Emil Slatinský

Die Abgeschlossenheit der lexikographischen Summe in der Klasse distributiver Verbände

Archivum Mathematicum, Vol. 21 (1985), No. 2, 105--111

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/107221

ARCHIVUM MATHEMATICUM (BRNO)
Vol. 21, No. 2 (1985), 105–112

DIE ABGESCHLOSSENHEIT DER LEXIKOGRAPHISCHEN SUMME IN DER KLASSE DISTRIBUTIVER VERBÄNDE

EMIL SLATINSKÝ, Brno

(Eingegangen am 5. Mai 1983)

Resümee. In dieser Arbeit werden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür gegeben, daß Resultat der lexikographischen Summe, die auf Elemente der Klasse geordneter Mengen angewendet wird, ein Element aus der Klasse distributiver Verbände wäre. (Satz 17.)

Schlüsselworte. Antikette, beschränkte Menge, distributiver relativer Verband, distributiver Verband, gerichtete Menge, Isomorphismus, Kette, lexikographische Summe, modularer relativer Verband, modularer Verband, Ordinalprodukt, Ordnungsrelation, relativer Verband, Teilverband, Verband.

1. Bezeichnung. Sei M eine geordnete Menge, $N \subseteq M$. Wir bezeichnen $L_M(N) = \{a \in M;\ a$ ist eine untere Schranke von $N\}$, $U_M(N) = \{a \in M;\ a$ ist eine obere Schranke von $N\}$.

Wenn $N = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ist, schreiben wir $L_M(N) = L_M(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $U_M(N) = U_M(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Das größte [kleinste] Element einer nach oben [nach unten] beschränkten geordneten Menge bezeichnen wir als $g(M)$ [$1(M)$].

2. Bemerkung. Eine geordnete Menge M heißt nach unten [nach oben] gerichtet, wenn $L_M(a, b) \neq \emptyset$ [$U_M(a, b) \neq \emptyset$] für alle $a, b \in M$ gilt.

Eine geordnete Menge M heißt gerichtet, wenn M nach unten und nach oben gerichtet ist.

3. Bezeichnung. Sei M eine geordnete Menge. Sei $o, i \bar{\in} M$. Definieren wir eine geordnete Menge M^* folgenderweise: Ist M eine gerichtete Menge, so gilt $M^* = M$, ist M eine nach oben und nicht nach unten gerichtete Menge, so gilt $M^* = M \cup \{o\}$, ist M eine nach unten und nicht nach oben gerichtete Menge, so gilt $M^* = M \cup \{i\}$, ist M eine nicht nach unten und nicht nach oben gerichtete Menge, so gilt $M^* = M \cup \{o, i\}$. Dabei gilt $o < x$ [$x < i$] für alle $x \in M$, falls $o \in M^*$ [$i \in M^*$] ist.

4. Definition. Eine geordnete Menge M heißt ein *relativer Verband,* wenn M^* ein Verband ist.

5. Bemerkung. Eine geordnete Menge M ist ein relativer Verband genau dann, wenn aus $L_M(a, b) \neq \emptyset$ die Existenz von $a \wedge b$ und aus $U_M(a, b) = \emptyset$ die Existenz von $a \vee b$ in M folgt.

6. Bezeichnung. Mit $\prec$ bezeichnen wir die Nachbarschaftsrelation (d. h. $a \prec b$ dann und nur dann, wenn $a < b$ und wenn es kein x mit $a < x < b$ gibt).

7. Bemerkung. Sei $\{M_\iota;\ \iota \in G\}$ ein geordnetes System geordneter Mengen. Mit $\sum_{\iota \in G}^{l} M_\iota$ bezeichnen wir die lexikographische Summe der Mengen $M_\iota;\ \iota \in G$.

Der folgende Satz 8 ist eine direkte Folgerung des Satzes 3.9 in [4] und des dualen Satzes zum Satz 3.9.

8. Satz. *Sei $\{M_\iota;\ \iota \in G\}$ ein geordnetes System geordneter Mengen. Dann sind die folgende Aussagen äquivalent:*

(A) $\sum_{\iota \in G}^{l} M_\iota$ *ist ein Verband.*

(B) *G ist ein Verband, M_ι ist ein relativer Verband für jedes $\iota \in G$ und es gelten folgende Bedingungen:*

(α_1) *Ist $\iota_2 \in G$ ein solches Element, daß M_{ι_2} nicht nach unten gerichtet ist, dann gibt es $\iota_1 \in G$, $\iota_1 = g(L_G(\iota_2) - \{\iota_2\})$ und M_{ι_1} ist nach oben beschränkt. Ist $\iota_3 \in G$ ein solches Element, daß M_{ι_3} nicht nach oben gerichtet ist, dann gibt es $\iota_4 \in G$, $\iota_4 = l(U_G(\iota_3) - \{\iota_3\})$ und M_{ι_4} ist nach unten beschränkt.*

(α_2) *Wenn $\iota_1, \iota_2 \in G$, $\iota_1 \parallel \iota_2$ ist, dann ist $M_{\iota_1 \wedge \iota_2}$ nach oben und $M_{\iota_1 \vee \iota_2}$ nach unten beschränkt.*

9. Definition. Ein relativer Verband M heißt *modularer relativer Verband,* wenn M^* ein modularer Verband ist.

10. Satz. *Sei $\{M_\iota;\ \iota \in G\}$ ein geordnetes System geordneter Mengen. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(A) $\sum_{\iota \in G}^{l} M_\iota$ *ist ein modularer Verband.*

(B) $\sum_{\iota \in G}^{l} M_\iota$ *ist ein Verband, G ist ein modularer Verband, M_ι ist ein modularer relativer Verband für jedes $\iota \in G$ und es gilt:*

(β) *Wenn $\iota_1, \iota_2 \in G$, $\iota_1 \parallel \iota_2$ ist, dann sind M_{ι_1}, M_{ι_2} Antiketten.*

Der Beweis des Satzes ist in [5], Satz 17.

11. Bemerkung. Es gibt ein solches System $\{M_\iota;\ \iota \in G\}$, wobei G und M_ι für $\iota \in G$ distributive Verbände sind, daß $\sum_{\iota \in G}^{l} M_\iota$ kein distributiver Verband ist.

12. Beispiel. Seien G, M distributiver Verbände mit den Diagrammen in Fig. 1.

Sei $\{M_\iota;\ \iota \in G\}$ ein geordnetes System geordneter Mengen mit $M_\iota = M$ für alle $\iota \in G$. Gemäß dem Satz 8 ist $\sum_{\iota \in G}^{l} M_\iota$ ein Verband, der aber kein distributiver Verband ist. In der Tat: Für die Elemente $(\iota_2, a), (\iota_4, b), (\iota_2, b) \in \sum_{\iota \in G}^{l} M_\iota$ gilt $(\iota_2, a) \vee ((\iota_4, b) \wedge (\iota_2, b)) = (\iota_2, a) \vee (\iota_1, b) = (\iota_2, a), ((\iota_2, a) \vee (\iota_4, b)) \wedge ((\iota_2, a) \vee (\iota_2, b)) = (\iota_3, a) \wedge (\iota_2, b) = (\iota_2, b)$.

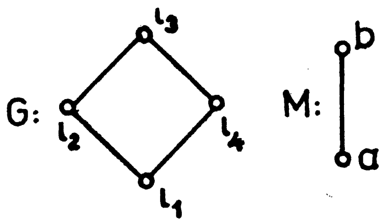

Fig. 1

13. Problem. Welche sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß lexikographische Summe ein distributiver Verband ist?

14. Definition. Ein relativer Verband M heißt *distributiver relativer Verband*, wenn M^* ein distributiver Verband ist.

15. Bemerkung. Es ist leicht zu sehen, daß distributiver relativer Verband ein modularer relativer Verband ist.

16. Lemma. *Sei $\sum_{\iota \in G}^{l} M_\iota$ ein Verband, sei $\iota_0 \in G$. Die distributive Gleichheit*

(D_0) $(\iota_0, a) \vee ((\iota_0, b) \wedge (\iota_0, c)) = ((\iota_0, a) \vee (\iota_0, b)) \wedge ((\iota_0, a) \vee (\iota_0, c))$

gilt in $\sum_{\iota \in G}^{l} M_\iota$ für jedes Elemententripel $a, b, c \in M_{\iota_0}$ genau dann, wenn M_{ι_0} ein distributiver relativer Verband ist.

Beweis: Sei $N = \{\iota_0\} \times M_{\iota_0}$. Wir konstruieren die geordnete Menge N^* nach 3.

Ist M_{ι_0} nicht nach unten [nach oben] gerichtet, dann existiert $\iota_1 \in G[\iota_2 \in G]$ so, daß $\iota_1 = g(L_G(\iota_0) - \{\iota_0\})\ [\iota_2 = l(U_G(\iota_0) - \{\iota_0\})]$ ist und M_{ι_1} nach oben [M_{ι_2} nach unten] beschränkt ist. Im ersten [zweiten] Fall setzen wir $o = (\iota_1, g(M_{\iota_1}))$ $[i = (\iota_2, l(M_{\iota_2}))]$. Dann gilt $N^* \subseteq \sum_{\iota \in G}^{l} M_\iota$ und N^* ist ein Teilverband des Verbandes $\sum_{\iota \in G}^{l} M_\iota$. Nach der Definition 14 ist N^* ein distributiver Verband genau dann, wenn N mit der durch die Ordnungsrelation auf $\sum_{\iota \in G}^{l} M_\iota$ induzierten Ordnungsrelation ein distributiver relativer Verband ist.

Gilt distributive Gleichheit in N^* für jedes Elemententripel $(\iota_0, a), (\iota_0, b), (\iota_0, c) \in N$, dann gilt distributive Gleichheit in N^* ebenfalls für jedes Elemententripel aus N^* und umgekehrt.

Die Mengen N und M_{ι_0} sind trivialerweise isomorph.

Aus unserer Konstruktion folgt: (D_0) gilt $\Leftrightarrow$ N^* ist ein distributiver Verband $\Leftrightarrow$ N ist ein distributiver relativer Verband $\Leftrightarrow$ M_{ι_0} ist ein distributiver relativer Verband.

17. Satz. *Sei $\{M_\iota; \iota \in G\}$ ein geordnetes System geordneter Mengen. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(A) $\sum_{\iota \in G}^{l} M_\iota$ *ist ein distributiver Verband.*

(B) $\sum_{\iota \in G}^{l} M_\iota$ *ist ein Verband, G ist ein distributiver Verband, M_ι ist ein distributiver relativer Verband für jedes $\iota \in G$ und es gilt:*

(γ) *Wenn $\iota_1, \iota_2 \in G$, $\iota_1 \parallel \iota_2$ ist, dann sind M_{ι_1}, M_{ι_2} einelementige Mengen.*

Beweis: Es gelte (A). Es ist klar, daß $\sum_{\iota \in G}^{l} M_\iota$ ein modularer Verband ist. Also ist G ein modularer Verband.

Setzen wir voraus, daß G kein distributiver Verband ist, d. h. in G existiert ein Teilverband G_1 mit dem Diagramm in Fig. 2. Seien $a \in M_{\iota_1}$, $b \in M_{\iota_2}$, $c \in M_{\iota_3}$ beliebige Elemente. Nach der im Satz 8 gegebenen Bedingung (α_2) ist M_{ι_4} nach

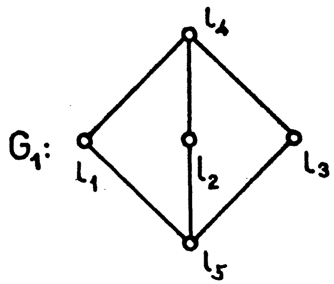

Fig. 2

unten und M_{ι_5} nach oben beschränkte Menge und dann gilt $(\iota_1, a) = (\iota_1, a) \vee$ $\vee (\iota_5, g(M_{\iota_5})) = (\iota_1, a) \vee ((\iota_2, b) \wedge (\iota_3, c)) = ((\iota_1, a) \vee (\iota_2, b)) \wedge ((\iota_1, a) \vee (\iota_3, c)) =$ $= (\iota_4, l(M_{\iota_4})) \wedge (\iota_4, l(M_{\iota_4})) = (\iota_4, l(M_{\iota_4}))$. Das ist ein Widerspruch mit der Voraussetzung, d. h. wir haben bewiesen, daß G ein distributiver Verband ist.

Sei $\iota_0 \in G$ ein beliebiges Element. Aus der Voraussetzung, daß $\sum_{\iota \in G}^{l} M_\iota$ ein distributiver Verband ist, folgt nach Lemma 16, daß M_{ι_0} ein distributiver relativer Verband ist.

Jetzt beweisen wir die Bedingung (γ). Setzen wir voraus, daß unvergleichbare Elemente $\iota_1 \parallel \iota_2$ in G existieren. Nach Satz 10 sind M_{ι_1}, M_{ι_2} Antiketten. Da M_{ι_1}, M_{ι_2} distributive relative Verbände sind, sind M_{ι_1}, M_{ι_2} höchstens zweielementige Antiketten. Nehmen wir an, daß verschiedene Elemente a, b in M_{ι_1} existieren. Sei $c \in M_{\iota_2}$ ein beliebiges Element. Es ist (ι_1, a), (ι_1, b), $(\iota_2, c) \in \sum_{\iota \in G}^{l} M_\iota$. Nach den im Satz 8 gegebenen Bedingungen (α_1), (α_2) sind $M_{\iota_1 \wedge \iota_2}$ nach oben und $M_{\iota_1 \vee \iota_2}$, M_{ι_0} nach unten beschränkte Mengen, wo $\iota_0 \in G$, $\iota_0 = l(U_G(\iota_1) - \{\iota_1\})$ ist. Es gilt einerseits $((\iota_1, a) \vee ((\iota_1, b) \wedge (\iota_2, c)) = (\iota_1, a) \vee (\iota_1 \wedge \iota_2, g(M_{\iota_1 \wedge \iota_2})) = (\iota_1, a)$ und andererseits $((\iota_1, a) \vee (\iota_1, b)) \wedge ((\iota_1, a) \vee (\iota_2, c)) = (\iota_0, l(M_{\iota_0})) \wedge (\iota_1 \vee \iota_2, l(M_{\iota_1 \vee \iota_2}))$. Es ist $\iota_1 < \iota_1 \vee \iota_2$, also ist $\iota_1 \vee \iota_2 \in U_G(\iota_1) - \{\iota_1\}$ und daher ist $\iota_0 \leqq \iota_1 \vee \iota_2$. Aus $\iota_0 \leqq \iota_1 \vee \iota_2$ folgt $(\iota_0, l(M_{\iota_0})) \wedge (\iota_1 \vee \iota_2, l(M_{\iota_1 \vee \iota_2})) = (\iota_0, l(M_{\iota_0}))$. Das ist ein Widerspruch mit der Voraussetzung, daß $\sum_{\iota \in G}^{l} M_\iota$ ein distributiver Verband ist. Also ist M_{ι_1} eine einelementige Menge und es ist klar, daß M_{ι_2} auch eine einelementige Menge ist. Also gilt (B).

Setzen wir voraus, daß (B) gilt. Seien (ι_1, a), (ι_2, b), $(\iota_3, c) \in \sum_{\iota \in G}^{l} M_\iota$ beliebige Elemente. Wir beweisen, daß die distributive Gleichheit

(D) $(\iota_1, a) \vee ((\iota_2, b) \wedge (\iota_3, c)) = ((\iota_1, a) \vee (\iota_2, b)) \wedge ((\iota_1, a) \vee (\iota_3, c))$ gilt.

Aus der Voraussetzung (B), dem Satz 10 und der Bemerkung 15 folgt, daß $\sum_{\iota \in G}^{l} M_\iota$ ein modularer Verband ist und wenn das Elemententripel (ι_1, a), (ι_2, b), (ι_3, c) weningstens ein Paar vergleichbare Elemente hat, dann gilt (D).

Betrachten wir den Fall, wenn das Elemententripel (ι_1, a), (ι_2, b), (ι_3, c) drei Paare unvergleichbare Elemente hat. Dann gilt entweder $\iota_1 = \iota_2 = \iota_3$ oder $\iota_1 \parallel \iota_2$, $\iota_1 \parallel \iota_3$, $\iota_2 \parallel \iota_3$. Anderer Fall ist schon nicht möglich. Wenn es z. B. $\iota_1 = \iota_2$, $\iota_1 \parallel \iota_3$ wäre, dann ist $M_{\iota_1} = M_{\iota_2}$ einelementige Menge nach der Bedingung (γ), also gilt $(\iota_1, a) = (\iota_2, b)$ und das ist ein Widerspruch.

Ist $\iota_1 = \iota_2 = \iota_3$, dann gilt (D) nach Lemma 16.

Setzen wir nun voraus, daß $\iota_1 \parallel \iota_2$, $\iota_1 \parallel \iota_3$, $\iota_2 \parallel \iota_3$ ist. Nach der Bedingung (γ) sind M_{ι_1}, M_{ι_2}, M_{ι_3} einelementige Mengen, d. h. $M_{\iota_1} = \{a\}$, $M_{\iota_2} = \{b\}$, $M_{\iota_3} = \{c\}$. Nach der Bedingung (α_2) sind $M_{\iota_2 \wedge \iota_3}$ nach oben und $M_{\iota_1 \vee \iota_2}$, $M_{\iota_1 \vee \iota_3}$ nach unten beschränkte Mengen. Es gilt $\iota_1 \vee (\iota_2 \wedge \iota_3) = (\iota_1 \vee \iota_2) \wedge (\iota_1 \vee \iota_3)$. Die Ungleichheit $\iota_1 \leqq \iota_2 \wedge \iota_3$ widerspricht z. B. der Voraussetzung $\iota_1 \parallel \iota_2$.

Nehmen wir an, daß $\iota_2 \wedge \iota_3 < \iota_1$. Dann ist $\iota_1 = \iota_1 \vee (\iota_2 \wedge \iota_3) = (\iota_1 \vee \iota_2) \wedge (\iota_1 \vee \iota_3)$. Weiter gilt $\iota_1 \vee \iota_2 \parallel \iota_1 \vee \iota_3$. In der Tat: Es ist $\iota_1 < \iota_1 \vee \iota_2$, $\iota_1 < \iota_1 \vee \iota_3$. Sind $\iota_1 \vee \iota_2$, $\iota_1 \vee \iota_3$ vergleichbare Elemente, dann haben wir ein Widerspruch mit der Voraussetzung, daß G ein distributiver Verband ist. Nach der Bedingung (γ) sind $M_{\iota_1 \vee \iota_2}$, $M_{\iota_1 \vee \iota_3}$ einelementige Mengen. Bezeichnen wir $M_{\iota_1 \vee \iota_2} = \{u\}$, $M_{\iota_1 \vee \iota_3} = \{v\}$. Gemäß der Bedingung (α_2) ist $M_{(\iota_1 \vee \iota_2) \wedge (\iota_1 \vee \iota_3)}$ nach oben beschränkte Menge und gilt einerseits $(\iota_1, a) \vee ((\iota_2, b) \wedge (\iota_3, c)) = (\iota_1, a) \vee (\iota_2 \wedge \iota_3, g(M_{\iota_2 \wedge \iota_3})) = (\iota_1, a)$ und ardererseits $((\iota_1, a) \vee (\iota_2, b)) \wedge ((\iota_1, a) \vee (\iota_3, c)) = (\iota_2 \vee \iota_2, u) \wedge (\iota_1 \vee \iota_3, v) = ((\iota_1 \vee \iota_2) \wedge (\iota_1 \vee \iota_3), g(M_{(\iota_1 \vee \iota_2) \vee (\iota_1 \vee \iota_3)}))$. Aus $\iota_1 = (\iota_1 \vee \iota_2) \wedge (\iota_1 \vee \iota_3)$ und $M_{\iota_1} = \{a\}$ folgt $a = g(M_{\iota_1})$, d. h. (D) gilt.

Setzen wir schließlich voraus, daß $\iota_1 \parallel \iota_2 \wedge \iota_3$. Dann ist $M_{\iota_2 \wedge \iota_3}$ eine einelementige Menge. Bezeichnen wir $M_{\iota_2 \wedge \iota_3} = \{w\}$. Nach der Bedingung (α_2) ist $M_{\iota_1 \vee (\iota_2 \wedge \iota_3)}$ nach unten beschränkte Menge. Jetzt ist entweder $\iota_1 \vee \iota_2 \leqq \iota_1 \vee \iota_3$ oder $\iota_1 \vee \iota_2 > \iota_1 \vee \iota_3$ oder $\iota_1 \vee \iota_2 \parallel \iota_1 \vee \iota_3$.

Aus $\iota_1 \vee \iota_2 \leqq \iota_1 \vee \iota_3$ folgt einerseits $(\iota_1, a) \vee ((\iota_2, b) \wedge (\iota_3, c)) = (\iota_1, a) \vee (\iota_2 \wedge \iota_3, g(M_{\iota_2 \wedge \iota_3})) = (\iota_1, a) \vee (\iota_2 \wedge \iota_3, w) = (\iota_1 \vee (\iota_2 \wedge \iota_3), l(M_{\iota_1 \vee (\iota_2 \wedge \iota_3)}))$ und andererseits $((\iota_1, a) \vee (\iota_2, b)) \wedge ((\iota_1, a) \vee (\iota_3, c)) = (\iota_1 \vee \iota_2, l(M_{\iota_1 \vee \iota_2})) \wedge (\iota_1 \vee \iota_3, l(M_{\iota_1 \vee \iota_3})) = (\iota_1 \vee \iota_2, l(M_{\iota_1 \vee \iota_2}))$. Da G ein distributiver Verband ist, gilt $\iota_1 \vee (\iota_2 \wedge \iota_3) = \iota_1 \vee \iota_2$. Also gilt (D).

Ähnlich beweisen wir (D) aus der Voraussetzung $\iota_1 \vee \iota_2 > \iota_1 \vee \iota_3$.

Es gelte $\iota_1 \vee \iota_2 \parallel \iota_1 \vee \iota_3$. Nach der Bedingung ($\gamma$) sind $M_{\iota_1 \vee \iota_2} = \{u\}$, $M_{\iota_1 \vee \iota_3} = \{v\}$ einelementige Mengen. Gemäß der Bedingung (α_2) ist $M_{(\iota_1 \vee \iota_2) \wedge (\iota_1 \vee \iota_3)}$ nach oben beschränkte Menge. Bezeichnen wir $\iota_0 = \iota_1 \vee (\iota_2 \wedge \iota_3) = (\iota_1 \vee \iota_2) \wedge (\iota_1 \vee \iota_3)$. Wir beweisen, daß $\iota_2 \parallel \iota_1 \vee (\iota_2 \wedge \iota_3)$ oder $\iota_3 \parallel \iota_1 \vee (\iota_2 \wedge \iota_3)$. Fig. 3 ilustriert einen

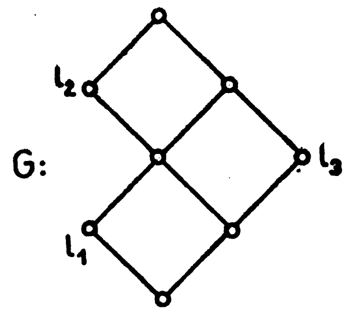

Fig. 3

distributiver Verband G mit solchen Elementen $\iota_1, \iota_2, \iota_3$, daß $\iota_1 \parallel \iota_2 \wedge \iota_3$, $\iota_1 \vee \iota_2 \parallel \iota_1 \vee \iota_3$, $\iota_3 \parallel \iota_1 \vee (\iota_2 \wedge \iota_3)$. Setzen wir nun voraus, daß ein distributiver Verband G mit $\iota_1 \parallel \iota_2 \wedge \iota_3$, $\iota_1 \vee \iota_2 \parallel \iota_1 \vee \iota_3$ existiert, aber weder $\iota_2 \parallel \iota_1 \vee (\iota_2 \wedge \iota_3)$ noch $\iota_3 \parallel \iota_1 \vee (\iota_2 \wedge \iota_3)$ gilt nicht. Es ist $\iota_1 < \iota_1 \vee (\iota_2 \wedge \iota_3)$. Aus $\iota_2 \leqq \iota_1 \vee (\iota_2 \wedge \iota_3)$ folgt $\iota_1 \vee \iota_2 \leqq \iota_1 \vee (\iota_2 \wedge \iota_3) = (\iota_1 \vee \iota_2) \wedge (\iota_1 \vee \iota_3) < \iota_1 \vee \iota_3$ und das ist ein Widerspruch mit $\iota_1 \vee \iota_2 \parallel \iota_1 \vee \iota_3$. Ähnlich bekommen wir ein Widerspruch aus der Voraussetzung $\iota_3 \leqq \iota_1 \vee (\iota_2 \wedge \iota_3)$. Nehmen wir schließlich an, daß $\iota_1 \vee (\iota_2 \wedge \iota_3) < \iota_2$, $\iota_1 \vee (\iota_2 \wedge \iota_3) < \iota_3$ gleichzeitig gilt. Dann ist $\iota_1 < \iota_2$, $\iota_1 < \iota_3$ und das ist ein Widerspruch mit $\iota_1 \parallel \iota_2 \wedge \iota_3$. Wir haben bewiesen, daß $\iota_2 \parallel \iota_1 \vee (\iota_2 \wedge \iota_3)$ oder $\iota_3 \parallel \iota_1 \vee (\iota_2 \wedge \iota_3)$ gilt. Also ist M_{ι_0} eine einelementige Menge nach der Bedingung (γ). Bezeichnen wir $M_{\iota_0} = \{z\}$. Jetzt gilt einerseits $((\iota_1, a) \vee ((\iota_2, b) \wedge (\iota_3, c)) = (\iota_1, a) \vee (\iota_2 \wedge \iota_3, g(M_{\iota_2 \wedge \iota_3})) = (\iota_1, a) \vee (\iota_2 \wedge \iota_3, w) = (\iota_1 \vee (\iota_2 \wedge \iota_3), l(M_{\iota_1 \vee (\iota_2 \wedge \iota_3)}) = (\iota_0, l(M_{\iota_0})) = (\iota_0, z)$ und andererseits $((\iota_1, a) \vee (\iota_2, b)) \wedge ((\iota_1, a) \vee (\iota_3, c)) = (\iota_1 \vee \iota_2, l(M_{\iota_1 \vee \iota_2})) \wedge (\iota_1 \vee \iota_3, l(M_{\iota_1 \vee \iota_3})) = (\iota_1 \vee \iota_2, u) \wedge (\iota_1 \vee \iota_3, v) = ((\iota_1 \vee \iota_2) \wedge (\iota_1 \vee \iota_3), g(M_{(\iota_1 \vee \iota_2) \wedge (\iota_1 \vee \iota_3)})) = (\iota_0, g(M_{\iota_0})) = (\iota_0, z)$. Also gilt (D). Wir haben (A) bewiesen.

18. Bemerkung. Seien M, N geordnete Mengen. Mit $M \circ N$ bezeichnen wir das Ordinalprodukt der Mengen M, N.

19. Bemerkung. Sei $\{M_\iota; \iota \in G\}$ ein geordnetes System geordneter Mengen, sei $M_\iota \cong M$ für jedes $\iota \in G$, dann gilt $\sum_{\iota \in G}^{l} M_\iota \cong G \circ M$.

Aus dem Satz 17 folgt sofort folgende Behauptung.

20. Folgerung. *Seien G, M geordnete Menge. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(A) *$G \circ M$ ist ein distrubitiver Verband.*

(B) *$G \circ M$ ist ein Verband, G ist ein distributiver Verband, M ist ein distributiver relativer Verband und es gilt: Ist G keine Kette, dann ist M eine einelementige Menge.*

LITERATUR

[1] G. Birkhoff, *Generalized arithmetic*, Duke Math. J. 9 (1942), 283–302.

[2] G. Birkhoff, *Lattice Theory*, New York, 1948.

[3] O. Kopeček, *Die arithmetischen Operationen für geordnete Mengen*, Arch. Math. (Brno) 4, (1968), 157–174.

[4] E. Slatinský, *Die arithmetische Operation der Summe*, Arch. Math. (Brno) 20 (1984), 9–20.

[5] E. Slatinský, *Die Abgeschlossenheit der lexikographischen Summe in der Klasse modularer Verbände*, Arch. Math. (Brno) 20 (1984), 205–210.

[6] G. Szász, *Einführung in die Verbandstheorie*, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1962.

E. Slatinský
Katedra matematiky a deskriptivní geometrie FAST,
Barvičova 85
662 37 Brno,
Czechoslovakia