость разностных схем, аппроксимирующих задачу Дирихле для эллиптического уравнения с переменными коэффициентами, в случае когда коэффициенты уравнения и его решение принадлежат пространствам Соболева—Слободецкого. Получены оценки скорости сходимости, согласованные с гладкостью данных.

Ключевые слова. Конечные разности, разностная схема, согласованная оценка, пространства Соболева—Слободецкого.

MS Classification. 65N10.

1. Рассмотрим краевую задачу для уравнения эллиптического типа второго порядка с переменными коэффициентами:

$$(1)\qquad -\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + au = f, \qquad x = (x_1, x_2) \in \Omega = (0, 1)^2,$$

$$u(x) = g(x), \qquad x \in \Gamma = \partial\Omega,$$

где

$$a_{ij} = a_{ij}(x) = a_{ji}, \qquad \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\xi_i\xi_j \geqq c_0 \sum_{i=1}^{2} \xi_i^2,$$

$$c_0 = \text{const} > 0 \qquad \text{и} \qquad a = a(x) \geqq 0.$$

Обычным способом введем в области $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ равномерную сетку $\bar{\omega}$ с шагом h. Обозначим $\omega = \bar{\omega} \cap \Omega$, $\gamma = \bar{\omega} \cap \Gamma$, $\gamma_j = \{x \in \gamma \mid x_j = 0,\ 0 < x_{3-j} < 1\}$, $\omega_j = \omega \cup \gamma_j$ и $\omega + = \omega \cup \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \{(0,\ 0)\}$. Для сеточных функций будем использовать следующие обозначения:

$$v^{\pm j} = v^{\pm j}(x_1, x_2) = v(x_1 \pm (2 - j)\,h,\ \ x_2 \pm (j - 1)\,h),$$

$$v_{x_j} = (v^{+j} - v)/h, \qquad v_{\bar{x}_j} = (v - v^{-j})/h.$$

Определим также сеточные скалярные произведения и нормы:

$$(v, w) = h^2 \sum_{x \in \omega} v(x)\,w(x), \qquad \|v\|^2 = \|v\|^2_{L_2(\omega)} = (v, v),$$

---

* Предложено на конференции EQUADIFF 6, Брно, 26—30-го августа 1985 г.

$$[v, w)_j = h^2 \sum_{x \in \omega_j} v(x)\, w(x), \qquad |[v\|_j^2 = [v, v)_j,$$

$$[v, w) = h^2 \sum_{x \in \omega +} v(x)\, w(x), \qquad |[v\|^2 = [v, v),$$

$$\| v \|^2_{W_2^1(\omega)} = \| v \|^2 + |[v_{x_1}\|_1^2 + |[v_{x_2}\|_2^2,$$

$$\| v \|^2_{W_2^2(\omega)} = \| v \|^2_{W_2^1(\omega)} + \| v_{x_1\bar{x}_1} \|^2 + |[v_{x_1x_2}\|^2 + \| v_{x_2\bar{x}_2} \|^2.$$

Краевую задачу (1) аппроксимируем следующей разностной схемой [1]:

$$(2) \qquad -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} [(a_{ij}v_{x_j})_{\bar{x}_i} + (a_{ij}v_{\bar{x}_j})_{x_i}] + \tilde{a}v = \tilde{f}, \qquad x \in \omega,$$

$$v(x) = g(x), \qquad x \in \gamma.$$

В случае когда $\tilde{a} = a, \tilde{f} = f$, и коэффициенты и решение задачи (1) достаточно гладкие ($a_{ij} \in C^3$, $a \in C$, $u \in C^4$), легко получается следующая оценка скорости сходимости разностной схемы (2) (см. [1]):

$$\| u - v \|_{W_2^1(\omega)} = 0(h^2).$$

В работах [2–6] для разностных схем, аппроксимирующих уравнения с постоянными коэффициентами, получены оценки скорости сходимости, согласованные с гладкостью решения рассматриваемой задачи:

$$(3) \qquad \| u - v \|_{W_2^k(\omega)} \leqq ch^{s-k} \| u \|_{W_2^s(\Omega)}, \qquad k < s \leqq k + 2.$$

В настоящей работе оценки вида (3) распространяются на уравнения с переменными коэффициентами.

2. Предположим, что обобщенное решение $u(x)$ задачи (1) принадлежит пространству Соболева–Слободецкого $W_2^s(\Omega)$, $1 < s \leqq 3$ [7]. Предположим также, что $a_{ij}(x) \in W_\infty^{s-1}(\Omega)$ и $a(x) \in L_\infty(\Omega)$ при $1 < s \leqq 2$, соответственно $a(x) \in W_\infty^{s-2}(\Omega)$ при $2 < s \leqq 3$ (при $1 < s \leqq 2$ условие $a(x) \geqq 0$ понимаем в смысле „почти всюду").

В дальнейшем тексте будем использовать следующие обозначения: $[r]^-$ – самое большое целое число, которое $< r$: R_k – множество многочленов степени $\leqq$ k (k – целое); $|.|_{W_p^r(E)}$ – старшая полунорма пространства $W_p^r(E)$.

Положим в уравнении (2): $\tilde{a} = Ta$, $\tilde{f} = Tf$, где T – произведение стекловских операторов усреднения: $T = T_1^2 T_2^2$, $T_j^2 = T_j^+ T_j^-$,

$$T_j^+ f(x) = \frac{1}{h} \int_{x_j}^{x_j+h} f(x_1 + (2-j)(\xi - x_1), \quad x_2 + (j-1)(\xi - x_2))\, d\xi,$$

$$T_j^- f(x) = \frac{1}{h} \int_{x_j-h}^{x_j} f(x_1 + (2-j)(\xi - x_1), \quad x_2 + (j-1)(\xi - x_2))\, d\xi.$$

Пусть u решение задачи (1) и v решение задачи (2). Погрешность $Z = u - v$ определена в узлах сетки ω, и удовлетворяет условиям:

$$(4)\qquad -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2}\left[(a_{ij}Z_{x_j})_{\bar{x}_i}+(a_{ij}Z_{\bar{x}_j})_{x_i}\right]+(Ta)\,Z=\psi,\qquad x\in\omega,$$

$$Z(x)=0,\qquad x\in\gamma,$$

где

$$\psi=\sum_{i,j=1}^{2}\eta_{ij,\bar{x}_i}+\eta,$$

$$\eta_{ij}=T_i^+T_{3-i}^2\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)-0{,}5(a_{ij}u_{x_j}+a_{ij}^{+i}u_{\bar{x}_j}^{+i}),$$

$$\eta=(Ta)\,u-T(au).$$

С помощью суммирования по частям, используя неравенство Коши–Шварца, легко получается следующая аппириорная оценка:

$$(5)\qquad \|Z\|_{W_2^1(\omega)}\leqq c\Big(\sum_{i,j=1}^{2}|[\eta_{ij}\|_i^2+\|\eta\|^2\Big)^{1/2},$$

где

$$c=\sqrt{2}(1+16^{-1})\,c_0^{-1}=\text{const}>0.$$

Оценка скорости сходимости рассматриваемой разностной схемы базируется на аппириорной оценке (5) и следующей лемме.

Лемма. *Пусть* ζ *ограниченный билинейный функционал на* $W_p^r(E)\times W_q^t(E)$ $(1\leqq p,q\leqq+\infty;\ r,t>0)$ *и пусть:*

$$\forall P\in\mathscr{P}_{[r]-},\quad \forall w\in W_q^t(E)\colon\ \zeta(P,w)=0,$$

$$\forall v\in W_p^r(E),\qquad \forall Q\in\mathscr{P}_{[t]-}\colon\ \zeta(v,Q)=0.$$

Тогда для каждого $v\in W_p^r(E)$ *и каждого* $w\in W_q^t(E)$ *выполнено неравенство:*

$$|\zeta(v,w)|\leqq c\,|v|_{W_p^r(E)}\,|w|_{W_q^t(E)},$$

где $c=c(E,p,r,q,t)=\text{const}>0$.

Доказательство следует из леммы Дюпона–Скотта [8], таким же образом как аналогичный результат для целых r и t [9] следует из леммы Брамбла–Гильберта [10].

Чтобы получить оценку скорости сходимости разностной схемы (2), достаточно оценить слагаемые в правой части неравенства (5). Предварительно представим η_{ij} в виде:

$$\eta_{ij}=\eta_{ij}^{(1)}+\eta_{ij}^{(2)}+\eta_{ij}^{(3)}+\eta_{ij}^{(4)},$$

где

$$\eta_{ij}^{(1)}=T_i^+T_{3-i}^2\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)-(T_i^+T_{3-i}^2a_{ij})\left(T_i^+T_{3-i}^2\frac{\partial u}{\partial x_j}\right),$$

$$\eta_{ij}^{(2)} = [T_i^+ T_{3-i}^2 a_{ij} - 0.5(a_{ij} + a_{ij}^{+i})]\left(T_i^+ T_{3-i}^2 \frac{\partial u}{\partial x_j}\right),$$

$$\eta_{ij}^{(3)} = 0.5(a_{ij} + a_{ij}^{+i})\left[T_i^+ T_{3-i}^2 \frac{\partial u}{\partial x_j} - 0{,}5(u_{x_j} + u_{\bar{x}_j}^{+i})\right],$$

$$\eta_{ij}^{(4)} = -0{,}25(a_{ij} - a_{ij}^{+i})(u_{x_j} - u_{\bar{x}_j}^{+i}).$$

С помощью линейного преобразования $\xi_j = x_j + ht_j$ отобразим область $e_i(x) = \{\xi = (\xi_1, \xi_2) \mid x_i \leqq \xi_i \leqq x_i + h,\ x_{3-i} - h \leqq \xi_{3-i} \leqq x_{3-i} + h\}$ на прямоугольник $E_i = \{t = (t_1, t_2) \mid o \leqq t_i \leqq 1,\ -1 \leqq t_{3-i} \leqq 1\}$ и положим $a_{ij}^*(t) = a_{ij}(\xi)$, $u^*(t) = u(\xi)$. Тогда значение $\eta_{ij}^{(1)}$ в узле $x \in \omega_i$ можем представить в виде:

$$\eta_{ij}^{(1)} = h^{-1}\left\{\iint_{E_i} |1 - t_{3-i}|\, a_{ij}^*(t) \frac{\partial u^*}{\partial t_j}\, \mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_2 - \right.$$

$$\left. - \left[\iint_{E_i} |1 - t_{3-i}|\, a_{ij}^*(t)\, \mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_2\right] \cdot \left[\iint_{E_i} |1 - t_{3-i}| \frac{\partial u^*}{\partial t_j}\, \mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_2\right]\right\}.$$

Из теорем вложения [11] следует:

$$|\eta_{ij}^{(1)}| \leqq ch^{-1} \| a_{ij}^* \|_{W_\infty^r(E_i)} \| u^* \|_{W_2^t(E_i)}, \qquad r \geqq 0,\ t \geqq 1.$$

Таким образом, значение $\eta_{ij}^{(1)}$ в узле $x \in \omega_i$ является билинейным ограниченным функционалом на $W_\infty^r(E_i) \times W_2^t(E_i)$. Кроме того $\eta_{ij}^{(1)} = 0$ если $a_{ij}^* \in \mathscr{P}_0$, а также если $u^* \in \mathscr{P}_1$. Из леммы следует:

$$|\eta_{ij}^{(1)}| \leqq ch^{-1} | a_{ij}^* |_{W_\infty^r(E_i)} | u^* |_{W_2^t(E_i)}, \qquad 0 \leqq r \leqq 1,\ 1 \leqq t \leqq 2.$$

Возвращаясь к старым переменным, получаем:

$$|\eta_{ij}^{(1)}| \leqq ch^{r+t-2} | a_{ij} |_{W_\infty^r(e_i(x))} | u |_{W_2^t(e_i(x))}.$$

Отсюда следует:

$$\|[\eta_{ij}^{(1)} \|_i \leqq ch^{r+t-1} | a_{ij} |_{W_\infty^r(\Omega)} | u |_{W_2^t(\Omega)}, \qquad 0 \leqq r \leqq 1,\ 1 \leqq t \leqq 2.$$

Полагая $r + t = s$ и проводя очевидные оценки, окончательно получаем:

$$\|[\eta_{ij}^{(1)} \|_i \leqq ch^{s-1} \| a_{ij} \|_{W_\infty^{s-1}(\Omega)} \| u \|_{W_2^s(\Omega)}, \qquad 1 < s \leqq 3.$$

Такие же неравенства выполнены и для $\eta_{ij}^{(2)}$, $\eta_{ij}^{(3)}$ и $\eta_{ij}^{(4)}$.

Тем же способом получаем оценку:

$$\| \eta \| \leqq ch^{s-1} \| a \|_{W_\infty^{s'-2}(\Omega)} \| u \|_{W_2^s(\Omega)}, \qquad 1 < s \leqq 3.$$

где $s' = \max\{s, 2\}$.

Из этих оценок и неравенства (5) окончательно получаем искомую оценку скорости сходимости разностной схемы (2):

$$\| u - v \|_{W_2^1(\omega)} = \| Z \|_{W_2^1(\omega)} \leqq$$

(6) $$\leqq ch^{s-1}(\max_{i,j} \| a_{ij} \|_{W_\infty^{s-1}(\Omega)} + \| a \|_{W_\infty^{s'-2}(\Omega)}) \| u \|_{W_2^s(\Omega)},$$

$$1 < s \leqq 3, \qquad s' = \max\{s, 2\}.$$

Заметим, что оценка (6) согласована с гладкостью данных.

3. Похожие результаты можно получить и в других сеточных нормах. Например, если $u \in W_2^s(\Omega)$, $a_{ij} \in W_\infty^{s-1}(\Omega)$, $a \in W_\infty^{s-2}(\Omega)$, $2 < s \leqq 4$, используя второе основное неравенство для сеточных функций [12]:

$$\| Z \|_{W_2^2(\omega)} \leqq c \| \psi \| \leqq c(\sum_{i,j=1}^{2} \| \eta_{ij,\bar{x}_i} \|^2 + \| \eta \|^2)^{1/2},$$

и описанный поступок, получаем следующую оценку скорости сходимости нашей разностной схемы:

$$\| u - v \|_{W_2^2(\omega)} \leqq ch^{s-2}(\max_{i,j} \| a_{ij} \|_{W_\infty^{s-1}(\Omega)} + \| a \|_{W_\infty^{s-2}(\Omega)}) \| u \|_{W_2^s(\Omega)}, \qquad 2 < s \leqq 4.$$

Примечание: При $s > 2$ $a(x)$ является непрерывной функцией. Также, $f(x)$ является непрерывной при $s > 3$. Тогда в (2) можно положить $\tilde{a} = a$, соответственно $\tilde{f} = f$. Полученные оценки при этом сохраняют силу.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Самарский А. А., *Теория разностных схем*, Наука, Москва, 1983.

[2] Лазаров Р. Д., *К вопросу о сходимости разностных схем для обобщенных решений уравнения Пуассона*, Дифференциальные уравнения 17 (1981), 1285—1294.

[3] Лазаров Р. Д., Макаров В. Л., Самарский А. А., *Применение точных разностных схем для построения и исследования разностных схем на обобщенных решениях*, Мат. Сб. 117 (159) (1982), 469—480.

[4] Lazarov R. D., Makarov V. L., Weinelt W., *On the convergence of difference schemes for the approximation of solutions $u \in W_2^m (m > 0.5)$ of elliptic equations with mixed derivatives*, Numer. Math. 44 (1984), 223–232.

[5] Йованович Б. С., *О сходимости дискретных решений к обобщенным решениям краевых задач*, В кн.: Вариационно-разностные методы в математической физике (ред. Н. С. Бахвалов, Ю. А. Кузнецов), ОВМ АН СССР, Москва, 1984, 120—129.

[6] Süli E., Jovanović B., Ivanović L., *Finite difference approximation of generalized solutions*, Math. Comput. 45 (1985), 319–327.

[7] Adams R. A., *Sobolev spaces*, Academic Press, New York etc., 1975.

[8] Dupont T., Scott R., *Polynomial approximation of functions in Sobolev spaces*, Math. Comput. 34 (1980), 441–463.

[9] Ciarlet Ph., *The finite element method for elliptic problems*, North-Holland, Amsterdam etc., 1978.

[10] Bramble J. H., Hilbert S. R., *Bounds for a class of linear functionals with applications to Hermite interpolation*, Numer. Math. 16 (1971), 362–369.

[11] Никольский С. М., *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, Наука, Москва, 1969.

[12] Дьяконов Е. Г., *Разностные методы решения краевых задач*, I, МГУ, Москва, 1971

Boško S. Jovanović
Faculty of sciences
Institute of mathematics
Studentski trg 16
110 00 Belgrade, Yugoslavia

Бошко С. Йованович
Природно-математички фак.
Институт за математику
Студентски трг 16
110 00 *Београд, Югославия*